TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS ELEMENTARES NO PLANO COMPLEXO

ELEMENTARY GEOMETRIC TRANSFORMATIONS IN THE COMPLEX PLANE

Maria Laísa Vasconcelos Silva

mlvs1@discente.ifpe.edu.br

Me. Leonardo Moura de Amorim

amorim.leomoura@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é apresentar a teoria dos números complexos com um olhar geométrico, inferindo que as aplicações geométricas executadas no plano cartesiano, adaptadas de forma conveniente, podem também ser aplicadas no plano complexo. Além de uma breve história e de um pequeno estudo algébrico, incluindo a devida interpretação geométrica das operações algébricas, e trigonométricas dos números complexos, serão apresentadas algumas transformações geométricas elementares e como elas funcionam no plano complexo. A finalidade é, principalmente, mostrar como as translações, as homotetias, as rotações, e as reflexões podem ser definidas no plano complexo, sem a preocupação de mostrar ou discutir suas aplicações.

Palavras-Chave: Números Complexos. Translação. Homotetia. Rotação. Reflexão.

ABSTRACT

The main objective of this work is to present the theory of complex numbers with a geometric look, inferring that the geometric applications executed in the Cartesian plane, conveniently adapted, can also be applied in the complex plane. In addition to a brief history and a small algebraic study, including the proper geometric interpretation of algebraic and trigonometric operations of complex numbers, some elementary geometric transformations will be presented and how they work in the complex plane. The purpose is, mainly, to show how translations, homotheties, rotations, and reflections can be defined in the complex plane, without worrying about showing or discussing their applications.

Keywords: Complex numbers. Translation. Homothety. Rotation. Reflection.

Instituto Federal de Pernambuco. Campus Pesqueira. Curso de Licenciatura em Matemática. 08 de março de 2023.

INTRODUÇÃO

Os números complexos surgiram com intenção de resolver problemas envolvendo raízes negativas. Esses problemas desafiaram matemáticos durante séculos, mas em 1535, Fiore desafiou Tartaglia a resolver 30 questões de equação do terceiro grau envolvendo raízes negativas. Apesar de Fiore estar em vantagem por ter uma fórmula para resolver tais questões, ele não conseguiu resolver qualquer desafio proposto pelo seu adversário.

Ao contrário de Fiore, Tartaglia com muito esforço resolveu todas as questões e chamou a atenção do matemático Cardano que ficou obcecado em saber da fórmula que Tartaglia tinha usado. Após aprender, Cardano publicou, em 1545, um livro que tratava sobre formas de resolver equações com raízes negativas e foi daí que surgiu o primeiro relato de resolução de equações do terceiro grau com raízes negativas na história da matemática.

Em 1831 os números complexos tiveram seu devido reconhecimento e esse mérito se dá ao maior matemático do século XIX, Carl Friedrich Gauss que tornou a interpretação geométrica amplamente aceita. Gauss não só estudou a identificação do conjunto dos complexos com o plano, como usou os complexos para obter vários resultados sobre geometria plana, os números reais e também os números inteiros, dentre outras descobertas.

A importância dos números complexos vai muito além do que resolver problemas que envolvem raízes negativas. Eles são muito importantes para várias especialidades da matemática aparecendo, por exemplo, em problemas que envolvem rotação, funções trigonométricas, movimentos periódicos, dentre outros. Além disso, ajuda em outros campos da ciência.

No presente trabalho, sem pretensão de expor qualquer aplicação, serão apresentadas algumas transformações geométricas elementares no plano complexo. Será deixada uma lacuna para que pessoas interessadas possam dar uma continuidade ao que foi iniciado neste trabalho, mostrando aplicações e até mesmo outras transformações que também podem ser feitas no plano complexo, visto que há poucos trabalhos tratando sobre tais assuntos.

No capítulo 1, é relatada uma breve história sobre os números complexos, abordando desde o anseio da sua existência até a sua legitimidade como objeto fundamental para a matemática. É importante salientar que foi a necessidade da representação geométrica para os complexos que levou a alcançar a sua legitimidade.

No capítulo 2, os números complexos e suas operações são tratados na sua forma algébrica. Além disso, é feita uma análise de suas propriedades acompanhadas das devidas demonstrações.

No capítulo 3, é apresentado o plano de Argand-Gauss e os números complexos na forma trigonométrica ou polar. São apresentadas definições e provas de algumas operações matemáticas envolvendo números complexos na forma polar.

Por fim, no capítulo 4, aparecem as transformações geométricas elementares executadas no plano complexo. As homotetias e transformações isométricas, como as translações, as rotações e as reflexões são aqui definidas.

1. Uma breve história dos números complexos

Até o século XV resolver equações que acabavam em raízes negativas, eram dispensadas como sem solução. O primeiro relato de resolução de equações do terceiro grau com raízes negativas na história da matemática, está no livro Ars Magna de Girolamo Cardano (1501 - 1576) publicado em 1545.

Em 1494, Frei Luca Pacioli (1445 - 1517) afirmou no seu livro Summa de Aritmética, que não se podia resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, nessa época chamada de "cubo e coisas igual número". Era denominado dessa forma porque a incógnita que hoje conhecemos como x era chamada de "a coisa", x^2 era "censo", x^3 era "cubo", x^4 era "censo censo" e assim por diante.

Em 1515, Scipione del Ferro (1465-1526) resolveu o problema de 3 mil anos, desenvolvendo uma maneira de resolver as equações do tipo $x^3 + px + q = 0$. Apesar de não ter publicado, seu segredo foi passado para seus dois discípulos: Annibale Della Nave e Antonio Maria del Fiore e acredita-se que o motivo tenha sido porque naquela época os matemáticos tinham costume de desafiar outros matemáticos e, talvez, com medo de surgir problemas sobre a veracidade das teorias se algum erro fosse encontrado, ele preferiu não publicar.

Em 1535, Fiore, se sentindo empoderado e vantajoso, desafiou Niccolò Tartaglia (1500-1557), matemático esforçado de história humilde e sofrida, a resolver 30 equações do terceiro grau. Apesar de Fiore possuir vantagem devido a fórmula de Ferro, com muito esforço e dedicação, Tartaglia deduziu a equação do terceiro grau vencendo todas as disputas contra Fiore que não conseguiu solucionar nenhum desafio proposto.

As notícias sobre o desafio correram por vários lugares até chegar aos ouvidos de Cardano, em Milão, que ficou obcecado em saber da fórmula que Tartaglia tinha usado. Cardano fez de tudo para tê-lo em sua casa como convidado e depois de muito insistir e prometer segredo, em 1539 conseguiu a tão esperada fórmula meia enigmática e sem nenhuma indicação de prova.

Depois de cessar a curiosidade, Cardano se esforçou para validar a ideia. Seus estudos e do seu fiel colaborador e discípulo Ludovico Ferrari tiveram muito sucesso. Segundo Lima (2004), eles conseguiram obter solução por radicais da equação do 4º grau, que conduziram a importantes avanços na teoria das equações, como por exemplo o reconhecimento de raízes múltiplas, relação entre coeficiente e raízes, e, o que mais interessa nesse caso, aceitação de raízes negativas, irracionais e imaginárias.

Em 1542, Cardano e Ferrari foram para Bolonha e lá conseguiram a permissão de Della Nave para ler os manuscritos deixados por Ferro. Ao ver que há muito tempo Ferro já tinha descoberto uma forma de resolver equações do 3º grau, Cardano não se sentiu na obrigação de cumprir sua promessa. Foi aí que em 1545, no seu livro, resolveu o seguinte problema: "Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40". Dessa forma, mesmo sem a aprovação dos pioneiros Scipione del Ferro e Niccolò Tartaglia, Cardano apresenta a fórmula que diz:

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \qquad (1)$$

Para que o método apresentasse uma raiz conhecida, inicialmente, foi necessário operar com raíz quadrada de números negativos. Ao ficar surpreso e não crente dos resultados, já que naquela época os números complexos eram pouco compreendidos, Cardano não ousou seguir adiante.

Por sua vez, Rafael Bombelli (1526-1572), prosseguiu com a solução encontrada por Cardano e considerou a raiz quadrada de -1 como um número "imaginário". Ele desenvolveu regras para trabalhar com esse tipo de número no seu livro “Algebra” publicado em 1572. Os matemáticos da época seguiam as regras de tal livro para resolver os problemas. Porém, mesmo esses fazendo as operações e chegando a resultados aceitáveis, eles achavam que o número imaginário e suas regras, não eram objetos matemáticos e sim um recurso de cálculo.

Lamentavelmente, a legitimação não viria tão cedo. Leonhard Euler (1707-1783) que sabia operar potências com expoente complexo, logaritmos de números complexos e funções trigonométricas com argumento complexo, disse em seu livro “Pesquisa sobre Raízes Imaginárias de uma Equação”, publicado em 1749, que:

> “Como todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis. E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação.”

A primeira aparição de números complexos representados geometricamente que se tem registro foi em 1673, no livro “Algebra Tratactus, Historicus e Practicus” escrito por John Wallis (1616-1703) que não obteve sucesso. Foi só em 1797 que Caspar Wessel (1745-1818) apresentou à academia dinamarquesa de ciência um artigo denominado “Sobre a Representação Analítica da Direção”, que propunha uma forma correta de representação geométrica, via segmentos orientados, para os números complexos.

Robert Argand (1768-1822) escreveu o livro “o Essai sur une manière de representer lês quantités imaginaires dans lês constructions géométriques”, publicado em 1806, que falava sobre a representação geométrica dos números complexos. Ele dá interpretações para números da forma $a + bi$ e para as operações com complexos, aplicando seus resultados à demonstração de teoremas de álgebra, geometria e trigonometria.

Mas foi só com os trabalhos publicados por Carl Friedrich Gauss (1777-1855) que houve o devido reconhecimento pela comunidade matemática para os números complexos. Na obra “Teoria dos Resíduos Quadráticos” publicada em 1831, Gauss diz:

> “Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que provou que eles têm um significado tão real quanto o dos números negativos”.

Gauss foi o maior matemático do século XIX e foi quem verdadeiramente tornou a interpretação geométrica amplamente aceita. Por isso, o plano complexo é denominado “Plano de Argand-Gauss”. Wessel foi o pioneiro, mas o que explicaria tal injustiça seria o fato de que não era matemático e no seu país tão pouco havia academia de ciências. Por isso, a comunidade matemática só teve acesso à obra de Wessel cem anos depois da publicação.

2. Números Complexos na Forma Algébrica

Com a necessidade de organizar os números que tinham algumas características em comum, foram criados os conjuntos numéricos. Essas características dividiram os números em seis conjuntos diferentes, sendo eles: os naturais, os inteiros, os racionais, os irracionais, os reais e os complexos.

O conjunto dos números naturais é representado pela letra $\mathbb{N}$ e é formado por números inteiros não negativos, incluindo o zero. O conjunto dos números inteiros é representado pela letra $\mathbb{Z}$ e é formado por números inteiros podendo ser positivos ou negativos, incluindo o zero. Os racionais são aqueles que podem ser escritos na forma de fração, tendo como numerador um número inteiro e no denominador um número inteiro diferente de 0, e são representados pela letra $\mathbb{Q}$. Os irracionais são números em decimal que não podem ser representados em forma de fração e aqui serão representados pela letra I. O conjunto dos números reais que é representado pela letra $\mathbb{R}$, é formado pela união dos conjuntos anteriormente citados. Por fim, o mais amplo dos conjuntos, o conjunto dos números Complexos. Esse é representado pela letra $\mathbb{C}$ e inclui todos os conjuntos existentes, onde qualquer elemento $Z = (x, y) \in \mathbb{C}$ é chamado de número complexo.

2.1 Propriedade das operações de números complexos

Um número complexo $x + iy$ fica completamente determinado pelos dois números reais x e y, logo, ocorreu a William Rowan Hamilton (1805 - 1865) dar sua representação de maneira desmistificada e simples pelo par ordenado de números reais (x, y). Ele definiu então, a igualdade de dois pares (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pelas condições $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$. Conseguindo, dessa forma, desenvolver a adição e multiplicação de números complexos com pares ordenados.

Definiremos a adição (soma) e a multiplicação (produto) de números complexos de acordo com Hefez e Villela (2012), a seguir.

2.1.1 Adição (Soma)

Considerando $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, pode-se definir a soma em $\mathbb{C}$ da seguinte forma:

$$Z_1 + Z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2\,,\ y_1 + y_2)$$

O que satisfaz a propriedade da lei comutativa e da lei associativa demonstrada abaixo, onde:

I. $Z_1 + Z_2 = Z_2 + Z_1$ para todos Z_1 , $Z_2 \in \mathbb{C}$
II. $(Z_1 + Z_2) + Z_3 = Z_1 + (Z_2 + Z_3)$ para todos $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$

De fato, se $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$, então:

$$(Z_1 + Z_2) + Z_3 = \left[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)\right] + \left(x_3, y_3\right)$$
$$= \left[(x_1 + x_2\, , \, y_1 + y_2)\right] + \left(x_3, y_3\right)$$
$$= \left[(x_1 + x_2) + x_3\, , \, (y_1 + y_2) + y_3\right]$$

E como $Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (x_1, y_1) + \left[(x_2, y_2) + \left(x_3, y_3\right)\right]$ então

$$= (x_1, y_1) + \left(x_2 + x_3\, , y_2 + y_3\right) = \left(x_1 + \left(x_2 + x_3\right), \, y_1 + \left(y_2 + y_3\right)\right)$$

A afirmação é válida devido à associatividade da adição de números reais.

2.1.2 Multiplicação (Produto)

Considerando $Z_1 = (x_1, y_1)$ e $Z_2 = (x_2, y_2)$, definiremos o produto de Z_1 por Z_2 assim:

$$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2\, , \, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Que satisfaz as propriedades da lei comutativa, lei associativa, identidade multiplicativa e inverso multiplicativo. Ou seja:

I. $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$ para todos Z_1 , $Z_2 \in \mathbb{C}$

II. $(Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 = Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3)$ para todos $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathbb{C}$

III. Existe um único número complexo $j = (1, 0) \in \mathbb{C}$ tal que $Z \cdot j = j \cdot Z = Z$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Iremos provar com uma simples manipulação algébrica:

$$Z \cdot j = (x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0\, , \, x \cdot 0 + y \cdot 1) = (x, y) = Z$$
$$j \cdot Z = (1, 0) \cdot (x, y) = (1 \cdot x - 0 \cdot y\, , \, 0 \cdot x + 1 \cdot y) = (x, y) = Z$$

IV. Para todo número complexo Z não nulo existe um número complexo inverso chamado Z^{-1}, tal que:

$$Z^{-1} \cdot Z = Z \cdot Z^{-1} = 1$$

De fato, queremos determinar $Z^{-1} = (x', y')$ de modo que $(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x' - y \cdot y', xy' + x'y) = 1 = (1, 0)$, que nos leve ao sistema:

$$\begin{cases} x \cdot x' - y \cdot y' = 1 \\ x \cdot y' + x' \cdot y = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x' e y' cuja solução é $x' = \frac{x}{x^2+y^2}$ e $y' = \frac{y}{x^2+y^2}$. Assim, $Z^{-1} = \frac{1}{Z} = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Vale ressaltar que $x^2 + y^2 \neq 0$, pois assumimos que $Z \neq (0, 0)$.

2.2 Números complexos na forma algébrica

Qualquer número $Z = (x, y)$ pode ser representado na forma

$$Z = x + iy$$

onde:
Z= Número Complexo
x= Parte real do número complexo ($Re_{(Z)}$)
y= Parte imaginária do número complexo ($Im_{(Z)}$)
$i = (0, 1)$

pois $Z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi$.
Também é válido dizer que $i^2 = - 1$, já que:

$$i^2 = i \cdot i = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$$

Dessa forma, podemos ver que:

$Z_1 = Z_2$ se somente se $Re_{(Z_1)} = Re_{(Z_2)}$ e $Im_{(Z_1)} = Im_{(Z_2)}$
$Z \in \mathbb{R}$ se somente se $Im_{(Z)} = 0$
$Z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ se somente se $Im_{(Z)} \neq 0$

2.3 Operações com números complexos na forma algébrica

$Z_1 + Z_2 = (x_1, iy_1) + (x_2, iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \in \mathbb{C}$
$Z_1 \cdot Z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \in \mathbb{C}$

Considerando tais operações, iremos definir as potências do número i, e o conjugado de um número complexo.

2.3.1 Potência do número i

Em uma sequência, i se comporta de forma interessante. Abaixo será calculada as oito primeiras potências de i.

$i^0 = 1$
$i^1 = i$
$i^2 = -1$
$i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$
$i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$
$i^6 = i \cdot i^5 = i \cdot i = i^2 = -1$
$i^7 = i \cdot i^6 = i \cdot (-1) = -i$

Ao observar, percebemos que a sequência se repete em ciclos de 4. Por consequência, $i^{n+4} = i^n \cdot i^4 = i^n \cdot 1 = i^n$.

Portanto, podemos estabelecer uma regra para cálculo da potência de i. Sendo r o resto e q o quociente, para calcular i^n, dividimos n por 4, então, $i^n = i^r$. Logo, $i^n = i^{4q+r} = \left(i^4\right)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$.

Portanto, $i^n \in \{-1, 1, -i, i\}$ para todos os inteiros $n \geq 0$. Se n é um inteiro negativo tem-se:

$$i^n = (i^{-1})^{-n} = (\frac{1}{i})^{-n} = (-i)^{-n}$$

2.3.2 Conjugado do número complexo

Se $Z = x + iy$ então seu conjugado é $\overline{Z} = x - iy$, podendo ser chamado de complexo conjugado ou conjugado complexo de Z.

A proposição é verdadeira pois as seguintes propriedades são válidas segundo Andreescu e Andrica (2006):

I. A relação $Z = \overline{Z}$ só é válida se $Z \in \mathbb{R}$.

II. Para qualquer número complexo Z a relação $Z = \overline{\overline{Z}}$ é válida.

III. Para qualquer número complexo Z o número $Z \cdot \overline{Z} \in \mathbb{R}$ é um número real não negativo. Segue daí, que podemos dividir $w \in \mathbb{C}$ por $Z \neq 0$, Z ∈ $\mathbb{C}$ da seguinte forma:
$$\frac{w}{Z} = \frac{w}{Z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{Z}} = \frac{1}{z \cdot \overline{Z}} \cdot w\overline{Z}$$, onde $\frac{1}{z \cdot \overline{Z}} \in \mathbb{R}$.

IV. $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$.

V. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$.

VI. Para qualquer número complexo não nulo Z, a relação $\overline{Z^{-1}} = (\overline{Z})^{-1}$ é válida.

VII. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$, $Z_2 \neq 0$.

VIII. As fórmulas $Re_{(Z)} = \frac{Z+\overline{Z}}{2}$ e $Im_{(Z)} = \frac{Z-\overline{Z}}{2i}$ são válidas para todo $Z \in \mathbb{C}$.

As provas a seguir foram baseadas segundo Andreescu e Andrisca (2006).

Prova:

I) Se $Z = x + iy$, então a relação $Z = \overline{Z}$ é equivalente a $x + iy = x - iy$. Por isso $2yi = 0$, logo $y = 0$ e finalmente $z = x \in \mathbb{R}$.

II) Temos que $\overline{Z} = x - iy$ e $\overline{\overline{Z}} = x - i(-y) = x + iy = Z$.

III) Observe que $Z \cdot \overline{Z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0$ e $x^2 + y^2 \in \mathbb{R}$.

IV) Note que $\overline{Z_1 + Z_2} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$

$$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \overline{Z_1} + \overline{Z_2}$$

V) Sejam $Z_1 = x_1 + i\,y_1$ e $Z_2 = x_2 + iy_2$, logo

$$\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{\left(x_1x_2 - y_1y_2\right) + \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)i} = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) - \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)i$$

Por outro lado,

$$\overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2} = \left(x_1 - iy_1\right)\left(x_2 - iy_2\right) = \left(x_1x_2 - y_1y_2\right) - \left(x_1y_2 + y_1x_2\right)i$$

Provando assim, a igualdade em V.

VI) Se $Z \cdot \frac{1}{Z} = 1$, então vamos ter $\overline{\left(Z\frac{1}{Z}\right)} = \overline{1}$. Por consequência $\overline{Z} \cdot \overline{\left(\frac{1}{Z}\right)} = 1$, sendo assim $\overline{\left(Z^{-1}\right)} = (\overline{Z})^{-1}$.

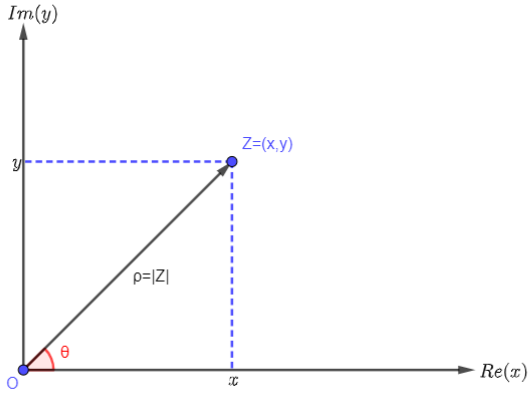
VII) Observe que $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \overline{\left(Z_1 \cdot \frac{1}{Z_2}\right)} = \overline{Z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{Z_2}\right)} = \overline{Z_1} \cdot \frac{1}{\overline{Z_2}} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$.

VIII) Das relações $Z + \overline{Z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$ e $Z - \overline{Z} = (x + iy) - (x - iy) = 2yi$, temos que $Re(Z) = \frac{Z+\overline{Z}}{2}$ e $Im(Z) = \frac{Z-\overline{Z}}{2i}$.

3. Números Complexos na forma trigonométrica

No plano cartesiano a coordenada de um número complexo $Z = x + yi = (x , y)$ será representada da seguinte forma:

Imagem 1 - Representação de Z no plano de Argand-Gauss



Fonte: Própria

O plano cartesiano da imagem 1, usado para representar os números complexos, é chamado de plano de Argand-Gauss ou plano complexo. No plano de Argand-Gauss, o eixo das abscissas é chamado eixo real (Re), e o eixo das ordenadas é chamado de eixo imaginário (Im).

Nesse plano, cada complexo $Z = x + yi = (x , y)$ será representado pelo vetor $\overrightarrow{OP} = (x, y)$. O seu módulo é definido pelo vetor que representa, ou seja, a distância entre a origem e o ponto P é denominado o módulo do número complexo. Portanto,

$$|Z| = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

O módulo de Z = (x, y) e do seu conjugado $\overline{Z}$ = (x, -y) são iguais. De fato, $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$.

Por definição, qualquer ângulo θ que o vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o semi-eixo positivo x é chamado de argumento de um número complexo, isso Z sendo diferente de 0.

Cada complexo $Z \neq 0$, $Z = x + yi$, tem inúmeros argumentos, diferenciando dois quaisquer entre si por um número $k2\pi$, sendo $k \in \mathbb{R}$. Uma vez que, aquele que pertencer ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é retratado por $arg(z)$ e é chamado de argumento principal.

Sendo θ um argumento de $Z = x + yi$, então $x = \rho \cdot cos(\theta)$ e $y = \rho \cdot sin(\theta)$.

Portanto, $Z = x + yi = \rho cos(\theta) + i\rho sen(\theta) = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$

Essa forma é chamada de forma trigonométrica ou polar do complexo Z. Os números ρ e θ são as coordenadas polares do ponto $P(x, y)$.

3.1 Operações com números complexos na forma polar

Ao resolvermos questões envolvendo números complexos, é possível que a complexidade dos cálculos possa atrapalhar o desenvolvimento. Em algumas situações é mais prático efetuar cálculos com números complexos escritos na forma polar do que escritos na forma algébrica.

Definiremos e provaremos a seguir as operações de multiplicação, potência e divisão de números complexos na forma polar segundo Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (1998).

3.1.1 Multiplicação

Digamos que exista um $Z_1\, e\, Z_2$ tal que $Z_1 = \rho_1(cos(\theta_1) + isen(\theta_1))$ e $Z_2 = \rho_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2))$, então:

$$Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))$$

Prova:

$$Z_1 \cdot Z_2 = \rho_1(cos(\theta_1) + isen(\theta_1)) \cdot \rho_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2))$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2\left[cos(\theta_1)cos(\theta_2) + icos(\theta_1)sen(\theta_2) + isen(\theta_1)cos(\theta_2) + i^2 sen(\theta_1)sen(\theta_2)\right]$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2\left[\left(cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2)\right) + i\left(cos(\theta_1)sen(\theta_2) + sen(\theta_1)cos(\theta_2)\right)\right]$$
$$= \rho_1 \cdot \rho_2\left[(cos(\theta_1 + \theta_2) + isen(\theta_1 + \theta_2))\right]$$

3.1.2 Potência

Para calcular a potência de um número complexo, é utilizado a fórmula a seguir. Ela é chamada de fórmula de Moivre em homenagem a Abraham de Moivre (1667 - 1754).

Sendo n um número inteiro, então:

$$Z^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Prova:

Quando $n = 0$ ou $n = 1$ a fórmula se torna óbvia. Ou seja, se $n = 0$ então $Z = 1$. E se $n = 1$ então $Z = Z^1 = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$.

Para $n > 1$, o cálculo se desenvolve aplicando a fórmula de multiplicação.

Trataremos assim, de provar a fórmula para números menores que 0. Então, seja $n =- m$, com $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$(\rho[cos(\theta) + isen(\theta)])^{n} = (\rho[cos(\theta) + isen(\theta)])^{-m}$$
$$= \frac{1}{(\rho[cos(\theta)+isen(\theta)])^{m}}$$
$$= \frac{1 \cdot cos(0)+isen(0)}{\rho^{m}[cos(m\theta)+isen(m\theta)]}$$
$$= \frac{1}{\rho^{m}} \cdot cos(0 - m\theta) + isen(0 - m\theta)$$
$$= \rho^{-m} \cdot [cos(- m\theta) + isen(- m\theta)]$$
$$= \rho^{n} \cdot [cos(n\theta) + isen(n\theta)].$$

Comprovando assim, a veracidade da fórmula de Moivre.

3.1.3 Divisão

suponha que $Z_1 = \rho_1(cos(\theta_1) + isen(\theta_1))$, $Z_2 = \rho_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2)) \neq 0$, então:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

Prova:

Quando $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ é multiplicado por ρ_2, é igual a ρ_1. Pelo que já provamos na multiplicação, para fazer a multiplicação devemos multiplicar os módulos e somar os argumentos. deste modo ficaria $\left(\theta_1 - \theta_2\right) + \theta_2 = \theta_1$ e teríamos então:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right) \cdot Z_2$$
$$= \rho_1 \cdot \left(cos\left(\theta_1\right) + isen\left(\theta_1\right)\right) = Z_1$$

Daí, conseguimos provar que:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(cos(\theta_1 - \theta_2) + isen(\theta_1 - \theta_2)\right)$$

4. A geometria e os números complexos

Vimos que os elementos do $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{C}$ têm definições similares. Sendo assim, são pares ordenados (x, y), com x e y reais, e as propriedades da igualdade, da adição e da multiplicação por números reais, são inteiramente similares.

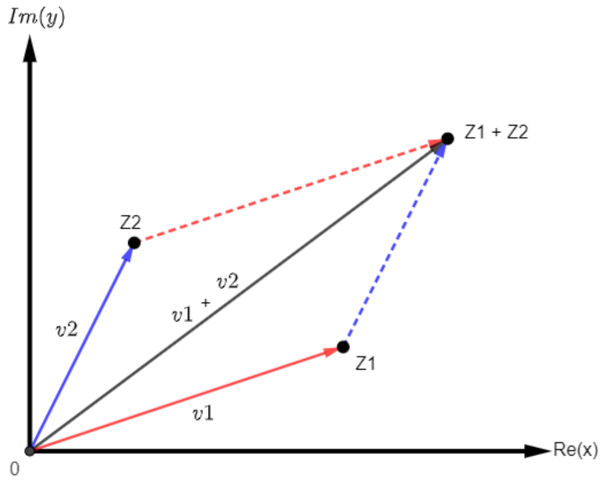
4.1. A geometria das operações algébricas com números complexos

Iremos fazer agora uma interpretação geométrica da adição, da subtração e da multiplicação de um número real por um número complexo no plano de Argand-Gauss.

4.1.1 Adição e Subtração

Considerando os números complexos $Z_1 = x_1 + iy_1$ e $Z_2 = x_2 + iy_2$, com $Z_1, Z_2 \neq 0$ e $Z_1 \neq Z_2$, e os vetores correspondentes **V**$_1$ $=x_1$**i**+ y_1***j*** e **V**$_2$ $=x_2$**i**+ y_2***j***, onde **i**= $(1, 0)$ e ***j*** $= (0, 1)$. Sendo que, a soma de $Z_1 + Z_2 = \left(x_1 + x_2\right) + \left(y_1 + y_2\right)i$, e a soma **V**$_1$+**V**$_2$= $\left(x_1 + x_2\right)$**i**+ $\left(y_1 + y_2\right)$***j*****.** Logo, a soma $Z_1 + Z_2$ corresponde a **V**$_1$+ **V**$_2$**.**

Imagem 2: Representação geométrica da soma de números complexos



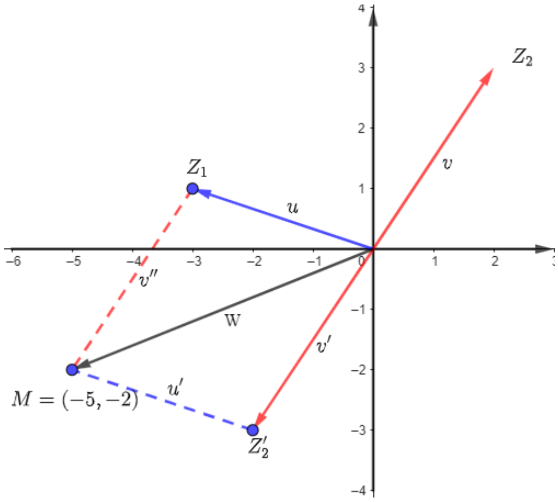
Fonte: Própria

De forma prática, a soma entre os vetores **V**$_1$+**V**$_2$ pode ser feita transferindo uma cópia do vetor **V**$_2$, chamada de **V**$_2$**'**, para o final do vetor **V**$_1$. Formando assim, um paralelogramo.

Essa interpolação, mostrada na figura 1, é conhecida como regra do paralelogramo e a subtração acontece de forma parecida.

Por exemplo, tendo que $(- 3 + i) - (2 + 3i) = (- 3 + i) + (- 2 - 3i) =- 5 - 2i$, consequentemente o lugar geométrico da diferença desses dois números complexos é o ponto M(-5;-2).

Imagem 3: Representação geométrica da subtração $(-\ 3\ +\ i) - (2\ +\ 3i)$



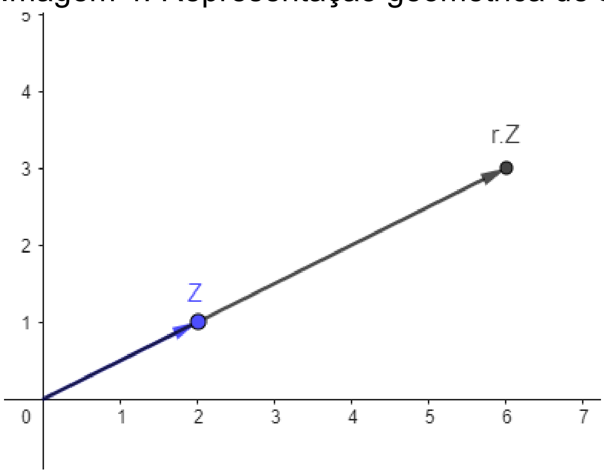
Fonte: Própria

4.1.2 Multiplicação de um Número Real por um Número Complexo

Considerando um número real $r \neq 0$ e um complexo $Z = (x, y) \neq 0$, tem-se que $r \cdot Z = (r \cdot x\ ,\ r \cdot y)$ tem a mesma direção do vetor Z, com módulo igual ao produto do módulo de r pelo módulo de Z e, se $r > 0$, ou seja, $0 < r$, seu sentido é contrário (mesmo sentido) do vetor Z.

Por exemplo, se $Z = (2 + i)$ e $r = 3$, então $3 \cdot Z = (6, 3)$.

Imagem 4: Representação geométrica de $3 \cdot Z = (6, 3)$



Fonte: Própria

Nesse caso, é notório que o vetor Z aumentou seu módulo 3 vezes.

4.2 Aplicando a geometria dos complexos em algumas transformações elementares

As translações, as homotetias, as rotações etc são algumas transformações com propriedades geométricas importantes, tanto teórica quanto prática, que podem ser realizadas no plano complexo.

As transformações do plano complexo são funções complexas de variável complexa, ou seja, são funções $f: S \rightarrow \mathbb{C}$, em que $S \subset \mathbb{C}$.

4.2.1 Translação

Seja um α fixo e $\alpha \in \mathbb{C}$, vamos definir a transformação $T_{\alpha}(Z) = Z + \alpha$ como translação por α.

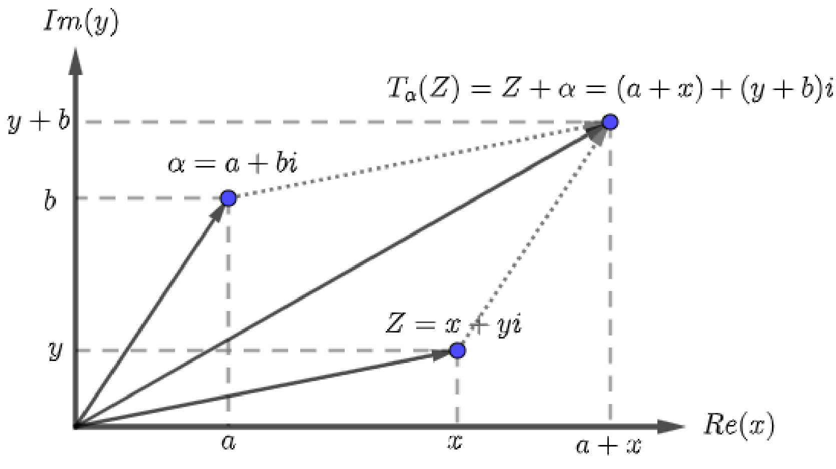
Podemos ver claramente que T_{α} tem domínio em $\mathbb{C}$ e que, para cada complexo w, existe um número Z tal que $w = T_{\alpha}(Z) = Z + \alpha$. Logo, $Z = w - \alpha$ e T_{α} é uma bijeção de $\mathbb{C}$ cuja inversa é $T_{-\alpha}$.

Dessa forma, tomando $Z = x + yi$, $\alpha = a + bi$ e $T_{\alpha}(Z) = u + vi$, pela igualdade de números complexos, temos que:

$$u + vi = Z + \alpha = (x + a) + (y + b)i \Leftrightarrow u = x + a \text{ e } v = y + b$$

Portanto, as coordenadas em $\mathbb{R}^2$ da transformação T_{α} de cada ponto (x, y) do plano é sua translação de (a, b).

Imagem 5 - Translação por $\alpha = a + bi$: $T_{\alpha}(Z) = Z + \alpha$



Fonte: Própria

4.2.2 Homotetia

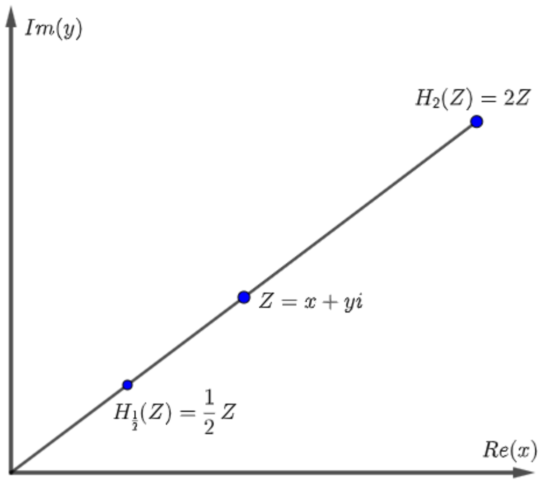
Seja $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$, definimos homotetia como a transformação do complexo por $H_k(Z) = kZ$.

Podemos perceber que o domínio de $H_k \subset \mathbb{C}$. Observe que para todo $v \in \mathbb{C}$ existe um único $Z \in \mathbb{C}$ tal que $v = kZ$. Para provar, basta tomar $Z = \frac{1}{k}v$. Logo, H_k é uma bijeção de $\mathbb{C}$, ou seja, é uma aplicação que, a todo elemento de um conjunto inicial, associa só e somente um elemento do conjunto dos complexos. E sua inversa é $H_{\frac{1}{k}}$.

Sendo $\left|H_k(Z)\right| = |kZ| = k|Z|$ e o $arg(H_k(Z)) = arg(kZ) = arg(Z)$, temos que a transformação de H_k é uma contratação do módulo de Z quando k está entre 0 e 1, e uma dilatação do módulo de Z quando k é maior que 1.

Na imagem a seguir, será ilustrado uma dilatação e uma contratação:

Imagem 6 - As homotetias $H_2(Z) = 2k$ e $H_{\frac{1}{2}}(Z) = \frac{1}{2}Z$



Fonte: Própria

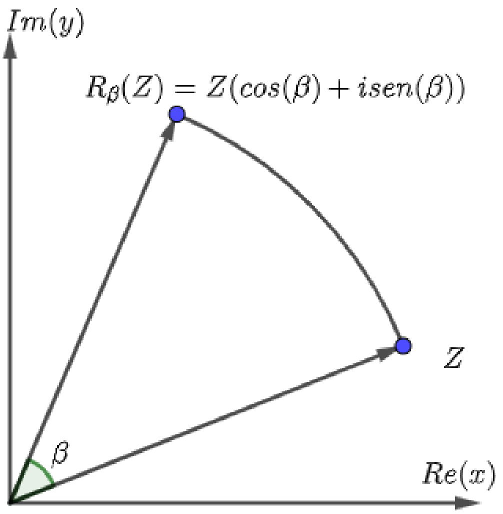
4.2.3 Rotação

Seja $\beta \in \mathbb{R}$ um ângulo dado em radianos, definimos rotação como sendo a transformação de $R_\beta(Z) = Z(cos(\beta) + isen(\beta))$.

Podemos observar que o domínio de $R_\beta = \mathbb{C}$ e para cada $u \in \mathbb{C}$, $Z = (cos(\beta) - isen(\beta))u$ é o único número complexo tal que $R_\beta = u$, temos que R_β é uma bijeção em $\mathbb{C}$ e sua inversa é $R_{-\beta}$.

A transformação de Z por R_{β}, é uma rotação em torno da origem de β do ponto Z pois $\left|R_{\beta}(Z)\right| = |(cos(\beta) + isen(\beta))| \cdot |Z| = |Z|$ e o $arg\left(R_{\beta}(Z)\right) = \beta + arg(z)$.

Imagem 7 - Rotação de β radianos: $R_{\beta}(Z) = Z(cos(\beta) + isen(\beta))$



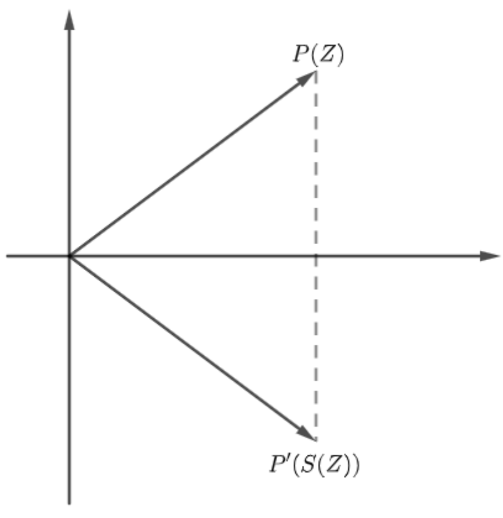
Fonte: Própria

4.2.4 Reflexão em relação ao eixo real

Definimos a reflexão em relação ao eixo real como sendo a transformação $S\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $S(Z) = \overline{Z}$. Se P é o ponto com coordenada Z, então o ponto $P' = S(Z) = \overline{Z}$ é obtido refletindo P através do eixo real.

Perceba que $S \circ S = S(S(Z)) = \overline{\overline{Z}} = Z$, ou seja, Z e $\overline{Z} = S(Z)$ são, de fato, simétricos em relação ao eixo real.

Imagem 8 - Reflexão de $P(Z)$ em relação ao eixo real



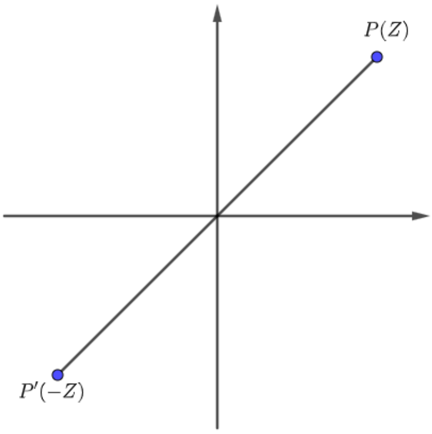
Fonte: Própria

4.2.5 Reflexão em relação ao ponto

Definimos a reflexão em relação a origem O como sendo a transformação $S_O: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $S_O(Z) = -Z$.

Fica evidente que a origem O é ponto médio do segmento PP', onde P é o ponto com coordenada Z e P' é o ponto com coordenada $-Z = S_O(Z)$, pois $S_O(Z) + Z = 0$. Daí, podemos afirmar que P' é a reflexão de P em relação ao ponto O.

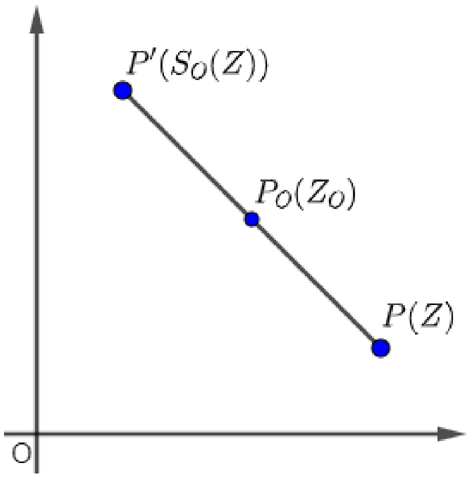
Imagem 9 - Reflexão de P(Z) em relação à origem



Fonte: Própria

De maneira geral, a transformação $S_{Z_O}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $S_{Z_O}(Z) = 2Z_O - Z$ é definida como sendo a reflexão em relação a Z_O, onde Z_O é um número complexo fixado. Sejam P_O, P e P' os pontos de coordenadas Z_O, Z e $S_O(Z)$. Perceba que $P_O = \frac{P+P'}{2}$, ou seja, P_O é o ponto médio do segmento PP', logo P' é a reflexão de P por P_O.

Imagem 10 - Reflexão de $P_O(Z_O)$



Fonte: Própria

Vale salientar que $S_{Z_O} \circ S_{Z_O} = S_{Z_O}\left(S_{Z_O}(Z)\right) = 2Z_O - \left(2Z_O - Z\right) = Z$, o que mostra que Z e $2Z_O - Z = S_{Z_O}(Z)$ são simétricos em relação a Z_O.

4.2.6 Transformações isométricas

Uma transformação $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é denominada isométrica se preserva distância, ou seja, para todo Z_1, $Z_2 \in \mathbb{C}$, $\left|f(Z_1) - f(Z_2)\right| = \left|Z_1 - Z_2\right|$.

Mostremos que as translações, reflexões (pelo eixo real ou por um ponto) e rotações em torno do centro O são isometrias no plano complexo.

Prova:

Para a translação T_α temos:

$$\left|T_\alpha(Z_1) - T_\alpha(Z_2)\right| = \left|Z_1 + \alpha - Z_2 - \alpha\right| = \left|Z_1 - Z_2\right|$$

Para a reflexão S pelo eixo real temos:

$$\left|S(Z_1) - S(Z_2)\right| = \left|\overline{Z_1} - \overline{Z_2}\right| = \left|\overline{Z_1 - Z_2}\right| = \left|Z_1 - Z_2\right|$$

e de modo análogo, mostra-se que o mesmo vale para a reflexão por um ponto .

Por fim, se R_β é uma rotação, então:

$\left|R_\beta(Z_1) - R_\beta(Z_2)\right| = \left|\left(Z_1 - Z_2\right) \cdot (cos(\beta) + isen(\beta))\right| = \left|Z_1 - Z_2\right| \cdot |cos(\beta) + isen(\beta)|$

Como $|cos(\beta) + isen(\beta)| = 1$, temos que $\left|R_\beta(Z_1) - R_\beta(Z_2)\right| = \left|Z_1 - Z_2\right|$.

Considerações Finais

A geometria dos números complexos é um tema pouco explorado em livros de matemática, artigos, etc. Na verdade, os números complexos são, de forma geral, um conteúdo bastante negligenciado nas nossas escolas e universidades. Uma possível explicação para tal fato é que, desde o ensino básico no Brasil, os números complexos não são abordados segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e também não são cobrados no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). O que se pretendeu nesse trabalho foi ofertar um material que sirva de apoio a estudantes ou professores que queiram adentrar nesse assunto, destacando que toda teoria aqui apresentada é conhecida e consta nas fontes mencionadas na bibliografia.

Então, o tema foi desenvolvido com a expectativa de incentivar e inspirar todos os interessados no estudo dos números complexos a complementar ou aprofundar os conhecimentos apresentados nessa pesquisa, pois a relação entre números complexos e geometria é bastante extensa, e aqui, obviamente, não foi esgotada.

Referências

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. Complex numbers from A to ... Z . Romania, Birkhaüser Boston: 2006

ANTONIO MARIA DEL FIORE. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Antonio_Maria_Del_Fiore&oldid=56872764>. Acesso em: 06 de setembro de 2022.

EULER, Leonhard. Pesquisa sobre Raízes Imaginárias de uma Equação. 1. ed. Natal: ISBN, 2021.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. São Paulo: Unicamp, 2011.

GAUSS, Carl Friedrich. Teoria dos Resíduos Quadráticos. 1831.

HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria Lúcia Torres. Polinômios e Equações Algébricas. Rio de Janeiro: SBM, p. 01 - 90 , 2012.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, p. 160 - 190, 1998.

LIMA, Elon Lages. Meu professor de matemática: e outras histórias. 4.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2004.

NEVES, Robson Coelho. Aplicação de Números Complexos em Geometria. Tese (Mestrado profissional) - Matemática, IMPA. Rio de Janeiro, p. 88. 2014.

Origem dos números complexos. Matemática Complexa, 2012. Disponível em: https://sites.google.com/site/matematicacomplexa/iniciodoprojeto/origem-dos-numeros-complexos. Acesso em: 06, setembro de 2022

POLCINO MILIES, Francisco César. História e histórias: a emergência dos números complexos. Revista do Professor de Matemática, n. 24, p. 5-15, 1993. Tradução. Acesso em: 06 set. 2022.

STANKOVA, Zvezdelina; RIKE, Tom. Uma década do círculo matemático de Berkeley: A experiência americana. 1.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.