INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco

AS CÔNICAS E SEUS DIÂMETROS: CONSTRUÇÕES E PROBLEMAS

Tayná Lima de Brito
tlb@discente.ifpe.edu.br
Erivaldo Ferreira Morais Júnior
erivaldo.junior@caruaru.ifpe.edu.br

RESUMO

O presente trabalho é um estudo descritivo sobre os diâmetros de cônicas que tem por metodologia adotada a análise descritiva. O objetivo principal é descrever os diâmetros de cada cônica, colaborando para o ensino da Geometria Analítica na licenciatura ou bacharelado em matemática, ensino médio e áreas afins. Inicialmente, foi feito uma breve pesquisa sobre a história do surgimento dessas curvas. Com o auxílio de livros didáticos apresentamos suas definições, os principais elementos e algumas de suas equações. Entretanto, para explorar os diâmetros de cônicas e apresentar sua relevância no que se refere ao ensino da Geometria Analítica dentro da sala de aula, é usando como principal fonte o trabalho de Costa (2019) que possibilitou descrever os diâmetros de cada cônica e suas respectivas equações e, por fim, a elaboração de uma proposta de atividade com foco na resolução de problemas que envolve os diâmetros conjugados.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Cônicas. Diâmetro das Cônicas. Diâmetros Conjugados.

ABSTRACT

The present work is a descriptive study on the diameters of conics which has the descriptive analysis methodology adopted. The main objective is to describe the diameters of each conic, contributing to the teaching of Analytical Geometry in the Licentiate or Bachelor's Degree in Mathematics, High School and related areas. Initially, a brief research was carried out on the history of the emergence of these curves. With the help of textbooks, we present its definitions, the main elements and some of its equations. However, in order to explore the diameters of conics and present their relevance with regard to the teaching of Analytical Geometry within the classroom, it is using the work of Costa (2019) as the main source, which made it possible to describe the diameters of each conic and their respective equations and, finally, the elaboration of an activity proposal focused on solving problems involving the conjugate diameters.

Keywords: Analytical Geometry. conics. Diameter of Conics. Conjugated Diameters.

Instituto Federal de Pernambuco. Campus Pesqueira. Curso de Licenciatura em Matemática. 15 de fevereiro de 2022.

1 INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica tem como um dos assuntos mais importantes a serem abordados em sala de aula o estudo das seções cônicas, que exige, por parte dos educadores, bastante dedicação. Todavia, as cônicas têm aplicações práticas, por exemplo: os planetas percorrem trajetórias em forma de elipse; em um salto de motocross, a moto descreve uma trajetória parabólica; e os pilares da Catedral de Brasília, DF, tem a hipérbole como sua forma principal, entre tantas outras aplicações que reforçam ainda mais a relevância desse assunto dentro e fora da sala de aula.

Além disso, atualmente é possível encontrar vários trabalhos a respeito das cônicas e suas aplicações, entretanto existe uma escassez a respeito do estudo sobre os diâmetros das cônicas. Dessa forma, pesquisamos autores como Rodrigues (2014), Silva (2018), que apresentam em seus trabalhos, grandes contribuições sobre as seções cônicas no que diz respeito ao ensino/aprendizagem, suas aplicações e propriedades. Contudo, uma das fontes que inspirou este trabalho foi Costa (2019), que aborda de forma ampla, em sua dissertação, um capítulo dedicado, especialmente, aos diâmetros das cônicas que é o segmento de reta que passa pelos pontos médios das cordas paralelas a uma dada direção, e por fim, apresenta uma proposta extracurricular.

Após a leitura destes trabalhos publicados sobre as cônicas, nota-se que apesar de ser um tema bastante rico é possível explorar mais, em especial sobre o diâmetro de cada cônica e suas aplicações. Ademais, a escolha em escrever sobre os diâmetros das cônicas parte inicialmente da curiosidade, por não ter visto esse tema no curso de licenciatura em matemática, também ser um assunto pouco explorado nos livros de Geometria Analítica e encontrado apenas na dissertação de Costa (2019), destacando que geralmente durante um curso básico de licenciatura em matemática o estudo das cônicas é visto na disciplina de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial Integral, com foco nas definições de cada cônica, para assim obter suas respectivas equações e finalmente é ensinado como identificá-las.

Todavia, o presente trabalho, tem como objetivo geral apresentar uma proposta de atividade que possa contribuir com o ensino da Geometria Analítica no ensino médio e superior e que possa auxiliar no desenvolvimento de outros trabalhos relacionados ao estudo das cônicas, bem como, resolver problemas relacionados aos diâmetros das cônicas, além de analisar como essa proposta pode ser trabalhada no ensino médio pelos docentes e, por fim, apresenta uma proposta de atividade.

A metodologia adotada para a realização deste trabalho foi a análise descritiva, na qual se pretende descrever sobre o diâmetro de cada cônica. Portanto, pretende-se com esse trabalho, contribuir para o desenvolvimento de futuras pesquisas sobre o diâmetro das cônicas, e levar alunos do ensino superior e ensino médio a conhecerem este tema que geralmente não é abordado em nossas salas de aula.

2 CÔNICAS

Nesta seção, vamos tratar sobre a origem das cônicas, suas aplicações e, principalmente, sobre as definições e algumas propriedades conhecidas. O estudo sobre as seções cônicas, geralmente é visto inicialmente no ensino médio de forma bem sucinta nos cursos de licenciatura ou bacharelado em matemática e áreas afins, geralmente não sendo abordado seu contexto histórico e suas aplicações no cotidiano.

2.1 Origem das cônicas

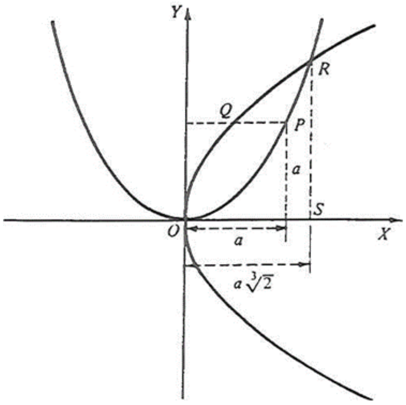
As seções cônicas são conhecidas desde a antiguidade com o objetivo de solucionar problemas, de acordo com Domingues (1998)

> Não há um consenso sobre como nem quando as seções cônicas apareceram na história da matemática. Mas na versão mais difundida, a de Eratóstenes (c. Séc. III a.C), a origem estaria na tentativa de Menaecmus (Séc. IV a.C) de resolver o problema da duplicação do cubo: ou seja, o problema consistindo em construir um cubo cujo volume seja o dobro do volume de um outro cubo dado, de lado a. Menaecmus era discípulo de Eudoxo, mas também foi membro da Academia de Platão (427-347 a.C) onde esse problema foi estudado.

Supostamente, o problema da duplicação do cubo tem início a partir da lenda sobre uma peste, no qual para se verem livres dela, os habitantes de Delos, Grécia, teriam que construir um altar duas vezes maior que o já existente de Apolo. As ferramentas que os gregos possuíam na época para resolver o problema eram apenas instrumentos euclidianos: régua e compasso, o que dificultou bastante a resolução do problema.

Ainda segundo Gómes; Frensel; Crissaff (2014, apud, Rodrigues, 2014, p.12), no século (470-410 a.C.), Hipócrates de Chios escreveu o problema de duplicação do cubo em termos de proporções entre segmentos geométricos: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, onde x e y são as coordenadas nos planos x e y e a é a aresta do cubo. Para resolver essas proporções, ele isolou e eliminou o y e ficou com $x^2 = 2a^3$, hoje em dia significa resolver duas das seguintes equações: $x^2 = ay,\ y^2 = 2ax$ e $xy = 2a^2$, onde as duas primeiras são equações de parábolas e a terceira é a equação de uma hipérbole, como mostra a figura a seguir:

Figura 2



Fonte: Domingues 1998

Contudo, grandes nomes da matemática como: Aristeu, Arquimedes, Euclides e Menaecmus; deram importantes contribuições para o estudo sobre essas curvas. No entanto, o ápice desse estudo se deu através de Apolônio de Perga também conhecido como o “o pai das cônicas”, que merecidamente ganhou o título de “O grande geômetra” devido a seu fabuloso tratado “As Cônicas”, composto por oito volumes. Segundo Silva (2018), o tratado é considerado como uma das principais obras da antiguidade, o que lhe concedeu o direito de ser uma das mais eminentes figuras da ciência grega do campo da geometria pura.

O pai das cônicas, Apolônio de Perga (262 – 190 a.C), foi o primeiro a provar que que um cone não precisa ser reto para obtemos uma cônica, podendo ser ele oblíquo ou escaleno, e ainda usou pela primeira vez um cone de duas folhas gerando todas as cônicas, simplesmente variando o plano de interseção, obtendo inclusive assim, a hipérbole com dois ramos. De acordo com Talavera; Brolezzi (2012, apud, RODRIGUES, 2014, p.13), os elementos geométricos no trabalho de Apolônio eram o **foco** da cônica e o ***latus rectum***, que é o segmento que passa pelo foco, é perpendicular ao eixo de simetria e tem extremos em pontos da curva.

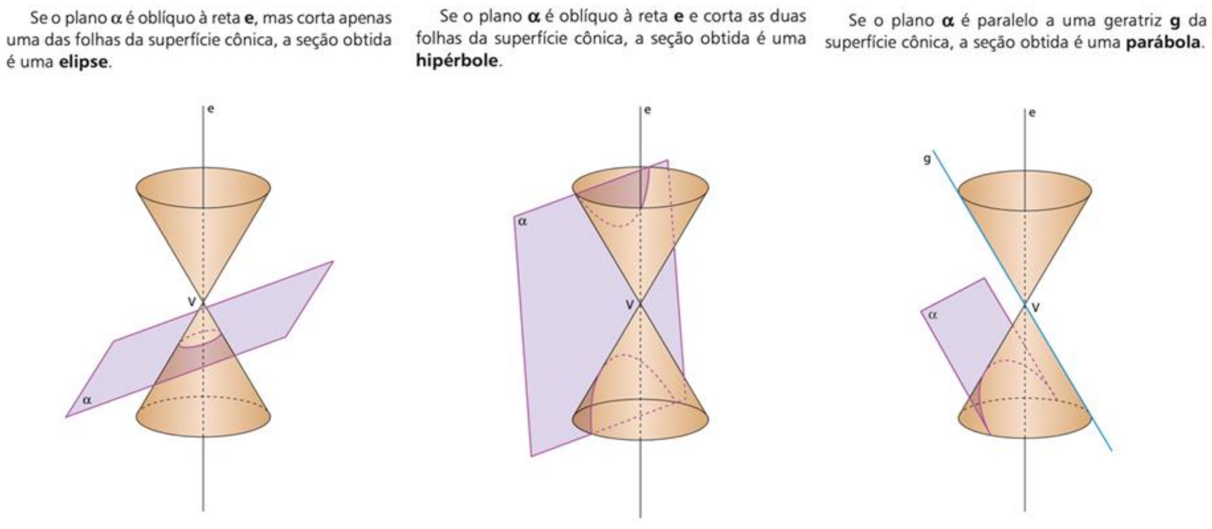
Apesar de ter se dedicado totalmente ao estudo sobre essas curvas, Apolônio desenvolveu seu fabuloso trabalho sem se preocupar com a existência ou não das aplicações. Porém, sua dedicação e perseverança, não somente influenciou outros estudiosos de diferentes épocas, como também teve grande importância no que se refere às aplicações das cônicas em diversas áreas como arquitetura, engenharia, artes, entre tantas outras.

2.2 Seções cônicas

Nesta seção, apresentaremos os principais elementos de cada cônica e suas respectivas equações, utilizando como fonte alguns livros didáticos do ensino médio.

Assim como o próprio nome sugere, geralmente se obtém uma figura cônica a partir de um cone. Segundo Paiva (2013, p.106), a intersecção de um plano α com a superfície S é chamada figura cônica. Essa figura pode ser um ponto, uma reta, um par de retas, uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola; as quatro primeiras figuras são também conhecidas como cônicas degeneradas. Entretanto, abordaremos as cônicas não degeneradas que estão definidas a seguir.

Figura 2.1



Fonte: Matemática - ciências e aplicações

2.2.1 Elipse

A elipse é uma figura geométrica fechada, podendo ser identificada pela sua equação sem grande dificuldade, pois sua equação está diretamente ligada a um sistema de eixos indicado, apesar de ser bastante comum de ser encontrada no dia a dia, geralmente passa despercebida. Suas aplicações possibilitaram a explicação sobre a movimentação dos planetas ao redor do sol, tem forte presença na arquitetura devido a propriedade de seus focos, entre outras aplicações. No entanto, para compreender bem esta figura, assim como as demais cônicas, é importante conhecer sua definição e os seus elementos.

Definição 2.1 Elipse é o LG[1] dos pontos P de um plano cujo a soma de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 desse plano, é constante e maior que a distância entre eles.

Elementos principais:
Focos: são os pontos F_1 e F_2;

Centro: é o ponto *O,* ponto médio de $\underline{A_1A_2}$;

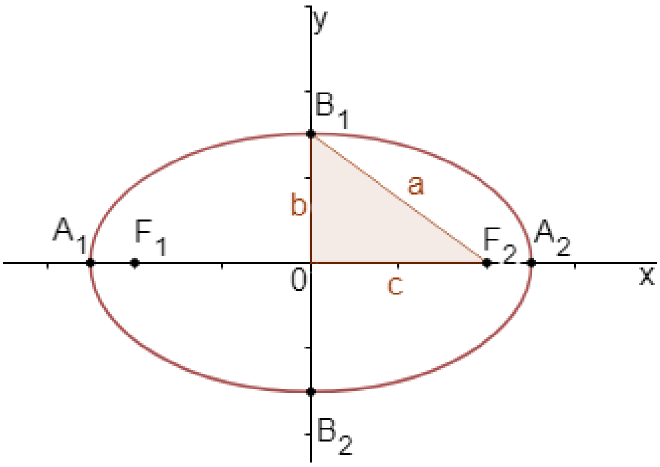
Eixo maior: é o segmento $\underline{A_1A_2}$, que passa pelos focos $d(A_1A_2) = 2a$;

Eixo menor: é o segmento $\underline{B_1B_2}$, perpendicular a $\underline{A_1A_2}$, que passa por *O* e, sua medida é dada por $d(B_1B_2) = 2b$;

Distância focal: é a distância entre os focos e, sua medida é dado por $d(F_1F_2) = 2c$;

Excentricidade: é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo $0 < e < 1$.

Figura 2.2: Elipse com focos sobre o eixo O_x



Fonte: Autores

A excentricidade de uma elipse apresenta duas interessantes características geométricas ou dois casos particulares da elipse. A primeira característica é quando a excentricidade é igual a 0, sendo assim iriamos obter uma figura semelhante a circunferência que também é conhecida como degeneração da elipse, no qual seus focos coincidem; a segunda característica é quando a excentricidade é igual a 1, neste caso iriamos obter um segmento de reta. Ademais, no triângulo retângulo OF_2B_1, a

[1] Lugar Geométrico (LG) é o conjunto de pontos de um plano que detém uma determinada característica ou propriedade.

medida a da hipotenusa é correspondente à metade das somas das distâncias dos focos ao ponto B_1, portanto de acordo com o Teorema de Pitágoras temos a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Para demonstrar a equação reduzida da elipse, tomemos um sistema ortogonal tal que, $\underline{A_1A_2} \subset O_X$ e $\underline{B_1B_2} \subset O_Y$, de centro na origem e com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Considerando um ponto P(x,y) qualquer pertencente a elipse, de acordo com a definição 2.1 temos que:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

Aplicando a fórmula de distância entre dois pontos no lado esquerdo, temos que:

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

Agora isolando a primeira parcela da soma, e, em seguida elevando ambos os membros ao quadrado, desenvolvendo e simplificando, temos:

$$\Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4xc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

Elevando os dois membros ao quadrado novamente e simplificando, temos:

$$\left(a\sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + y^2}\right)^2 = (a^2 - xc)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

Considerando o ΔOF_2B_1, segundo o Teorema de Pitágoras temos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \therefore b^2 = a^2 - c^2$$

Substituindo na expressão, obtemos:

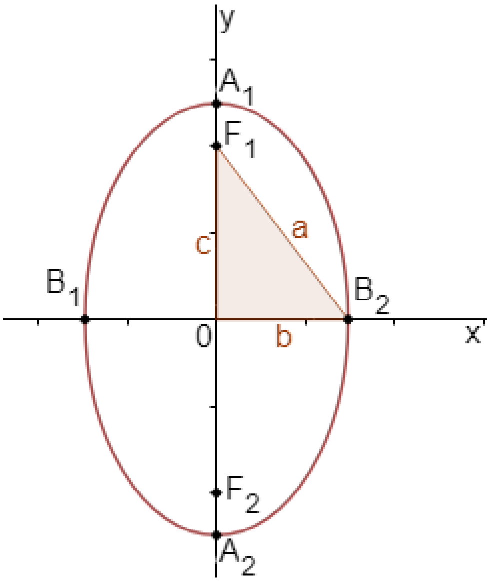
$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Por fim, dividindo ambos os membros da expressão por a^2b^2 $(a > 0, b > 0)$, desta forma fica demostrado que o resultado encontrado é a equação reduzida da elipse que é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

De maneira análoga, se a elipse apresenta $\underline{A_1A_2} \subset O_y$ e $\underline{B_1B_2} \subset O_x$ e origem no centro, como mostra a figura 2.3 a seguir:

Figura 2.3: Elipse com focos sobre o eixo O_y



Fonte: Autores

De acordo coma definição 2.1, temos:

$$d(PF_1) + d(PF_2) = 2a \Rightarrow$$

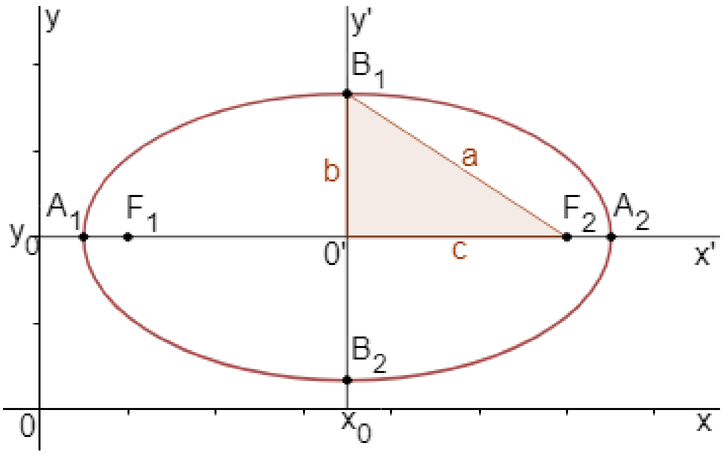
$$\Rightarrow \sqrt{(x+0)^2 + (y+c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = 2a$$

E, repetindo o mesmo processo anterior, novamente será encontrada a equação reduzida da elipse, dada por:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Agora, vamos analisar a equação da elipse cujo centro não coincide com a origem em dois casos. No primeiro caso temos uma elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo a O_x, como mostra a figura 2.4:

Figura 2.4: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo O_x



Fonte: Autores

Considerando o sistema $x'O'y'$, a equação da elipse é:

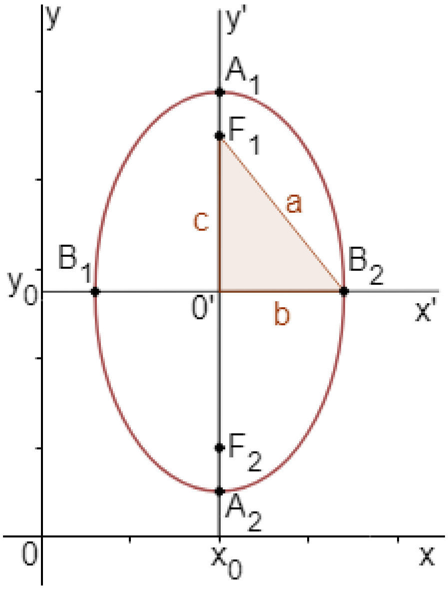
$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=1 \qquad (I)$$

Assim, temos: $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, substituindo na equação (I) a elipse em relação ao sistema $x'O'y'$, é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Seguindo o raciocínio anterior, vamos considerar o segundo caso da elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo a O_y, como mostra a figura 2.5:

Figura 2.5: Elipse com eixo maior paralelo ao eixo O_y



Fonte: Autores

Assim, temos que a equação da elipse com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo maior paralelo a O_y, é dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1$$

2.2.2 Hipérbole

A hipérbole também possui alguns curiosidades geralmente pouco conhecidas. Diferente da elipse, a hipérbole é uma figura geométrica aberta por se tratar de uma curva com dois ramos disjuntos, o aspecto da sua equação também está diretamente ligado ao sistema de eixos indicados, como veremos a seguir. Todavia, o formato desta curva está presente nas construções das torres de refrigeração de usinas nucleares, devido a sua excepcional estabilidade como destaca Paiva (2013, p.116). Portanto, abordaremos sua definição e os principais elementos de forma que contribuam para a melhor compreensão sobre esta curva.

Definição 2.*2* Hipérbole é o LG dos pontos P de um plano cuja diferença, em módulo, de suas distâncias aos pontos F_1 e F_2 desse plano é constante e menor que a distâncias entre eles.

Elementos principais:
Focos: são os pontos F_1 e F_2;

Centro: é o ponto *O,* ponto médio de $\overline{A_1A_2}$;
Eixo real: é o segmento $\overline{A_1A_2}$, em que $d(A_1A_2) = 2a$;

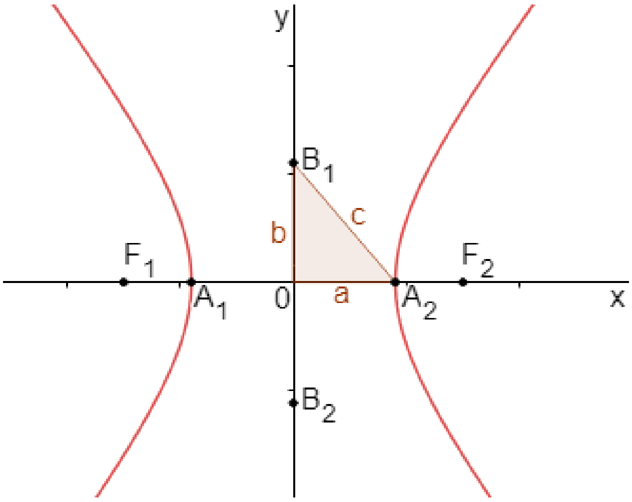
Eixo imaginário: é o segmento $\overline{B_1B_2}$, em que $d(B_1B_2) = 2b$;

Distância focal: é a distância entre os focos e, sua medida é dada por $d(F_1F_2) = 2c$;
Vértices: são os pontos A_1 e A_2, intersecção de $\overline{F_1F_2}$ com os ramos da hipérbole;

Vértices imaginário: são os pontos, B_1 e B_2, extremos do eixo imaginário;

Excentricidade: é a razão $e = \frac{c}{a}$, sendo e >1.

Figura 2.6: Hipérbole com focos sobre o eixo O_x



Fonte: Autores

A excentricidade e da hipérbole é a razão entre a hipotenusa e um cateto do triangulo retângulo OA_2B_1. Além disso, $0 < e < 1$.

Ademais, no triângulo retângulo OA_2B_1, que é relação fundamental da hipérbole, nota-se que, usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Na demonstração da equação reduzida da hipérbole, consideramos um sistema ortogonal tal que, $\overline{F_1F_2} \subset O_X$ e a reta perpendicular a esse segmento, de centro na origem (ponto médio de $\overline{F_1F_2}$) seja O_y. Sendo o eixo real $\overline{A_1A_2}$ e sua medida $2a$, com focos $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Se tomarmos um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente a hipérbole, de acordo com a definição 2.2 temos que:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

Aplicando a fórmula de distância entre dois pontos no lado esquerdo, temos que:

$$\sqrt{(x + c)^2 + (y - 0)^2} - \sqrt{(x - c)^2 + (y - 0)^2} = \pm 2a \Rightarrow$$

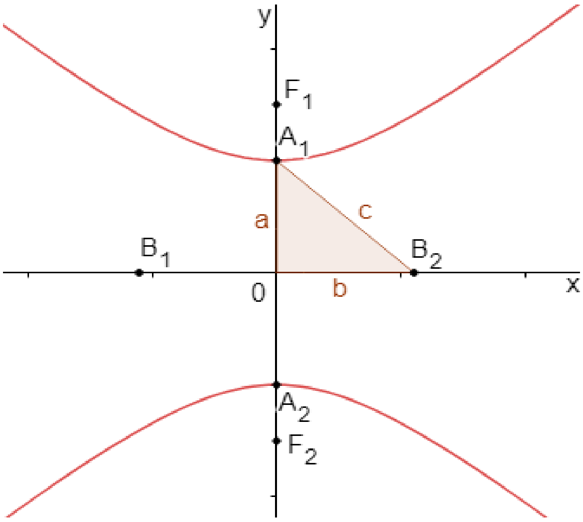
$$\Rightarrow \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

De maneira análoga, seguindo o mesmo raciocínio da demonstração da elipse anteriormente, concluímos que a equação reduzida da hipérbole é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Porém, se a hipérbole apresenta $\underline{F_1F_2} \subset O_y$ e a reta perpendicular a esse segmento, de centro na origem (ponto médio de $\underline{F_1F_2}$) seja O_x, com focos $F_1 = (0, -c)$ e $F_2 = (0, c)$, como mostra afigura 2.7:

Figura 2.7: Hipérbole com focos sobre o eixo O_y



Fonte: Autores

Se $\underline{A_1A_2} \subset O_y$ e $\underline{B_1B_2} \subset O_x$ e origem no centro, temos:

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \Longrightarrow$$

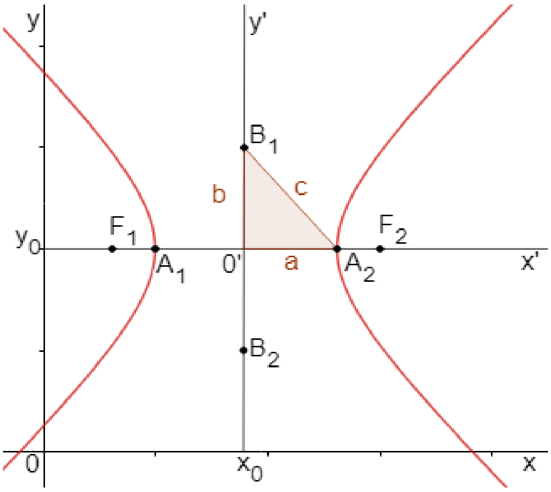
$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} - \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} = \pm 2a$$

E, repetindo o processo da demonstração da elipse, novamente será encontrada a equação reduzida da hipérbole, dada por:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Agora, analisando a equação da hipérbole cujo centro não coincide com a origem em dois casos. No primeiro caso temos uma hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo real paralelo a O_x, como mostra a figura 2.8:

Figura 2.8: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo O_x



Fonte: Autores

Considerando o sistema $x'O'y'$, a equação da hipérbole é:

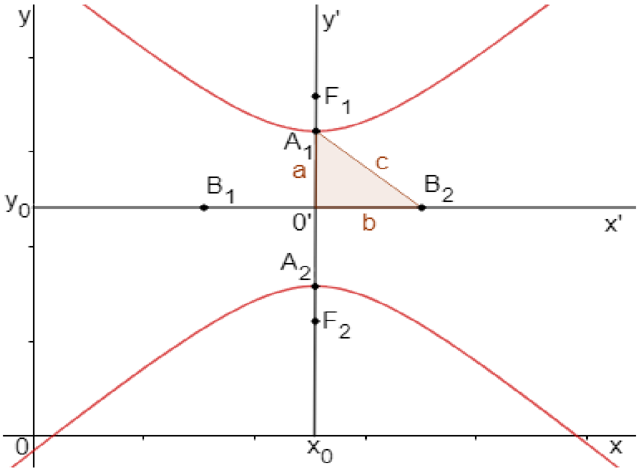
$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1\ (I)$$

Assim, temos: $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, substituindo na equação (I) em relação ao sistema $x'O'y'$, a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Seguindo o raciocínio anterior, vamos considerar o segundo caso da hipérbole com centro no ponto $O' = (x_0, y_0)$ e eixo real paralelo ao eixo O_y, como mostra a figura 2.9:

Figura 2.8: Hipérbole com eixo real paralelo ao eixo O_y



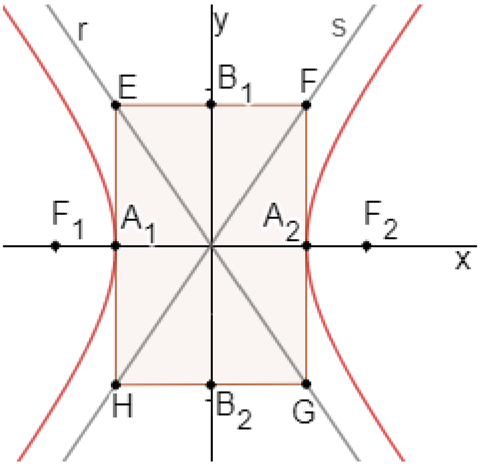
Fonte: Autores

A equação da hipérbole é dada por:

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

As assíntotas da hipérbole são retas concorrentes s e r que se cruzam no centro e contém as diagonais do retângulo $EFGH$ com lados de medida $2a$ e $2b$, nos quais os pontos médios dos lados são A_1, B_1, B_2 e A_2 (ver figura 2.9). A hipérbole não possui pontos em comum com as assíntotas.

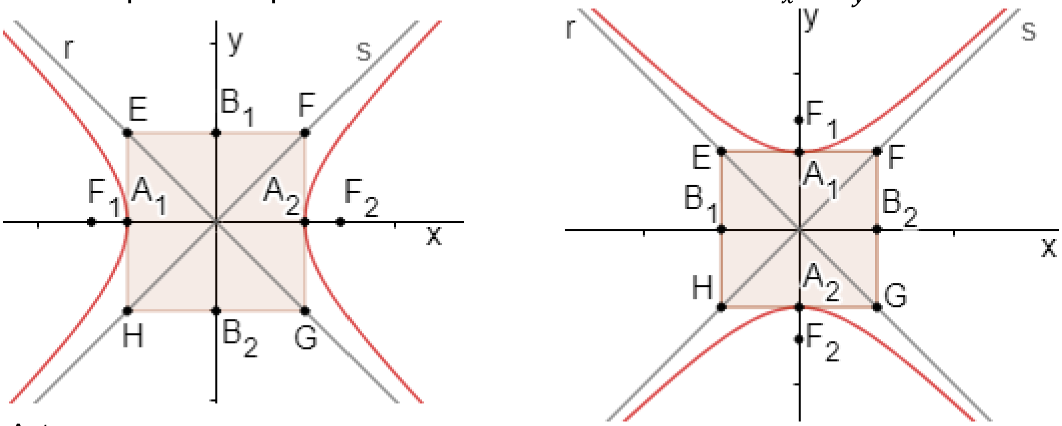
Figura 2.9 Assíntotas da hipérbole



Fonte: Autores

Além disto, quando o retângulo $EFGH$ é um quadrado, ou seja, $2a$ e $2b$ são iguais; a hipérbole é chamada de equilátera. As retas s e r, que contém a diagonal do quadrado, são as assíntotas e são perpendiculares entre si.

Figura 2.10 Hipérbole equilátera com focos sobre os eixos O_x e O_y



Fonte: Autores

2.2.3 Parábola

A parábola, talvez a mais conhecida das cônicas, é apresentada ao educando no início do ensino médio no estudo das funções, mais especificamente no estudo da função quadrática da forma $y = ax^2 + bx + c$, cujo gráfico é uma parábola e está relacionada a problemas que envolve cálculo de áreas, de produção, entre outros. Entretanto, também é vista com mais frequência nos cursos de licenciatura ou bacharelado em matemática e áreas afins, ligada diretamente a algumas das principais aplicações do Cálculo Diferencial que são os problemas de otimização, no qual é explorado como as derivadas influenciam o gráfico de uma função e como nos ajudam a localizar os valores máximos e mínimos, em particular, de uma função polinomial do 2º grau.

Devido as suas propriedades, a parábola está tão presente no cotidiano como as demais cônicas. Assim sendo, para melhor compreender esta curva é necessário conhecer sua definição e os principais elementos.

Definição 2.3 Parábola é o LG dos pontos P de um plano cuja distância a uma reta d dada é igual à distância a um ponto F não pertencente a d.

Elementos principais:
Focos: é o ponto F;

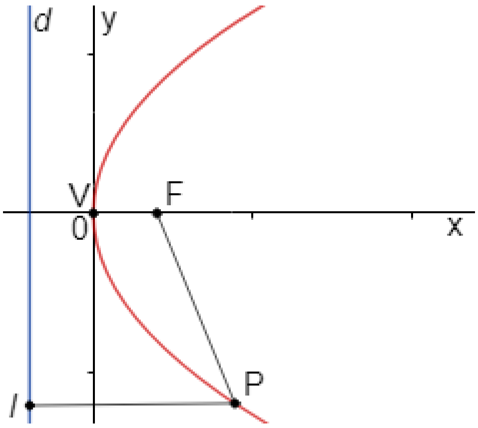
Diretriz: é a reta d;

Eixo de simetria ou reta focal: é a reta que passa por F e é perpendicular à diretriz;

Vértices: é o ponto V, intersecção da parábola com eixo de simetria;

Parâmetro: é a distância p entre o foco e a diretriz.

Figura 2.11: Parábola com foco sobre o eixo 0_x e concavidade para a direita



Fonte: Autores

Para demonstrar a equação reduzida da parábola, consideramos um sistema cartesiano ortogonal com origem no vértice da parábola e eixo das abscissas passando pelo foco F, com $F = (p, 0)$, e a diretriz d tem equação $x = -p$. De acordo com a definição 2.3 temos que:

$$d(P,F) = d(P,l)$$

Aplicando a fórmula de distância entre dois pontos e elevando os dois membros ao quadrado e desenvolvendo, temos que:

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+p)^2 + (y-y)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 2xp + p^2 + y^2 = x^2 + 2xp + p^2$$

Por fim, simplificando, chegamos a equação reduzida da parábola que é dada por:

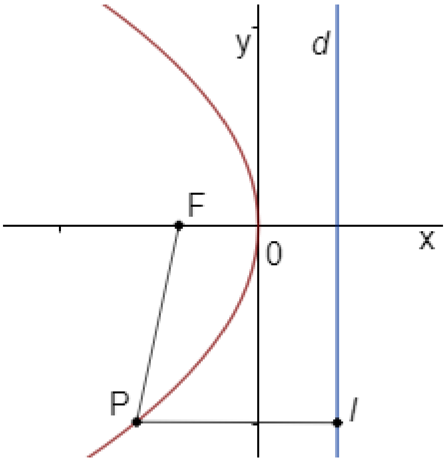
$$y^2 = 4xp$$

Essa demonstração também é válida para os casos a seguir:

Para a diretriz d de equação $x = p$, a equação reduzida da parábola que é dada por:

$$y^2 = -4xp$$

Figura 2.12: Parábola com foco sobre o eixo O_x e concavidade para a esquerda

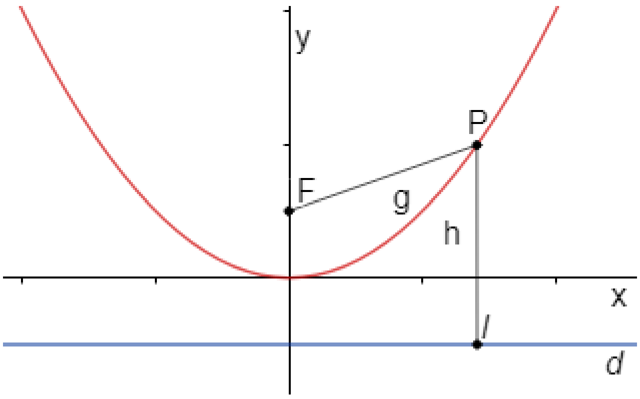


Fonte: Autores

Se a parábola apresenta vértices na origem, foco no eixo das ordenadas e concavidade para cima como mostra a figura 2.13, temos que a equação reduzida da parábola é:

$$x^2 = 4yp$$

Figura 2.13: Parábola com foco sobre o eixo O_y e concavidade para cima

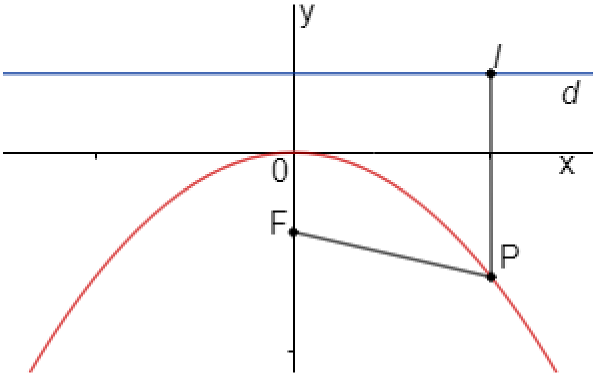


Fonte: Autores

Para a concavidade para baixo a equação reduzida da parábola que é dada por:

$$x^2 = -4yp$$

Figura 2.14: Parábola com foco sobre o eixo O_y e concavidade para baixo



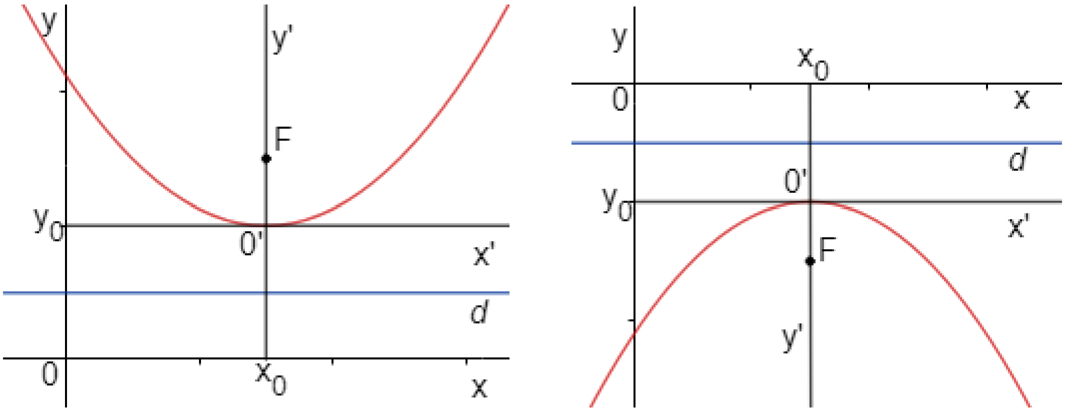
Fonte: Autores

A demonstração para o caso da equação da parábola que sofre translação de eixos é análoga.

Portanto, considerando o sistema $x'O'y$ com equação (I): $(x')^2 = \pm 4py'$, tal que: $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, substituindo na equação (I) em relação ao sistema $x'O'y'$, a equação da parábola é:

$$(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)$$

Figura 2.15: Parábolas com vértices fora da origem e concavidades para cima e para baixo

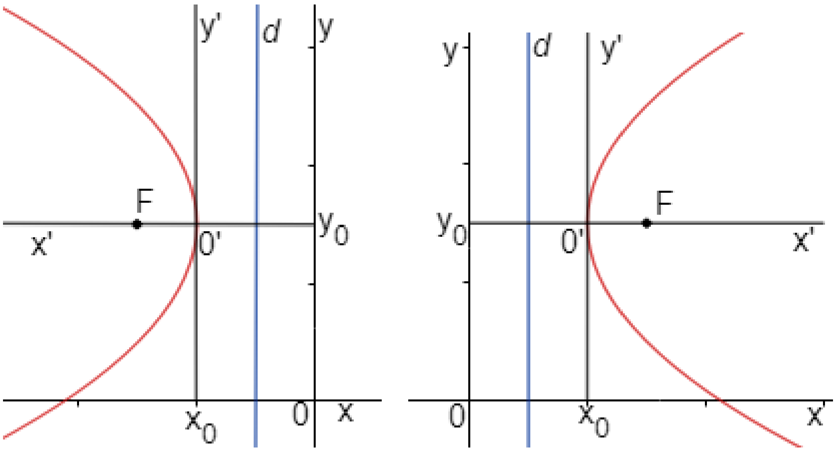


Fonte: Autores

E para o sistema $x'O'y$ com equação (II): $(y')^2 = \pm 4px'$, tal que: $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$, substituindo na equação (II) em relação ao sistema $x'O'y'$, a equação da parábola é:

$$(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

Figura 2.16: Parábolas com vértices fora da origem e concavidades para esquerda e para direita



Fonte: Autores

3 DIÂMETROS DAS CÔNICAS

Nesta seção, pretende-se tratar sobre um dos assuntos referentes as cônicas que geralmente pouco é explorado nos livros de geometria analítica, nos cursos de licenciatura em matemática e áreas afins, mesmo apesar da sua grande importância no que se refere as aplicações. Segundo Costa (2019, p.32), o estudo sobre os diâmetros das cônicas:

> [...] tem grande relevância ao conteúdo como um todo, pois através de suas aplicações podemos compreender importantes razões, como por exemplo: o fato de que cada elipse é a imagem afim de um círculo; a razão de semelhança entre elipses; o porquê da parábola não possuir diâmetros conjugados; entender melhor o comportamento das retas assíntotas da hipérbole, dentre outros.

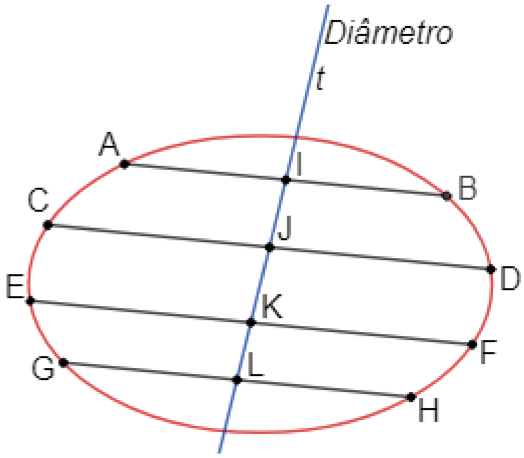
A seguir, apresentaremos a definição e equação do diâmetro de cada cônica.

Definição 3.1 O diâmetro de uma cônica é o LG dos pontos médios das cordas[2] paralelas a uma dada direção.

[2] A corda de uma cônica é qualquer segmento cujos extremos pertencem a cônica: elipse, hipérbole ou parábola.

Exemplo 1: Considere as cordas $\underline{AB}, \underline{CD}, \underline{EF}$ e $\underline{GH}$ paralelas a uma dada direção. Logo, a reta t que passa pelo centro e pelos pontos: I, J, K e L (pontos médios das cordas); é o **diâmetro da elipse**.

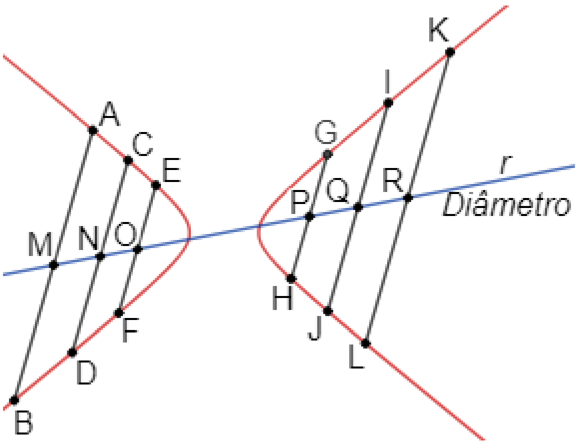
Figura 3.1 Diâmetro da elipse



Fonte: Autores

Exemplo 2: Considere as cordas $\underline{AB}, \underline{CD}, \underline{EF}, \underline{GH}$, $\underline{IJ}$ *e* $\underline{KL}$ paralelas a uma dada direção. Logo, a reta r que passa pelo centro e pelos pontos: M, N, O, P, Q *e* R (pontos médios das cordas); é o **diâmetro da hipérbole**.

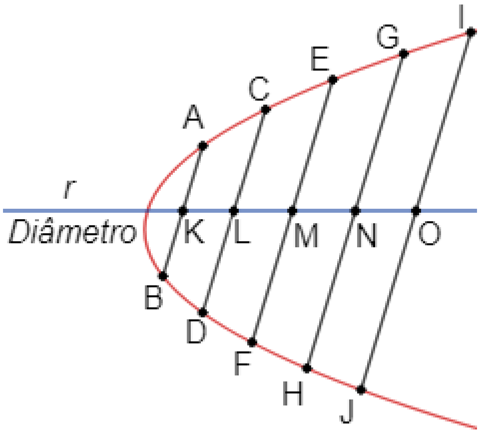
Figura 3.2 Diâmetro da hipérbole



Fonte: Autores

Exemplo 3: Considere as cordas $\underline{AB}, \underline{CD}, \underline{EF}, \underline{GH}$ e $\underline{IJ}$, paralelas a uma dada direção. Logo, a reta r que passa pelos pontos: K, L, M, N, O (pontos médios das cordas); é o **diâmetro da parábola**.

Figura 3.3 Diâmetro da parábola



Fonte: Autores

Teorema 3.1 (Teorema dos Diâmetros das Cônicas)

Considere uma cônica de equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

O diâmetro desta cônica relativo a qualquer direção será uma reta.

Demonstração:

Considere uma direção dada pela reta de equação paramétrica:

$$\begin{cases} x = x_m + p \cdot t \\ y = y_m + q \cdot t \end{cases}$$

Onde $(x_{m,}y_m)$ é um ponto do diâmetro e o vetor (p, q) determina a direção dada. Os pontos de interseção desta reta com a cônica serão as soluções o sistema:

$$\begin{cases} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\ x = x_m + p \cdot t \\ y = y_m + q \cdot t \end{cases}$$

Assim temos que:

$$\Rightarrow A(x_m^2 + 2p \cdot t \cdot x_m + p^2 \cdot t^2) + B[x_m \cdot y_m + t(x_m \cdot q + y_m \cdot p) + p \cdot q \cdot t^2] +$$

$$+C(y_m + 2y_m \cdot q \cdot t + q^2 \cdot t^2) + D(x_m + p \cdot t) + E(y_m + q \cdot t) + F = 0$$

$$\Rightarrow (A \cdot p^2 + B \cdot p \cdot q + C \cdot q^2) \cdot t^2 +$$

$$+[A \cdot 2p \cdot x_m + B \cdot (q \cdot x_m + p \cdot y_m) + C \cdot 2qy_m + D \cdot p + E \cdot q)] \cdot t +$$

$$+(Ax_m^2 + Bx_m \cdot y_m + Cy_m^2 + Dx_m + Ey_m + F) = 0 \text{ (Eq.1)}$$

A equação 1, do 2º grau, terá duas soluções t_1 e t_2. Sendo $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ os dois pontos de interseção. Daí, o ponto médio da corda definida por estes dois pontos é:

$$x_m = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{(x_m + p \cdot t_1) + (x_m + p \cdot t_2)}{2} = x_m + \frac{p}{2}(t_1 + t_2)$$

Logo:

$$x_m = x_m + \frac{p}{2}(t_1 + t_2) \Rightarrow t_1 + t_2 = 0$$

A soma das raízes da equação 1 é nula.

$$\Rightarrow -\frac{[A \cdot 2p \cdot x_m + B(q \cdot x_m + p \cdot y_m) + C \cdot 2q \cdot y_m + D \cdot p + E \cdot q]}{2(A \cdot p + B \cdot p \cdot q + Cq^2)} = 0$$

$$\Rightarrow A \cdot p \cdot x_m + \frac{B}{2}(q \cdot x_m + p \cdot y_m) + C \cdot q \cdot y_m + \frac{D}{2} \cdot p + \frac{E}{2} \cdot q = 0$$

Portanto, o LG chamado diâmetro de uma cônica é representado por uma equação de reta. Organizando a equação acima em função de $\frac{p}{q}$, obtemos:

$$A \cdot x_m + \frac{B}{2}\left[\left(\frac{q}{p}\right) \cdot x_m + y_m\right] + C\left(\frac{q}{p}\right) \cdot y_m + \frac{D}{2} + \frac{E}{2}\left(\frac{q}{p}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(A \cdot x_m + \frac{B}{2} \cdot y_m + \frac{D}{2}\right) + \left(\frac{q}{p}\right) \cdot \left(\frac{B}{2} \cdot x_m + Cy_m + \frac{E}{2}\right) = 0$$

Note que $\frac{q}{p}$ é justamente o coeficiente angular m da direção dada, ou seja, $m = \frac{q}{p}$.

Assim, concluímos que o diâmetro da cônica é uma reta de equação:

$$\left(A \cdot x_m + \frac{B}{2} \cdot y_m + \frac{D}{2}\right) + m \cdot \left(\frac{B}{2} \cdot x_m + Cy_m + \frac{E}{2}\right) = 0$$

Colocando y_m em função x_m, temos que a equação reduzida da reta é:

$$y_m = -\frac{\left(A + \frac{Bm}{2}\right)}{\left(\frac{B}{2} + Cm\right)} x_m - \frac{D + Em}{2\left(\frac{B}{2} + Cm\right)} \quad (Eq. 2)$$

Entretanto, considerando o caso particular em que $B = D = E = 0$ na $Eq. 2$, concluímos que a equação reduzida da reta é:

$$y_m = -\frac{A}{Cm} x_m \quad (Eq. 3)$$

Contudo, se esta curva for uma elipse ou uma hipérbole, o diâmetro da curva sempre passará pelo seu centro; no caso da parábola a curva não possui centro.

Demonstração: Considere uma cônica na sua forma geral

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (I)$$

Para a elipse na forma canônica, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (II)$$

Assemelhando (I) e (II), encontramos:

$$A = b^2, C = a^2 \text{ e } F = -a^2b^2 \quad (III)$$

Substituindo (III) em $Eq. 2$, temos que:

$$y = -\frac{b^2x}{a^2m}$$

Para a hipérbole na forma canônica, temos:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad (IV)$$

Assemelhando (I) e (IV), encontramos:

$$A = b^2, C = -a^2 \text{ e } F = -a^2b^2 \quad (V)$$

Substituindo (V) em $Eq. 2$, temos que:

$$y = \frac{b^2x}{a^2m}$$

Para a parábola na forma canônica, temos:

$$y^2 = 2px \Rightarrow y^2 - 2px = 0 \quad (VI)$$

Assemelhando (I) e (VI), encontramos:

$$A = 0, C = 1 \text{ e } D = -2p \quad (VII)$$

Substituindo (VII) em $Eq. 2$, temos que:

$$y = -\left(\frac{0}{1}\right)m - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2p + 0)}{0 + 1m} \Rightarrow y = \frac{-2p}{-2m} \Rightarrow y = \frac{p}{m}$$

Portanto, podemos concluir que as equações dos diâmetros relativos a uma direção de coeficiente angular m na forma canônica com foco(s) sobre o eixo x são dadas por:

1. Diâmetro da Elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \therefore y = -\frac{b^2x}{a^2m}$$

2. Diâmetro da Hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ = 0 \therefore y = \frac{b^2x}{a^2m}$$

3. Diâmetro da Parábola:

$$y^2 = 2px \therefore y = \frac{p}{m}$$

3.1 DIÂMETROS CONJUGADOS

Apolônio chamou de diâmetros conjugados o segmento que passa pelos pontos médios das cordas paralelas a um diâmetro, seja ele de uma elipse ou hipérbole. Todavia, se faz necessário conhecer as propriedades geométricas dessas curvas: elipse, hipérbole e parábola, são um dos principais requisitos para a resolução de problemas, Santos (2012, p.45) destaca o caso do problema da reta tangente que requer a determinação do ponto de tangência para a sua solução, problema que é resolvido utilizando os diâmetros conjugados. Costa (2019, p.37) afirma que,

> Nos dias atuais, os diâmetros conjugados são usados em várias construções, como na fuselagem de aviões, pontes, edifícios industriais, torres, guindastes, mecanismo de direção dos automóveis, entre outras coisas mais. Além disso, os diâmetros conjugados de hipérboles também são úteis para afirmar o princípio da relatividade na física moderna do espaço-tempo[...].

Definição 3.2 O LG dos pontos médios das cordas paralelas a um diâmetro de uma elipse (ou hipérbole) também será diâmetro da elipse (ou hipérbole). Chamaremos estes dois diâmetros de **Diâmetros Conjugados**.

Temos que o diâmetro de uma elipse, por exemplo, relativo a uma direção m tem equação:

$$y = -\left(\frac{b^2}{a^2m}\right)x \quad (I)$$

Esta reta determina uma direção de coeficiente angular:

$$m' = -\frac{b^2}{a^2m}$$

Todavia, as cordas paralelas a direção dada, também definirão um outro diâmetro da elipse, ambos conhecidos como diâmetros conjugados da elipse. Tomando d_1 como a reta de direção m_1 que passa pelo centro da elipse e d_2 é a reta da equação (I), temos:

$$d_1\colon y = m_1x \ \ (II)$$

e

$$d_2\colon y = -\frac{b^2}{a^2m_2}x \ \ (III)$$

As retas d_1 e d_2, tem como ponto em comum o centro da elipse. Assim sendo, substituindo (II) em (III), obtemos a relação entre seus coeficientes angulares:

$$-\frac{b^2}{a^2m_2}x = m_1x \ \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \ \ (IV)$$

Para o caso particular de uma elipse degenerada em uma circunferência, temos que $a = b$, substituindo em (IV), temos:

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{a^2}{b^2} \ \Rightarrow \ m_1 \cdot m_2 = -1$$

Portanto, nesse caso os diâmetros conjugados são perpendiculares entre si.

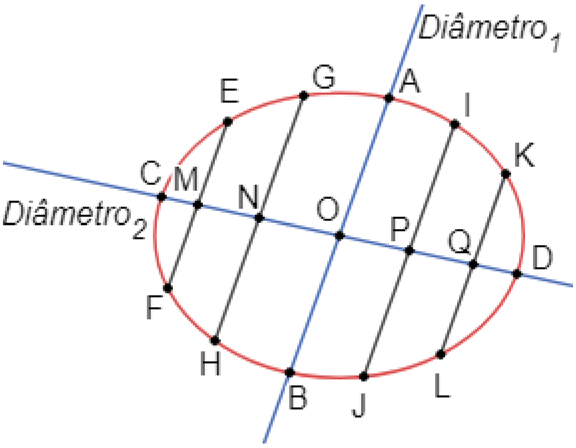
Semelhantemente, seguindo o mesmo raciocínio anterior encontramos a relação entre os coeficientes angulares da hipérbole.

Então, tendo m_1 e m_2 como coeficientes angulares de dois diâmetros conjugados, concluímos:

$$m_1 \cdot m_2 = \{-\frac{b^2}{a^2} \qquad (Elipse) \quad \frac{b^2}{a^2} \quad (\,Hipérbole)$$

Seja $\overleftrightarrow{AB}$ o diâmetro de uma elipse, tomando as cordas $\underline{EF}, \underline{GH}, \underline{IJ}, \underline{KL}$, paralelas a esse diâmetro. Então, a reta $\overleftrightarrow{CD}$ que passa pelo centro da elipse e pelos pontos: M, N, O, P e Q (pontos médios das cordas); é o seu diâmetro conjugado.

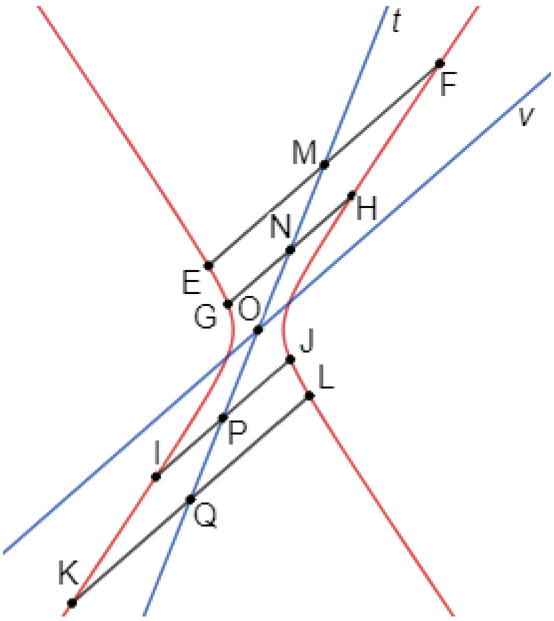
Figura 3.4 Diâmetros conjugados de uma elipse



Fonte: Autores

De forma análoga, a reta v é o diâmetro de uma hipérbole, tomando as cordas $\underline{EF}, \underline{GH}, \underline{IJ}, \underline{KL}$, paralelos a esse diâmetro. Então, a reta t que passa pelo centro da hipérbole e pelos pontos: M, N, O, P, Q (pontos médios das cordas); é o seu diâmetro conjugado.

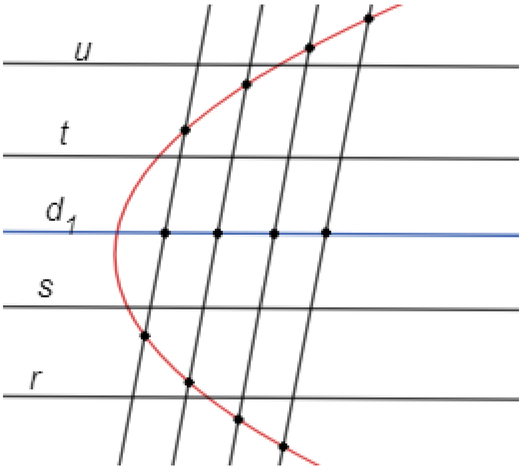
Figura 3.5 Diâmetros conjugados de uma hipérbole



Fonte: Autores

Contudo, a parábola não possui diâmetros conjugados pois segundo a definição 3.2 um diâmetro de uma parábola será sempre paralelo ao seu eixo principal, portanto as retas paralelas a um diâmetro não definirão cordas da parábola como mostra a figura 3.6.

Figura 3.6 Diâmetro de uma parábola



Fonte: Autores

4 PROPOSTA DE ATIVIDADE

Nesta seção sugerimos uma proposta de atividade com base no que foi visto no decorrer do trabalho sobre os diâmetros conjugados.

1 – Determine as equações das retas dos diâmetros conjugados da cônica de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, dada a direção $m = 4$ de um desses diâmetros.

Solução: a equação reduzida da que questão é uma elipse, como $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$ o eixo maior da elipse está contido no eixo O_x e com centro na origem. Sendo assim, a equação de um desses diâmetros e dada por:

$$y_1 = -\frac{16}{25m}x$$

A direção de um dos diâmetros é $m = 4$, substituindo:

$$y_1 = -\frac{16}{25 \cdot 4}x \therefore y_1 = -\frac{4}{25}x$$

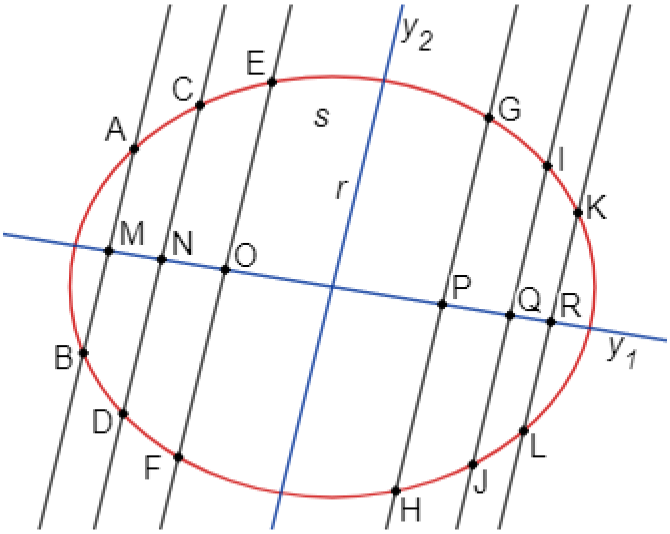
Daí, obtemos a equação de um diâmetro da elipse. Agora, como o coeficiente angular de y_1 é $-\frac{4}{25}$, temos:

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow -\frac{4}{25} \cdot m_2 = -\frac{16}{25} \Rightarrow m_2 = 4$$

Daí, obtemos o coeficiente angular de y_2. Logo, os diâmetros conjugados dessa elipse passam pela origem, substituindo m_2 obtemos a segunda reta: $y_2 = 4x$. Portanto, as equações das retas dos diâmetros conjugados dessa elipse são:

$$y_1 = -\frac{4}{25}x \text{ e } y_2 = 4x$$

Figura 4.1 Diâmetros conjugados da elipse: y_1 e y_2



Fonte: Autores

2 – Encontre as equações das retas dos diâmetros conjugados da cônica de equação $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{25} = 1$, dada a direção $m = 2$ de um desses diâmetros.

Solução: a equação reduzida da que questão é uma hipérbole, como $a^2 = 36$ e $b^2 = 25$ o eixo real da hipérbole está contido no eixo O_x e com centro na origem. Sendo assim, a equação de um desses diâmetros e dada por:

$$y_1 = \frac{25}{36m}x$$

A direção de um dos diâmetros é $m = 2$, substituindo:

$$y_1 = \frac{25}{36 \cdot 2}x \therefore y_1 = \frac{25}{72}x$$

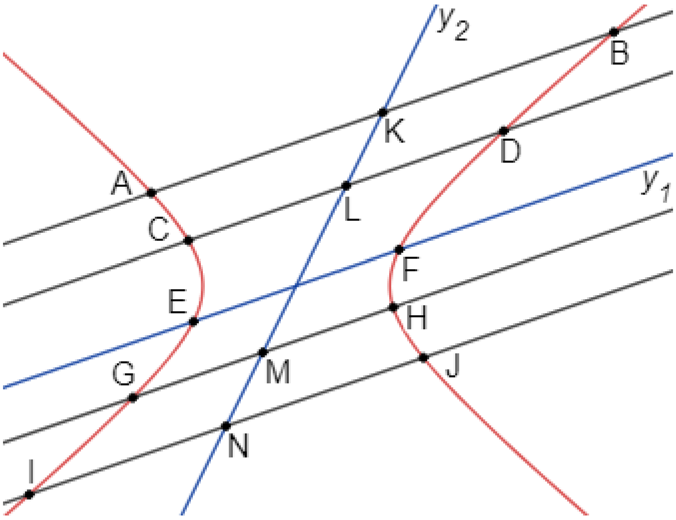
Daí, obtemos a equação de um diâmetro da hipérbole. Agora, como o coeficiente angular de y_1 é $\frac{25}{72}$, temos:

$$m_1 \cdot m_2 = -\frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{25}{72} \cdot m_2 = \frac{25}{36} \Rightarrow m_2 = 2$$

Daí, obtemos o coeficiente angular de y_2. Logo, os diâmetros conjugados dessa hipérbole passam pela origem, substituindo m_2 obtemos a segunda reta: $y_2 = 4x$. Portanto, as equações das retas dos diâmetros conjugados da hipérbole são:

$$y_1 = -\frac{4}{25}x \text{ e } y_2 = 4x$$

Figura 4.2 Diâmetros conjugados da hipérbole: y_1 e y_2



Fonte: Autores

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS/ CONCLUSÕES

Neste trabalho exploramos as cônicas: elipse, hipérbole e parábola; abordando suas definições, seus principais elementos e algumas de suas equações. Todavia, apresentamos um simples estudo sobre os diâmetros de cônicas, eixo que geralmente é pouco explorado nos livros de geometria analítica, mas que apresenta diversas aplicações e esta presente em várias construções. Posteriormente, apresentamos algumas construções que proporcionam uma visualização mais explicativa sobre as cônicas como os seus elementos, as definições de diâmetros e diâmetros conjugados e, por fim, apresentamos uma proposta de atividade.

Contudo, o estudo sobre as seções cônicas se mostrou bastante rico e encantador desde de sua descoberta, as suas aplicações e presença na natureza. Não foi à toa que Malba Tahan afirmou em seu livro o homem que calculava que: “Deus foi o grande geômetra. Geometrizou a terra e o céu.”

Por fim, este trabalho possibilitou conhecer um assunto que geralmente não é visto nos cursos de licenciatura ou bacharelado em matemática e áreas afins e com ele pretende-se contribuir para o desenvolvimento de futuras pesquisas sobre o diâmetro das cônicas, e levar alunos do ensino superior e ensino médio a conhecerem este tema que geralmente não é abordado em nossas salas de aula e nem nos livros de Geometria Analítica.

REFERENCIAS

Brasília: MEC/SEF, 1998. ______. **Orientações curriculares para o ensino médio**: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: MEC/SEMTEC, 2006.

COSTA, Deodorio Souza da et al. **Diâmetros de cônicas: Uma proposta de abordagem no Ensino Médio**. 2019.

DOMINGUES, Hygino H. Seções Cônicas: história e ensino. **Revista De Educação Matemática, v. 6, n. 4, p. 43-50**, 1998.

GÓMES, J.J.D.; FRENSEL, K.R.; CRISSAFF, L.S. **Geometria analítica**. 1ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2014. Coleção: PROFMAT.

GUIMARÃES, C. S. **Álgebra Vetorial e Geometria Analítica**, 1a ed. Fortaleza - CE: Vestseller, 2013.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSAJN, D., PERIGO, R, ALMEIDA, De N., et al. **Matemática - ciências e aplicações**, 9 ed. São Paulo: Saraiva, 2016.

PAIVA, M., et al. **Matemática – Paiva**, 2 ed. São Paulo: Moderna, 2013.

RODRIGUES, Mariana Catão. **Cônicas: Propriedades e Curiosidades**. 2014.

SANTOS, Sérgio Leandro dos et al. Uso de cordas paralelas para a resolução gráfica de problemas de tangência em curvas cônicas: aplicação em geometria descritiva. **Revista educação gráfica. Vol. 16, n. 2 (2012), p. 41-58,** 2012.

SILVA, Fabiano da Conceição et al. **UM ESTUDO SOBRE CÔNICAS: aspectos históricos e seu ensino**. 2018.

TALAVERA, L.M.B.; BROLEZZI, A.C.. **Da história das Cônicas á Geometria Dinâmica**. 2012.

TAHAN, Malba. **O homem que calculava**. 72. ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.