INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco

A GEOMETRIA ESFÉRICA E O GLOBO TERRESTRE: INTERDISCIPLINARIDADE E POSSIBILIDADES DE ENSINO

Ariane Bernardo de Siqueira

abs4@discente.ifpe.edu.br

Erivaldo Ferreira de Morais Júnior

erivaldo.junior@caruaru.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho é um estudo descritivo feito a partir de uma pesquisa bibliográfica e tem como objetivo explorar a relação entre os principais conceitos da Geometria Esférica e do globo terrestre, contribuindo com o estudo e ensino da matemática de forma interdisciplinar. Para isso, apresentamos uma breve discussão sobre o surgimento das Geometrias não-Euclidianas com ênfase na Geometria Esférica, trouxemos os principais conceitos desta geometria e suas definições, bem como as principais características do globo terrestre, realizamos uma abordagem sobre a relação entre esses conceitos, no qual utilizamos o GeoGebra e o Google Earth como apoio tecnológico e, por fim, sugerimos uma proposta de atividade, na qual calculamos a distância entre dois pontos na superfície terrestre.

Palavras-chave: Geometria esférica. Globo terrestre. GeoGebra. Google Earth.

---

1 INTRODUÇÃO

Durante o ensino básico, nos deparamos com a Geometria Plana e a Geometria Espacial, estudamos suas figuras, fórmulas e aplicações e passamos a entender a sua importância para conhecermos e interpretarmos algumas situações que acontecem, seja em outras áreas do conhecimento como a Arte, por exemplo, ou até mesmo nas coisas simples do nosso cotidiano, como as formas das embalagens no supermercado, nas quais o formato mais comum é o de caixas retangulares, por exemplo. Essas geometrias compõem a Geometria Euclidiana que é baseada nos postulados de Euclides, porém existem outras geometrias que não tem como base esses postulados e, devido a isso, são chamadas de Geometrias não-Euclidianas.

Um exemplo da utilização das Geometrias não-Euclidianas se dá no clássico problema do urso que diz o seguinte: Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor é o urso?

Instituto Federal de Pernambuco. Campus Pesqueira. Curso de Licenciatura em Matemática.11 de fevereiro de 2022.

(ATHANASIO, 2019, pag.3 adaptado) É perceptível a dificuldade de resolver esse problema se pensarmos apenas na geometria sobre um plano, pois trata-se da Terra que é uma superfície semelhante a uma esfera, por isso é preciso utilizar a Geometria Esférica para chegar à solução deste problema.

Ainda assim, baseado nos currículos de matemática do ensino fundamental, médio e até superior, quando abordam conceitos geométricos, é possível perceber que não há um cuidado em tratar de temas relacionados às Geometrias não-Euclidianas, contudo sabemos da sua existência e da sua necessidade pois, assim como o problema do urso, existem muitos outros problemas que não podem ser resolvidos apenas com a geometria descrita por Euclides, como os problemas envolvendo a navegação, por exemplo. Portanto, por ser um tema pouco visto nas geometrias mais básicas e nos tópicos de geometria avançada, decidimos mostrar neste trabalho um pouco das Geometrias não-Euclidianas, em particular a Geometria Esférica, utilizando o GeoGebra e Google Earth para propor situações didáticas que o professor poderá utilizar para estudar Geometria não-Euclidiana.

Nesta perspectiva, os trabalhos de Uchôa (2018) e de Bittencourt Neto (2017) trarão embasamento acerca do surgimento das Geometrias não-Euclidianas, o primeiro ainda traz uma abordagem significativa sobre a *interface* e o uso do *software* GeoGebra, e o segundo uma apresentação dos principais conceitos da Geometria Esférica, o que também se pode observar no trabalho de Silva (2018), porém neste último se vê também algumas características do globo terrestre sobre o qual iremos abordar aqui. Para discutir sobre o uso do Google Earth nos espelharemos no trabalho de Silva (2019) e para relacionar a geometria esférica com o globo terrestre dialogaremos com os trabalhos de Athanasio (2019), de Santos (2016) e de Brito (2018).

Fundamentado nisso, buscaremos reunir informações com o intuito de responder a seguinte indagação: como podemos utilizar as características do globo terrestre para ensinar alguns conceitos de Geometria Esférica? Para isso, fizemos uma pesquisa bibliográfica a fim de embasar nosso estudo, destacando os pontos mais importantes a serem discutidos sobre a relação entre o globo terrestre e a Geometria Esférica. De acordo com Gil (2008), é possível classificar as pesquisas, com base em seus objetivos, em 3 grandes grupos, são eles: Descritivas, Explicativas[1] e Exploratórias[2]. A pesquisa descritiva é definida pelo objetivo de descrever as características de um fenômeno, portanto é a que mais assemelha-se com o nosso trabalho, já que buscamos elencar e descrever itens importantes da Geometria Esférica, bem como das coordenadas geográficas do globo terrestre.

Neste sentido, temos como objetivo explorar a relação entre os principais conceitos da Geometria Esférica e do globo terrestre, contribuindo com o estudo e ensino da matemática de forma interdisciplinar, partindo de um pequeno resgate histórico sobre o surgimento das Geometrias não-Euclidianas, em especial a Geometria Esférica, mostrando a contribuição do Google Earth e do GeoGebra no estudo e ensino dos conteúdos apresentados e por fim, a construção de uma proposta

---

[1]Explicativas têm como preocupação central identificar os fatores que determinam ou que contribuem para a ocorrência dos fenômenos.

[2]Exploratórias têm como principal finalidade desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias, tendo em vista a formulação de problemas mais precisos ou hipóteses pesquisáveis para estudos posteriores.

de atividade que busca, com a ajuda destes *softwares*, facilitar a interpretação de algumas questões acerca do conteúdo “Geometria Esférica”.

2 GEOMETRIA ESFÉRICA

No problema do urso mencionado anteriormente, citamos que o urso andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Isso não é possível na geometria clássica de Euclides, porém nas Geometrias não-Euclidianas isso pode acontecer. Um caso em que isso é possível seria na geometria esférica.

2.1 Surgimento das Geometrias não-Euclidianas

Euclides de Alexandria, também conhecido como o Pai da Geometria, foi o responsável pela sistematização e difusão dos conteúdos que fazem parte do campo da matemática que até hoje o homenageia carregando o título “Geometria Euclidiana”. Euclides viveu por volta dos anos 300 a.c., foi professor, matemático e escritor e trouxe inúmeras contribuições para a matemática, principalmente com a sua obra mais conhecida, o livro “Os Elementos” que até hoje é vendido e estudado.

Contendo 13 volumes, "Os Elementos” carregam 465 proposições que abordam não apenas geometria, mas também álgebra e aritmética. Os livros são divididos da seguinte maneira:

1º Livro – Fundamentos da Geometria Plana;

2º Livro – Álgebra Geométrica;

3º Livro – Teoria da Circunferência;

4º Livro – Figuras Inscrita e Circunscrita;

5º Livro – Teoria das proposições de Eudoxo (Abstrata);

6º Livro – Figuras Semelhança e Proporcionais;

7º Livro – Teoria dos Números;

8º Livro – Continuação de proposições e Teoria dos Números.

9º Livro – Teoria dos Números;

10º Livro – Incomensurabilidade;

11º Livro – Geometria dos Sólidos;

12º Livro – Medição de Figuras;

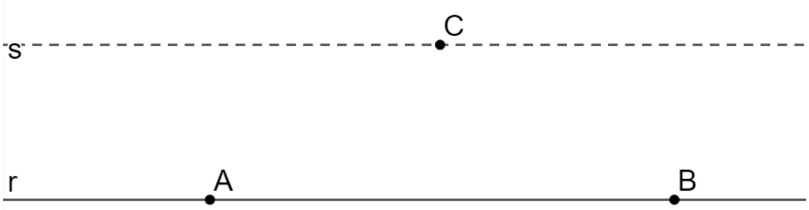
13º Livro – Sólidos Regulares.

O V postulado do 1° livro da obra “Os Elementos” é o mais conhecido, pois segundo Uchôa (2018), desde o seu surgimento, foi objeto de muita descrença e dúvidas dos matemáticos, que, por vários séculos, acreditavam que o V Postulado poderia ser demonstrado por meio dos outros 4. Esse postulado também é conhecido como “axioma das paralelas” e foi a partir dele que surgiram outras geometrias.

Segundo Bittencourt Neto (2017), John Playfair, professor da Universidade de Edimburgo, em 1795, chegou à substituto do quinto Postulado (figura 1), a mais famosa e mais simples de compreender. A seguir apresentamos tal equivalência:

Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à reta dada.

Figura 1 – Substituto do Quinto postulado



Fonte: Autores

Após a descrença e diversas tentativas de demonstração e até mesmo a negação desse postulado, ainda de acordo com Bittencourt Neto (2017), os matemáticos Carl Friedrich Gauss, Janos Bolyai, Nicolai Ivanovitch Lobachevsky e Georg Friedrich Bernhard Riemann desenvolveram trabalhos que deram início aos estudos sobre as Geometrias não-Euclidianas, sendo Riemann o precursor da Geometria Elíptica, a qual possui como modelo mais simples, a Geometria Esférica.

2.2 Principais conceitos da Geometria Esférica

A Geometria Esférica é o modelo mais simples da Geometria Elíptica, na qual dada uma reta r e um ponto P fora de r, não existe reta que seja paralela a r e passe pelo ponto P. Com isso, a Geometria Esférica não satisfaz o V postulado de Euclides, portanto, faz parte das Geometrias Não-Euclidianas.

Com base nos trabalhos de Bittencourt Neto (2017) e de Silva (2018), traremos alguns conceitos importantes dessa geometria, bem como suas definições.

- **Esfera:** é o conjunto dos pontos do espaço que possuem distância igual ou menor a um mesmo ponto, denominado centro da esfera.

- **Superfície Esférica:** o conjunto de pontos do espaço no qual a distância do centro é igual ao raio, ou seja, é apenas a “casca” da esfera.

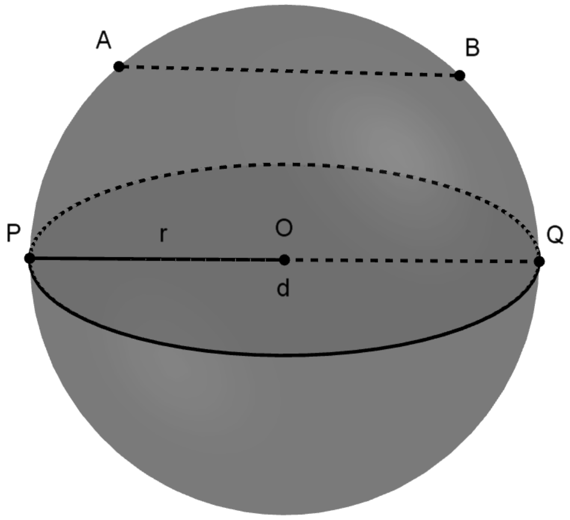
- **Raio:** a distância entre o centro e qualquer ponto da superfície esférica.

- **Corda:** o segmento que une dois pontos distintos da superfície esférica.

- **Diâmetro:** uma corda que possui em suas extremidades dois pontos opostos da superfície esférica, passando pelo centro da esfera, na qual seu comprimento é o dobro do raio.

O raio, a corda e o diâmetro podem ser observados na figura 2.

Figura 2 - Elementos da geometria esférica



Fonte: Autores

- **Posição dos Planos em relação a superfície esférica:** um plano é denominado de Plano Tangente quando ele possui apenas um ponto em comum com a superfície esférica. Este ponto é chamado de ponto de tangência. Caso possua mais de um ponto em comum, chamamos de Plano Secante. Em um plano secante à esfera, a intersecção entre esse plano e a superfície esférica será sempre um circulo.

- **Círculo Máximo:** quando um plano faz uma secção em uma esfera, esse plano é denominado de plano secante. Se o plano secante passa pelo centro da esfera, o círculo formado pela secção é chamado de círculo máximo. Os círculos máximos da Geometria Esférica equivalem às retas da Geometria Euclidiana.

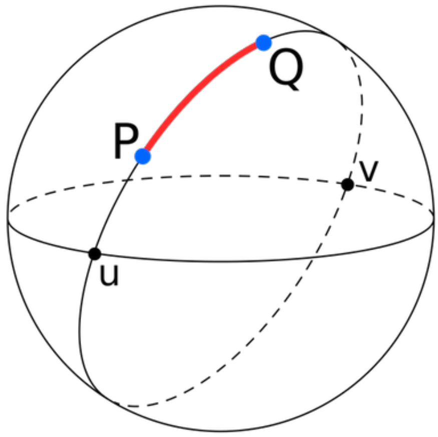
- **Arcos:** dois pontos distintos de uma superfície esférica dividem o círculo máximo, que contem esses pontos, em duas partes denominadas “arcos”.

- **Fuso:** é chamada de fuso a região compreendida entre dois círculos máximos.

- **Pontos Antípodas:** quando dois pontos são opostos pelo diâmetro, esses pontos são chamados de pontos antípodas.

- **Geodésica:** a distância entre dois pontos na Geometria Esférica é dada pelo comprimento da menor curva, contida na superfície esférica, que liga esses dois pontos. Essa curva é chamada de geodésica e corresponde ao menor dos dois arcos da circunferência máxima que passa por estes pontos. A Figura 3 representa uma geodésica.

Figura 3 - Geodésica



Fonte: Wikipedia (2022)

- **Ângulo Esférico:** o ângulo formado por dois círculos máximos é o ângulo formado na interseção das retas tangentes a esses círculos. Esse ângulo é denominado de ângulo esférico.

- **Triângulo Esférico:** a figura geométrica formada por arcos de círculo máximo determinados por 3 pontos distintos de uma esfera, que não pertencem ao mesmo círculo, dois a dois, é chamada de triângulo esférico.

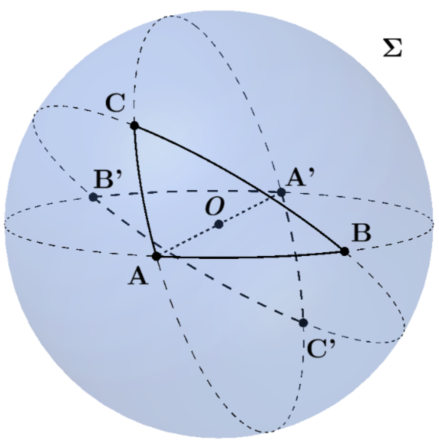
- **Teorema de Girard:** considere um triângulo esférico sobre uma esfera de raio R e $\propto$, β e γ seus ângulos internos, medidos em radianos. Então:

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + AR^2$$

onde A é a área do triângulo esférico.

Este teorema garante que, em um triângulo na Geometria Esférica, a soma dos seus ângulos internos é maior que 180°, e com isso, diferenciando-os dos triângulos da Geometria Euclidiana nos quais a soma dos ângulos internos é igual a 180º. (Figura 4)

Figura 4 - Teorema de Girard



Fonte: BRITO (2018)

3 GEOMETRIA ESFÉRICA E O GLOBO TERRESTRE

O filósofo Aristóteles foi um dos precursores da ideia de que a Terra possui formato esférico. Ele justificava a sua teoria na maneira como avistava os barcos de longe no horizonte. Primeiro se via o corpo do barco desaparecendo e só depois o seu mastro, evidenciando assim a curva da superfície do oceano. (BRITO, 2017)

Mas, para muitas pessoas, a Terra ter o formato de uma esfera era inaceitável, principalmente para os mais religiosos da época que acreditavam que a Terra era plana. Foi quando, no século XVII, Newton afirmou que a Terra era achatada devido ao seu movimento de rotação. Portanto, o formato da Terra seria de fato, uma elipsoide.

Porém, de acordo com Brito (2017), vários pesquisadores buscaram definir o quanto esta elipsoide se aproxima da forma esférica e o valor que os difere foi bem pequeno. Assim, estabelecendo uma relação interdisciplinar, Athanásio (2019, p.28) diz que “Ainda que hoje há quem questione esse fato, a geografia e a matemática não possuem dúvidas de que a única verdade sobre o planeta é de que ele possui um formato muito similar ao de uma esfera”. Portanto, por fins didáticos, podemos considerar a Terra uma esfera e usar o globo terrestre como sua principal representação. E, a partir disso, podemos utilizá-lo para ensinar conceitos de geometria esférica.

3.1 Principais elementos do globo terrestre

Com base no trabalho de Silva (2018) apresentaremos alguns dos elementos mais importantes do globo terrestre.

- **Eixo da Terra:** é a linha na qual a Terra faz seu movimento de rotação, de oeste(W) para leste(E). O diâmetro que liga os dois polos, Norte e Sul pode ser usado como representação para esse Eixo.

- **Polos:** são os pontos onde o eixo de rotação da Terra intercepta a superfície do planeta. Polo Norte é o que se situa na direção da Estrela Polar (a Ursa Menor), enquanto que o Polo Sul é o oposto. Na geometria esférica, os polos podem ser representados pelos pontos antípodas.

- **Equador:** é a circunferência máxima resultante da interseção de um plano, perpendicular ao eixo da Terra e que contém seu centro, com a superfície da Terra. A Linha do Equador divide a terra em dois hemisférios, o Hemisfério Norte e o Hemisfério Sul e corresponde ao círculo máximo da geometria esférica.

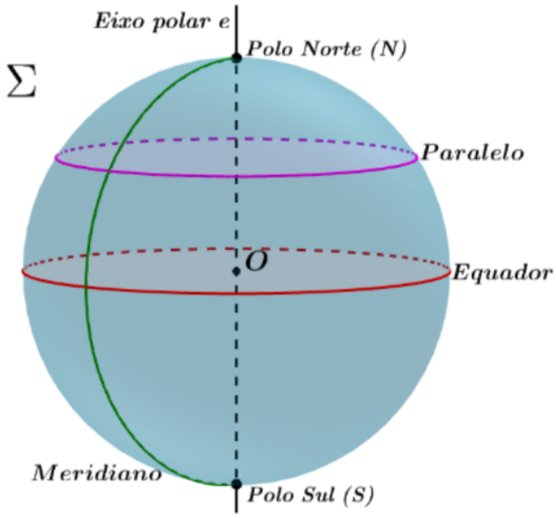
- **Paralelos:** são círculos traçados de forma paralela à linha do Equador, porém de menor comprimento. Os paralelos são responsáveis pelas medidas, em graus, das latitudes.

- **Meridianos:** são semicircunferências que ligam os Polos Norte e Sul e são utilizados para medir as longitudes. O Meridiano de Greenwich é o mais conhecido dos meridianos e possui longitude igual a 0º. Ele divide a Terra no sentido vertical, dando origem ao hemisfério leste e o hemisfério oeste.

Observação: A linha internacional da data, linha imaginária no Oceano Pacifico, é conhecida como antimeridiano de Greenwich, e aqui podemos dizer que é o seu complemento, para que juntos formem um círculo máximo.

Os elementos anteriores estão representados na figura 5.

Figura 5 - Elementos do globo terrestre



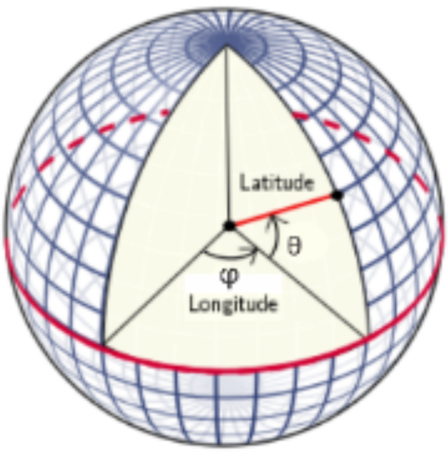
Fonte: BRITO (2018)

- **Latitude:** é a distância ao Equador medida ao longo do meridiano de Greenwich. Esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0º e 90º para Norte(N) ou para Sul(S).

- **Longitude:** é a distância ao meridiano de Greenwich medida ao longo do Equador. Esta distância mede-se em graus, podendo variar entre 0º e 180º para Leste(E) ou para Oeste(W).

A figura 6 mostra como a latitude e a longitude podem ser obtidas.

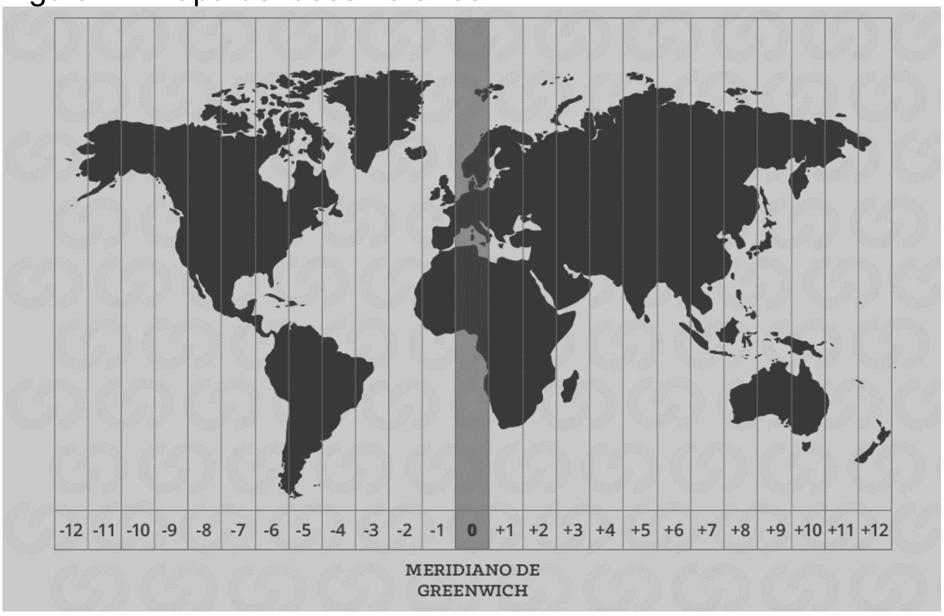
Figura 6 - Latitude e longitude



Fonte: SILVA (2018)

- **Fusos horários:** o planeta Terra tem um formato considerado esférico e, portanto, possui 360° de circunferência. Como sabemos, o dia tem 24 horas, então a cada hora a Terra gira 15º e cada um desses intervalos de 15º graus é chamado de fuso horário. (Figura 7)

Figura 7 - Mapa de fusos horários



Fonte: COC (2022)

3.1.1 O problema do urso

Conhecendo agora as propriedades do globo terrestre, bem como da geometria esférica, e considerando a Terra como uma esfera perfeita, podemos então solucionar o problema do urso apresentado anteriormente, que dizia: Partindo de um certo ponto da Terra, um caçador andou 10 quilômetros para o sul, 10 quilômetros para o leste e 10 quilômetros para o norte, voltando ao ponto de partida. Ali encontrou um urso. De que cor é o urso?

Resolução: Primeiro é importante entender que o caçador faz 3 percursos, para o sul, para o leste e para o norte, e, portanto, percorre por dois meridianos diferentes, mas ainda assim volta ao seu ponto de partida.

Para que isso possa acontecer, os meridianos precisam se intersectar, e por isso o ponto inicial (que também é o ponto de chegada) só pode ser um dos polos, norte ou sul. Sabendo disso, podemos nos atentar ao fato de que a sua primeira caminhada é para o sul, e o polo norte é o único dentre os dois polos que possui ursos, logo fica evidente que o ponto de partida é o Polo norte.

O caçador andou para o sul por um meridiano, andou para o leste por um paralelo e retornou por outro meridiano chegando ao ponto de partida, o polo norte (Figura 8). E de que cor são os ursos no polo norte? Brancos. Logo a resposta para esse clássico problema é que o urso é branco.

Figura 8 – Trajeto do caçador

Fonte: Atractor (2012)

3.2 Calculando distâncias na Geometria Esférica

Abordaremos, agora, sobre como podemos calcular a distância entre dois pontos distintos na superfície terrestre a partir das coordenadas geográficas desses pontos. É imprescindível dizer que todos os cálculos foram feitos considerando a Terra como uma esfera perfeita e, portanto os resultados retratam uma aproximação da realidade. Porém, a preocupação aqui é mostrar que podemos utilizar os conceitos relacionados ao globo terrestre para ensinar Geometria Esférica.

3.2.1 Coordenadas Cartesianas e Coordenadas Geográficas

Assim como já foi visto, a superfície terrestre conta com a marcação imaginária de círculos máximos como os meridianos, o Equador e outros círculos paralelos a ele. Para se localizar nessa superfície é necessário que, a partir do meridiano de Greenwich, se obtenha coordenadas. Essas coordenadas são dadas pela latitude, a partir da medida angular que varia de 0º a 90º, e pela longitude que também pode ser medida em graus e varia de 0º a 180º. Como a longitude está relacionada ao movimento de rotação da terra, também é comum que seja medida em horas.

A partir das coordenadas geográficas de um determinado ponto, podemos encontrar as coordenadas cartesianas desse ponto. Esse processo é fundamental para que seja calculada a distância entre dois pontos específicos na superfície esférica e terrestre, como por exemplo, a distância entre duas cidades.

Portanto, de acordo com Silva (2018), após encontrar a latitude e a longitude de um determinado ponto no globo terrestre, as coordenadas cartesianas podem ser obtidas por:

$$x = r \cdot \cos\theta \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \cos\theta \cdot \ sen\ \varphi$$

$z = r \cdot sen\ \theta$

Onde θ é o valor da latitude em graus, φ o valor da longitude, também em graus, e *r* o raio da esfera que vale $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Como foi visto anteriormente, a menor distância entre dois pontos na geometria esférica é um arco conhecido como geodésica. Se o ângulo α desse arco for conhecido, pode-se calcular a distância a partir da fórmula de comprimento de arco dada abaixo:

$$\frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi \cdot r$$

3.2.2 Trigonometria Esférica

De acordo com Santos (2016), uma outra maneira de calcular distâncias na superfície esférica é por meio da trigonometria esférica. Ela difere da trigonometria plana porque considera os espaços curvos que surgem no cálculo da distância entre dois pontos, por exemplo. Essa distância é dada pela medida do menor arco que une esses pontos. No caso do planeta Terra, a posição de dois pontos distintos na superfície terrestre é dada pelas coordenadas geográficas, que como já visto anteriormente, são determinadas pela latitude e pela longitude.

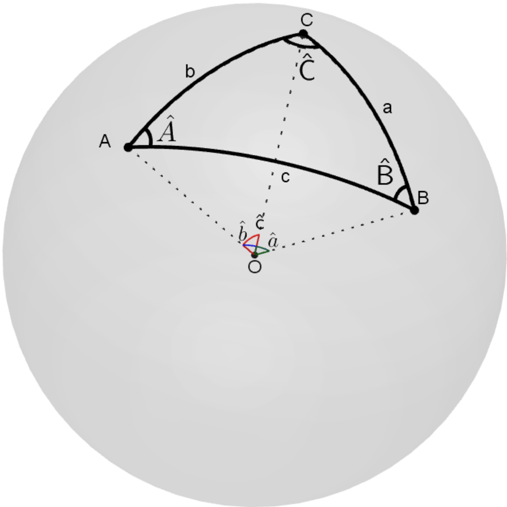
Os triângulos esféricos são a base da trigonometria esférica e, segundo Santos (2016), possuem as seguintes propriedades:

- A soma da medida de dois lados quaisquer é maior que a medida do terceiro lado.
- A soma de seus lados é menor que 2 π rad.
- Dois lados iguais resultam em ângulos opostos iguais e vice versa.
- Dois lados desiguais resultam em ângulos opostos desiguais sendo que o maior ângulo ficará oposto ao maior lado e vice versa.
- Sendo x a soma dos seus ângulos internos então $180° < x < 540°$.

Ainda de acordo com Santos (2016), para calcular a distância entre dois pontos com a trigonometria esférica, é necessário que se utilize a Fórmula Fundamental, que é especifica para os triângulos esféricos, e que também pode ser chamada de Fórmula dos Quatro Elementos.

Fórmula Fundamental: Seja ABC um triangulo esférico, com ângulos internos A, B e C e com lados a, b e c, de acordo com a figura 9.

Figura 9 - Triângulo esférico



Fonte: Autores

Dessa forma, temos que:

- Lei dos Senos:

$$\frac{sen\ (a)}{sen\ (A)} = \frac{sen\ (b)}{sen\ (B)} = \frac{sen\ (c)}{sen\ (C)}$$

- Lei dos Cossenos:

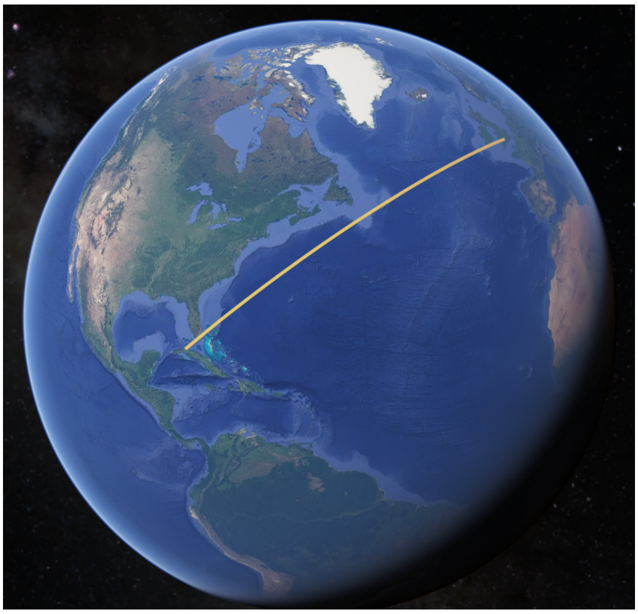
$$\cos(a) = \cos(c) \cdot \cos(b) + sen(b)\ sen(c) \cdot \cos\ (A)$$
$$\cos(b) = \cos(a) \cdot \cos(c) + sen(a)\ sen(b) \cdot \cos\ (B)$$
$$\cos(c) = \cos(a) \cdot \cos(b) + sen(a)\ sen(b) \cdot \cos\ (C)$$

Para determinar a distância entre dois pontos na superfície esférica, nesse trabalho, usaremos a Lei dos Cossenos.

Exemplo: Havana, a capital de Cuba, possui 23° 06' 46'' N de latitude e a longitude igual a 82° 22' 11'' W. Já a cidade de Bath, no Reino Unido, possui as seguintes coordenadas: Latitude: 51° 22' 48'' N e Longitude: 2° 21' 30'' W. Sabendo disso, calcule a distância entre essas duas cidades.

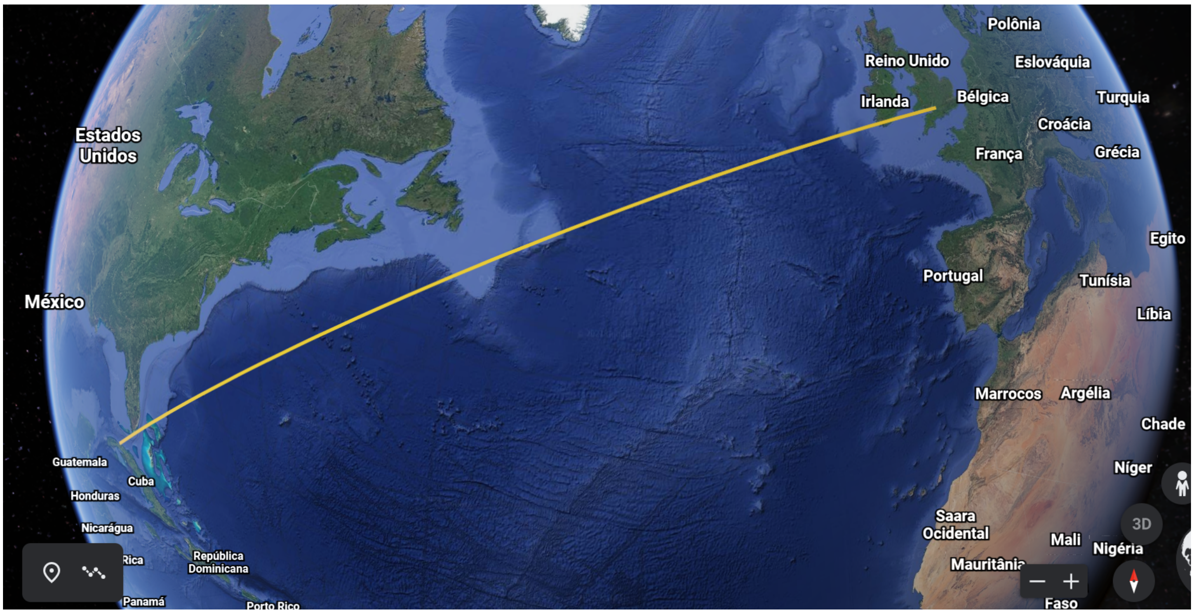
Dados: As figuras 10 e 11 mostram o caminho entre essas duas cidades em perspectivas diferentes.

Figura 10 – Caminho de Havana a Bath no Gooogle Earth



Fonte: Google Earth (2022)

Figura 11 – Caminho de Havana a Bath no Google Earth aproximado

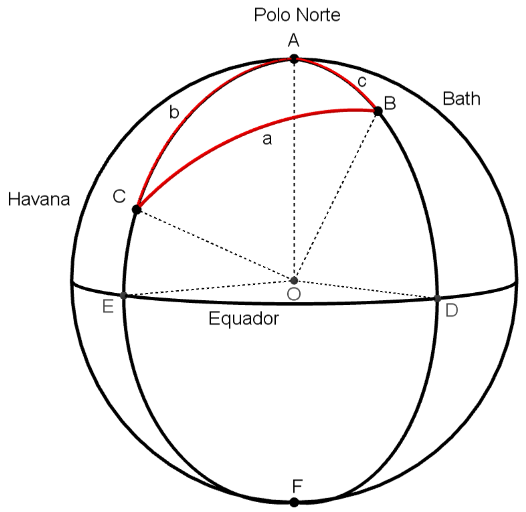


Fonte: Google Earth (2022)

Resolução:

Para começar a resolver, é necessário entender como essa distância se comporta em termos gráficos. Por isso, no GeoGebra construímos a figura 12.

Figura 12 – Representação do exemplo no GeoGebra



Fonte: Autores

A partir da imagem construída no GeoGebra, podemos perceber que os pontos C e B correspondem as cidades de Havana e Bath, respectivamente, e suas coordenadas, de acordo com o enunciado, são:

Havana: 23° 06’ 46’’ N de latitude e 82° 22’ 11’’ W de longitude.

Bath: 51° 22’ 48’’ N de latitude e 2° 21’ 30’’ W de longitude.

Além disso, o b pode ser encontrado pela diferença entre 90° e a latitude do ponto C (Havana), resultando na seguinte coordenada: 66° 53’ 14’’.

Analogamente, o c pode ser encontrado pela diferença entre 90° e a latitude do ponto B (Bath) que resulta em: 38° 37’ 12’’.

Já o A é definido a partir da diferença entre as longitudes, resultando em: 80° 0’ 41’’.

De posse dessas informações, utilizaremos a Lei dos Cossenos, definida por:

$$cos\ (a) = \cos(c) \cdot \cos(b) + sen\ (b) \cdot sen\ (c) \cdot \cos(A)$$

A partir disso, substituíremos na fórmula os valores encontrados acima e efetuaremos os cálculos.

$$cos\ (a) = \cos(38°\ 37'12'') \cdot \cos(66°\ 53'14'') + sen\ (66\ °\ 53'14'') \cdot sen(38°37'12'') \cdot \cos\ (80°\ 0'41'')$$

$$cos\ (a) = 0{,}78 \cdot 0{,}4 + 0{,}92 \cdot 0{,}62 \cdot 0{,}2$$

$$cos\ (a) = 0{,}43$$

$$a = \arccos(0{,}43) = 64{,}53°$$

De acordo com Santos (2016), como 1° equivale a 111,17 km na superfície terrestre, então multiplicamos o valor encontrado por 111,17.

$64{,}53 \cdot 111{,}17 = 7174$

O valor encontrado corresponde a distância entre os dois pontos que foram dados no enunciado, no caso as duas cidades. Portanto, a partir dos nossos cálculos, a distância de Havana até Bath é de 7174 km.

É importante lembrar que os valores utilizados nos cálculos foram arredondados e, portanto, o valor encontrado para a distância é aproximado.

4 GEOGEBRA E GOOGLE EARTH

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento que rege a educação básica no país, traz em uma das suas competências gerais a seguinte afirmativa:

> Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva. (BRASIL, 2018).

Com base nisso, apresentaremos dois *softwares* que podem contribuir com o estudo e ensino de muitos conteúdos matemáticos, incluindo Geometria Esférica.

4.1 GeoGebra

O GeoGebra é um *software* de matemática interativa que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino reunindo geometria, álgebra, cálculo, gráficos e estatística e permite que o professor e o aluno possam visualizar a matemática de maneira mais dinâmica. Esse *software* foi criado por Markus Hohenwarter, juntamente com uma equipe de programadores, em 2001 na Universidade de Salzburg. Desde então o seu objetivo é descomplicar o ensino e a aprendizagem de matemática.

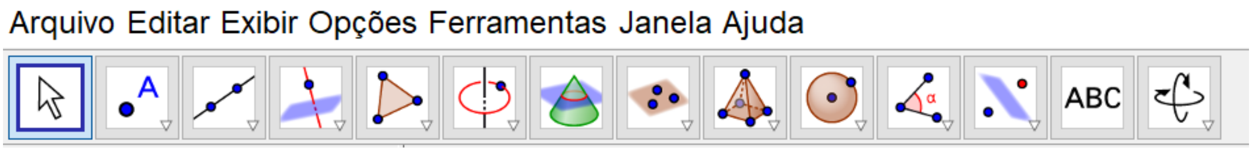
> Há inúmeras vantagens que agrega o fato do aplicativo GeoGebra enriquecer e dinamizar as aulas de geometria. Principalmente, dentre eles o seu formato bem didático e de aplicabilidade nas construções de estruturas gráficas, quando, a partir de uma função, reconhecer a sua forma gráfica, sólidos geométricos, polígonos, medir ângulos, segmentos de retas, enfim, existe um acervo de recursos a seu favor que, na necessidade de uma aula diferente nos moldes de uma metodologia virtual, dinâmica e que tem a capacidade de trazer o aluno para o campo visual e compreender a logística do que tá sendo proposto. Se é o estudo de uma função do 1º ou 2º grau, se é uma função trigonométrica, enfim, basta programar uma boa aula e o GeoGebra é hoje um instrumento de uma riqueza incomensurável. (UCHÔA, 2018, p.33).

O GeoGebra pode ser utilizado nos equipamentos tecnológicos mais conhecidos atualmente como computador, notebook, tabletes, celulares e funciona basicamente como uma prancheta de desenho, onde podem ser feitas diversas construções como retas, pontos, polígonos, funções e também cálculos como o de área, por exemplo.

4.1.1 Interface do GeoGebra

O *software* apresenta uma Barra de Menu, que possui alguns itens, como Arquivo, Editar, Exibir, Opções, Ferramentas, Janela e Ajuda. A barra de ferramentas tem cerca de 14 janelas e cada uma delas ainda traz subdivisões que permitem utilizar muitos outros recursos. Esses recursos possibilitam construções algébricas, geométricas, na área de estatística, aritmética, entre outras (UCHÔA, 2018).

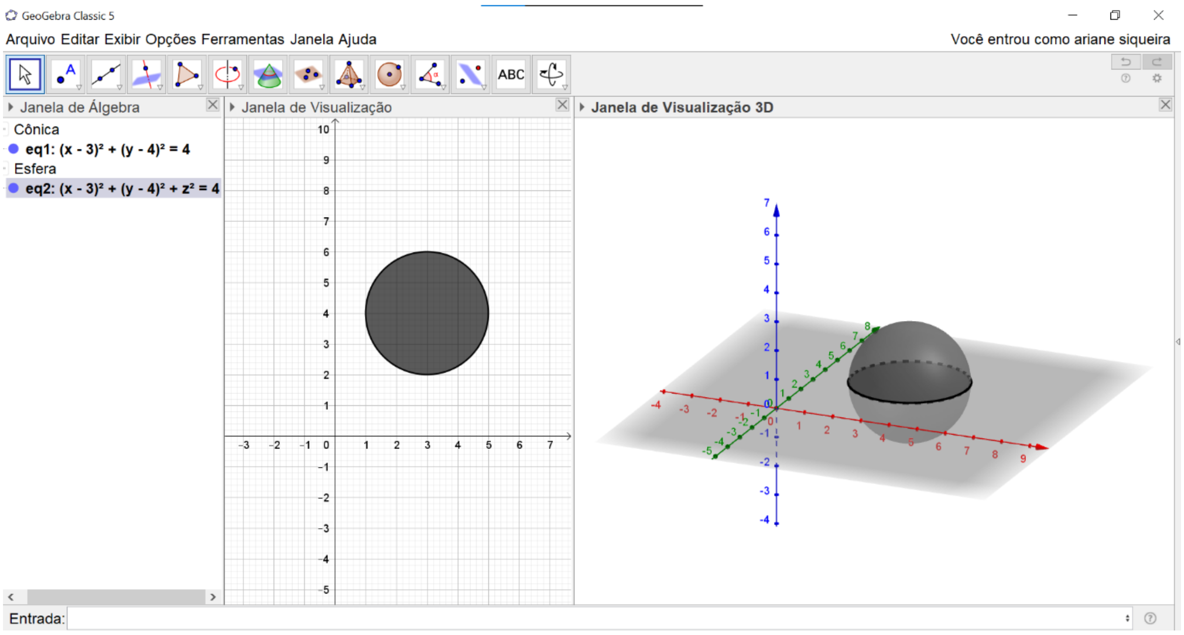
Figura 13 - Barra de menu e barra de ferramentas da janela 3D



Fonte: Autores

O GeoGebra conta com algumas janelas de visualizações, como a janela de álgebra, a janela CAS, a visualização em 2D e a visualização em 3D, que podem ser utilizadas de maneira simultânea, facilitando, assim, as percepções e possibilitando as múltiplas abordagens acerca do tema estudado. Nesse trabalho, por se tratar da Geometria Esférica, utilizaremos principalmente a Janela de visualização 3D e, consequentemente a barra de ferramentas dessa janela. Na figura 14 pode-se ver um exemplo de visualização de uma esfera no GeoGebra.

Figura 14 - Janela de visualização e janela de visualização 3D do GeoGebra



Fonte: Autores

4.2 Google Earth

De acordo com Silva (2019, p.35) o Google Earth é:

> Um aplicativo de mapas em três dimensões mantido, desenvolvido e distribuído pela empresa Google que tem como principal função apresentar um modelo tridimensional do globo terrestre. Ele funciona como um tipo de navegador com o qual se pode observar todo o planeta. É constituído por um mosaico de imagens de satélites e deste modo é possível usá-lo como um mero gerador de imagens de satélites e mapas bidimensionais ou ainda como um simulador de diferentes paisagens do planeta.

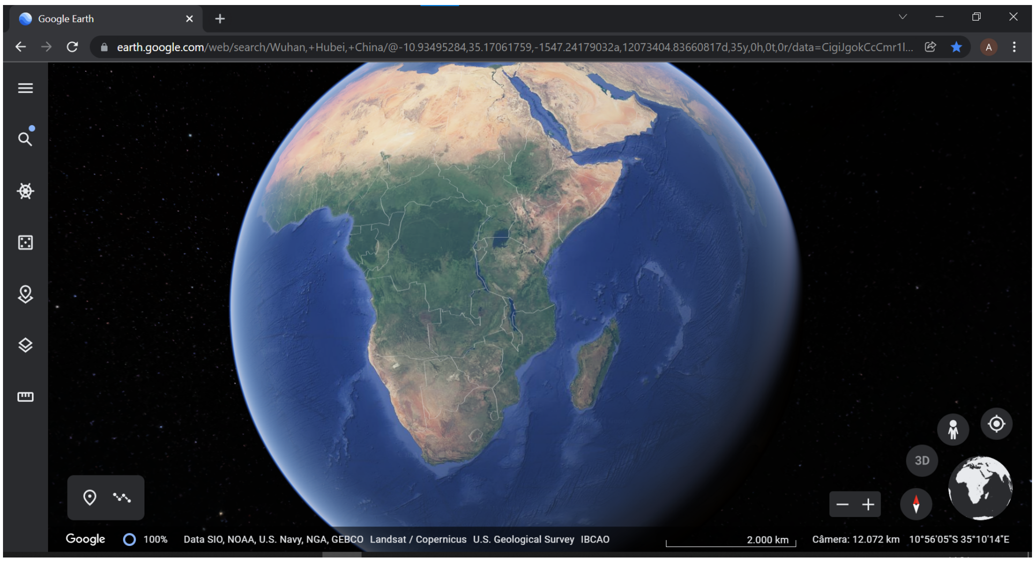
O Google Earth oferece muitos recursos, como, por exemplo, visualizar cidades, países e alguns elementos do globo terrestre. Além disso também é possível simular uma caminhada pelas ruas de qualquer lugar da sua escolha e, com isso, observar até mesmo as construções e paisagens desse lugar. Diante disso, é inegável que esse *software* pode contribuir para diversas áreas do conhecimento, inclusive a matemática.

4.2.1 Visualizando o Google Earth

A versão utilizada para esse trabalho foi a versão online. Porém, há versões para download que podem ser instaladas no computador, tanto no Windows, como no macOS ou Linux, ou em outros meios eletrônicos, estas outras versões possuem uma maior quantidade de opções em relação a versão online. A versão do Google Earth usada online é bem simples, de fácil utilização e suficiente para esse trabalho.

Algumas das funções ficam na parte esquerda na lateral da tela (figura 15), são elas: A lupa que serve como busca para os lugares específicos, viajante, onde você pode escolher entre algumas opções como por exemplo, a caminhada pelas ruas de um determinado lugar, a opção "estou com sorte" onde te mostra lugares interessantes e curiosos, projetos, que é onde ficam as informações salvas, estilo do mapa, onde é possível escolher entre os estilos disponíveis e, por último, a opção de medir distância e área. Ainda na parte esquerda, no inferior da tela, tem a opção de marcador e a opção de construir um caminho. Essa última utilizaremos posteriormente nesse trabalho.

Figura 15 - Página inicial do Google Earth online



Fonte: Google Earth (2022)

5 PROPOSTA DE ATIVIDADE

Por se tratar de uma pesquisa descritiva, buscamos expor algumas características da Geometria Esférica traçando um paralelo com o globo terrestre. Neste sentido, estamos propondo uma atividade que busca calcular a distância entre duas cidades na superfície da Terra.

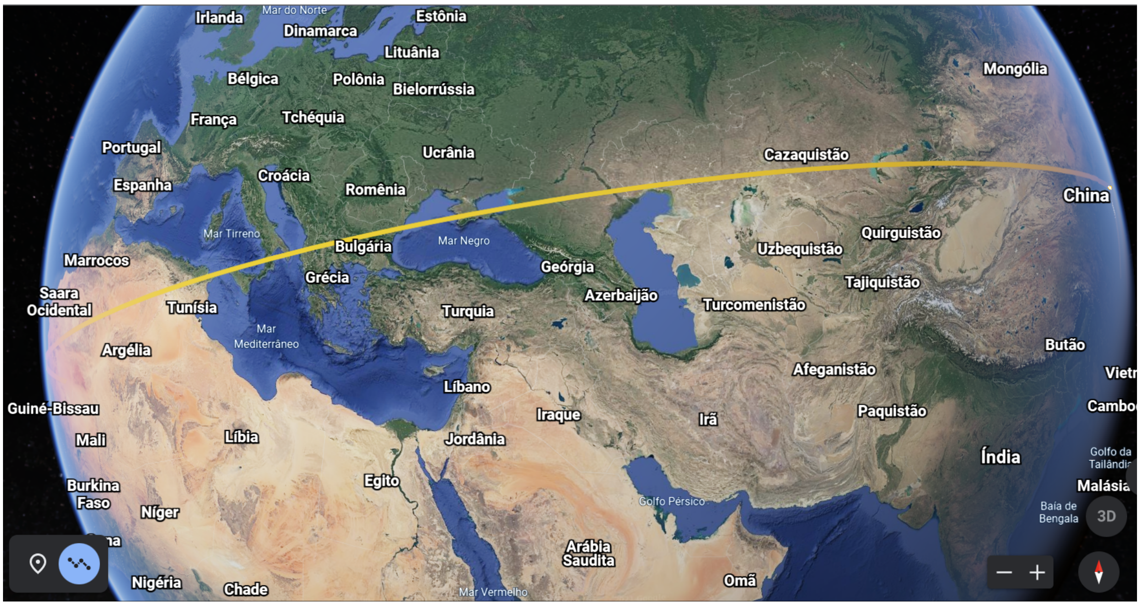
Questão: Logo no começo da pandemia de COVID-19, por volta de fevereiro de 2020, cerca de 34 pessoas, brasileiros e seus parentes, se encontravam em Wuhan, cidade da China que até então era o epicentro do surto de casos de pessoas infectadas com o coronavírus. Com isso, duas aeronaves da Força Aérea Brasileira foram designadas para irem até Wuhan buscar essas pessoas afim de que voltassem e cumprissem quarentena em solo brasileiro. Sabendo que essas aeronaves decolaram de Brasília, Distrito Federal, que possui coordenadas geográficas 15° 47' 50'' N – 47° 53' 30'' W, e seu destino, como já foi dito, foi Wuhan que tem 30° 35' 35'' N de latitude e 114° 18' 18'' W de longitude e, supondo que as aeronaves posteriormente retornem para o seu ponto de partida, calcule a distância aproximada percorrida pelas aeronaves nessa busca.

Dados: A figura 16 e a 17 mostram o caminho entre Brasília e Wuhan, em perspectivas diferentes, no Google Earth.

Figura 16 – Caminho de Brasília a Wuhan no Google Earth

Fonte: Google Earth (2022)

Figura 17 – Caminho de Brasília a Wuhan no Google Earth aproximado



Fonte: Google Earth (2022)

Resolução:

A partir da visualização do caminho entre os dois pontos no Google Earth, foi feita uma construção no GeoGebra para auxiliar na visualização do triângulo esférico formado por esses dois pontos que representam as cidades de Brasília e Wuhan, e pelo ponto que representa o polo Norte. A visualização desse triângulo esférico e de suas propriedades facilita no uso da lei dos cossenos.

Para isso, alguns elementos foram sendo criados seguindo a ordem descrita abaixo:

1 – O ponto O na intersecção dos eixos x, y e z.

2 - Uma esfera de centro O e raio 5.

3 – O ponto A na intersecção entre a superfície esférica e o eixo z no sentido positivo.

4 – Um círculo, nomeado de Equador, de modo que dividisse a Esfera ao meio.

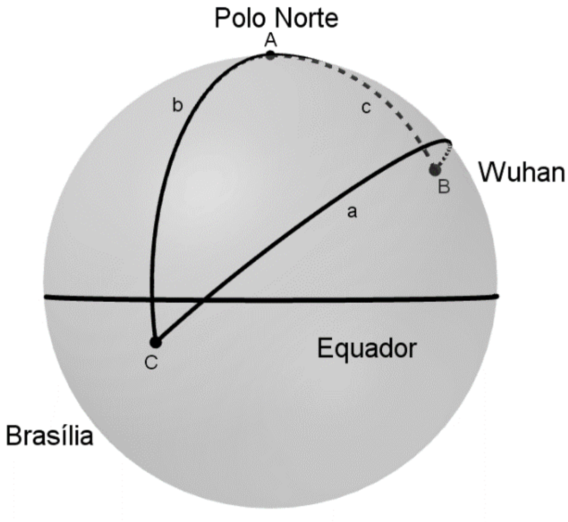
5 – O ponto B cerca de 30° graus acima do círculo (Equador), de modo que represente a cidade de Wuhan.

6 – O ponto C cerca de 15° abaixo do círculo (Equador), de modo que represente a cidade de Brasília.

7 – 3 arcos circulares: (O, A, C), (O, B, A), (0, B, C).

É importante lembrar que a figura é utilizada apenas para uma melhor visualização do problema, os dados necessários para os cálculos são dados no enunciado da questão.

Figura 18: Representação aproximada da questão no GeoGebra



Fonte: Autores

Com a figura 18 pronta, percebemos que os pontos C e B correspondem as cidades de Brasília e Wuhan, respectivamente, que possuem coordenadas descritas abaixo:

Brasília: Latitude:15° 47’ 50’’ N. Longitude: 47° 53’ 30’’ W

Wuhan: Latitude: 30° 35’ 35’’ N. Longitude: 114° 18’ 18’’ W

O c é obtido da diferença entre 90° e a latitude do ponto B (Wuhan), que resulta em: 59° 24’ 25’’.

Agora perceba que, diferente de c, o b ultrapassa a linha do Equador, e por isso não é obtido pela diferença, mas sim pela soma de 90° com a latitude do ponto C (Brasília). Portanto $b = 105°47'50''$.

E por fim, o A é dado pela soma entre as longitudes dos pontos C e B. Então temos que $A = 162°11'48''$.

Com esses dados podemos usar a fórmula da Lei dos Cossenos.

$$cos(a) = \cos(c) \cdot \cos(b) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot \cos(A)$$

$$cos(a) = \cos(59°24'25'') \cdot \cos(105°47'50'') + sen(105°47'50'') \cdot \ sen(59°24'25'') \cdot \cos\,(162°11'48'')$$

$$cos(a) = 0{,}51 \cdot (-0{,}27) + 0{,}96 \cdot 0{,}86 \cdot (-0{,}95)$$

$$cos(a) = \ -0{,}92$$

$$a = \arccos(-0{,}92) = 156{,}93°$$

E, como já visto neste trabalho, 1° equivale a 111,17 km na superfície terrestre, então multiplicando os valores $156{,}93 \cdot 111{,}17$ obtemos como resultado $17.445{,}91$.

Perceba que a questão pede a distância percorrida em toda a busca, ou seja, ida e volta. Por isso precisamos multiplicar o resultado encontrado por 2 e, com isso chegamos à conclusão de que as aeronaves percorreram cerca de 34.891,82 km no total.

Novamente, é necessário entender que, para os valores usados nos cálculos, foram utilizados alguns arredondamentos e, por isso, esse resultado é aproximado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi desenvolvido a partir da curiosidade acerca das Geometrias não-Euclidianas e, a partir dessa curiosidade surgiu o desejo de mostrar que é possível utilizá-la em sala de aula incluindo até mesmo conceitos de outras disciplinas, como a geografia, no nosso caso.

Acreditamos fortemente que softwares como o GeoGebra e o Google Earth podem ajudar no processo de ensino e aprendizagem, principalmente no que diz respeito a visualização daquilo que está sendo tratado e especialmente no momento em que estamos vivendo, em que a tecnologia está sendo imprescindível para a educação. Por esses e outros motivos abordamos sobre eles aqui.

Pesquisar sobre outras geometrias fez com que se abrisse um leque novo de conhecimentos e possibilidades para pesquisas futuras e, inclusive, como infelizmente não foi possível aplicar a atividade proposta, esperamos que esta venha a ser utilizada em sala de aula futuramente e que sirva de apoio e exemplo para outras atividades semelhantes e para outras pesquisas com propósitos parecidos com o que tivemos até aqui.

Esperamos, com esse trabalho, despertar o interesse tanto de alunos como de professores do ensino básico ou até mesmo do ensino superior, para que estudem e abordem em suas aulas não só a Geometria Esférica, a mais explorada por nós, mas também outras Geometrias não-Euclidianas, para assim possibilitar que as pessoas tenham cada dia mais e mais conhecimento sobre esse vasto campo da matemática: A Geometria.

REFERÊNCIAS

ATHANASIO, Thales Graça. **Geometria esférica: uma proposta de introdução no Ensino Médio a partir da geometria na esfera**. 2019. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo.

BITTENCOURT NETO, Jessica Lailla Ferreira et al. **Uma introdução à geometria esférica no ensino básico**. 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

BRITO, Gilmar Alves. **A GEOMETRIA DO GLOBO TERRESTRE: uma proposta de trabalho interdisciplinar entre matemática e geografia**. 2018.

GIL, Antônio Carlos. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. 6 ed. São Paulo: Atlas 2008.

SANTOS, José Adriano Fernandes dos. **Matemática aplicada à geografia**. 2016.

UCHÔA, Francisco José Santos. **A geometria esférica e a distância entre dois pontos do globo na perspectiva do GeoGebra**. 47 f. 2018 Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2018.

SILVA, Deyvson de França da. **Áreas de figuras planas e geometria esférica**. 2018. Dissertação de Mestrado. Brasil.

SILVA, Franciano Jose da. **O google earth como ferramenta de ensino em geometria analítica.** 2019. Dissertação de Mestrado. Universidade Tecnológica Federal do Paraná.