

O TRATAMENTO VETORIAL PARA CONCEITOS DE GEOMETRIA ANALÍTICA DO ENSINO MÉDIO USANDO O GEOGEBRA

Nallyson Felipe da Silva

nfs@discente.ifpe.edu.br

Erivaldo Ferreira de Moraes Júnior

erivaldo.moraesjunior@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

O tratamento vetorial da Geometria Analítica vem sendo excluído das discussões em ementas curriculares estaduais e livros didáticos do Ensino Médio no decorrer das duas últimas décadas. Sendo assim, este trabalho apresenta como metodologia uma revisão da literatura com ênfase na abordagem qualitativa, a qual visa o tratamento de transformações isométricas em sala de aula com o uso do GeoGebra, *software* matemático gratuito que pode ser instalado, inclusive, em *smartphones* e *tablets*. Nossa proposta discute especificamente operações isométricas de reflexão, translação e rotação no plano em que, para cada uma destas, há no aplicativo um comando equivalente para tratamento de vetores no plano. Isso nos permitiu afirmar que há a possibilidade de inclusão dessas tecnologias no ambiente escolar, o que pode melhorar a visualização de conceitos abstratos como os tratados através da discussão vetorial da Geometria Analítica, além de permitir um processo interdisciplinar em sala de aula.

Palavras-chave: GeoGebra; Geometria Analítica; Ensino Médio.

ABSTRACT

The vectorial treatment of Analytical Geometry has been excluded from discussions in state curricular menus and high school textbooks over the past two decades. Therefore, this work presents as methodology a literature review with emphasis on the qualitative approach, which aims to treat isometric transformations in the classroom with the use of GeoGebra, free mathematical *software* that can be installed, even, on smartphones and tablets. Our proposal specifically discusses isometric operations of reflection, translation and rotation in the plane in which, for each of these, there is in the application an equivalent command for treating vectors in the plane. This allowed us to affirm that there is the possibility of including these technologies in the school environment, which can improve the visualization of abstract concepts such as those treated through the vector discussion of Analytical Geometry, in addition to allowing an interdisciplinary process in the classroom.

Keywords: GeoGebra; Analytical Geometry; High school.

1 INTRODUÇÃO

No decorrer das últimas décadas novos estudos vêm surgindo para confrontar os déficits de aprendizagem na educação básica, principalmente na formação básica na área de ciências. Em particular, quando falamos de ensino de Matemática, se faz notar que com o curso dos dias novos assuntos e novas abordagens pedagógicas são desenvolvidas acerca das dificuldades da prática educacional dessa disciplina desde o nível mais fundamental – Pré-Escola e primeiros anos do Ensino Fundamental (CANAVARRO, 1993; GORDO, 1993; CORDEIRO & OLIVEIRA, 2013) – estendendo-se até as últimas etapas da educação básica - Ensino Médio (SANTOS et. al., 2007; PACHECO & ANDREI, 2017) e primeiros anos do ensino superior (MASOLA & ALLEVATO, 2016).

Observando o atual quadro nacional de ensino no Brasil, pesquisas foram realizadas para tentar identificar quais são os desafios que podem ser encontrados e quais são as possíveis abordagens para a solução do problema. Dentre os resultados de pesquisa discutidos, podemos citar os encontrados por Furlani (2016), que importantemente mostra que os resultados das avaliações nacionais do ensino básico não tiveram bons indicadores, podendo ter diversas causas como: falta de conhecimentos prévios para aprendizagem significativa, intolerância com a disciplina devido ao mau desempenho, etc. O autor também cita em sua pesquisa os resultados apresentados por Tokarnia (2016), em que foram analisadas as médias dos Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), colocando os resultados obtidos na época da pesquisa no pior patamar dos últimos 20 anos no país.

Dentre os tantos temas abordados pela Matemática no decorrer do processo de ensino-aprendizagem no nível básico, podemos citar um tema muito importante e de difícil compreensão e abstração que é a Geometria Analítica (GORDO, 1993). A utilização da tecnologia como ferramenta auxiliar na superação de obstáculos pedagógicos nesse assunto particular tem sido alvo frequente de debate, principalmente nas últimas duas décadas (BREDA et. al., 2013; DIAS, 2018; FURNANI, 2016; RODRIGUES, 2015), período em que surgiram *softwares* próprios para construção de objetos matemáticos.

A utilização de *softwares* para melhor visualização de conceitos abstratos já foi discutida e as consequências do seu uso vão desde o desenvolvimento de uma melhor visualização dos conceitos até o melhoramento do raciocínio lógico quando o aluno se depara com alguma situação parecida com aquela simulada computacionalmente (BREDA, 2013; FURLANI, 2016; SILVA et. al., 2017).

Muitos *softwares* educacionais foram desenvolvidos nos últimos anos e no meio destes, podemos citar o GeoGebra. Este é um aplicativo de ensino matemático gratuito capaz de modelar de maneira simples alguns conceitos de cálculo, probabilidade, álgebra, etc., além de obviamente, ser uma plataforma que traz consigo a possibilidade de construir figuras e formas geométricas para estudo da Geometria Euclidiana que, como será mostrado, é o alvo deste trabalho.

A principal ideia desse estudo baseia-se na análise da aplicação de vetores em problemas de Geometria Euclidiana no Ensino Médio ao trazer a já conhecida proposta de exploração de tais problemas na plataforma GeoGebra (SANTOS et. al., 2007). O texto é baseado em trabalhos anteriores realizados nessa área e tem a finalidade de dar um novo enfoque a esses conceitos de Geometria Euclidiana no processo de ensino aprendizagem a nível médio.

Em termos mais específicos, esse trabalho tem como objetivo propor o tratamento de noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e

composição destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas como, por exemplo, fractais, construções civis, obras de arte, entre outros.

Ao discutir os conceitos de Geometria Analítica, baseando-se na literatura existente sobre o assunto, propõe-se a exemplificação e resolução de alguns exercícios propostos por livros didáticos do ensino médio utilizando o aplicativo GeoGebra, considerando os resultados encontrados na literatura sobre maneiras de utilizar o *software* em sala de aula.

Por fim, analisadas as possibilidades existentes dentro do escopo desse trabalho, são feitas as devidas considerações finais e observações acerca da possibilidade de implementação dessa metodologia em uma situação real.

Além do desenvolvimento dos conceitos de Geometria Analítica Vetorial na matemática o seu uso se dá nas mais diversas áreas como engenharia, arquitetura, física, arte, aeronáutica, computação, etc. Os conceitos de simetria, rotação e translação podem ser vistos em diversas pinturas e monumentos arquitetônicos como o Taj Mahal, por exemplo RODRIGUES, 2015).

Algumas outras definições como deslocamento, módulo, sentido, produto vetorial e escalar são as principais ferramentas utilizadas até hoje no controle de aviões, caças e até mesmo como ferramentas importantes para envio e controle de foguetes e satélites (ENSWORTH, 2013).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nessa seção serão discutidos alguns fundamentos de geometria analítica, mais especificamente tratando de assuntos relativos à geometria vetorial. Além disso, também são feitas algumas considerações sobre o ensino dessa temática no ensino médio incluído um tópico sobre o tratamento dessa disciplina com o auxílio do aplicativo GeoGebra.

Primeiramente, serão discutidos os temas de Geometria Analítica, tratando brevemente sua origem e apresentando em um exemplo simples a utilização de coordenadas em um plano cartesiano. Feito isso, é discutida a Geometria Analítica Vetorial, onde são exemplificados alguns conceitos simples através de uma situação hipotética onde em seguida é feita uma arguição sobre o ensino desse tema, trazendo à tona algumas discussões já feitas nessa área.

Por fim, apresentamos ao leitor o *software* utilizado nesse trabalho onde é exibida uma breve apresentação de pesquisas já realizadas com o GeoGebra indicando como este pode ser utilizado como ferramenta no processo de ensino-aprendizagem no ensino de Geometria Analítica Vetorial.

2.1 Geometria Analítica

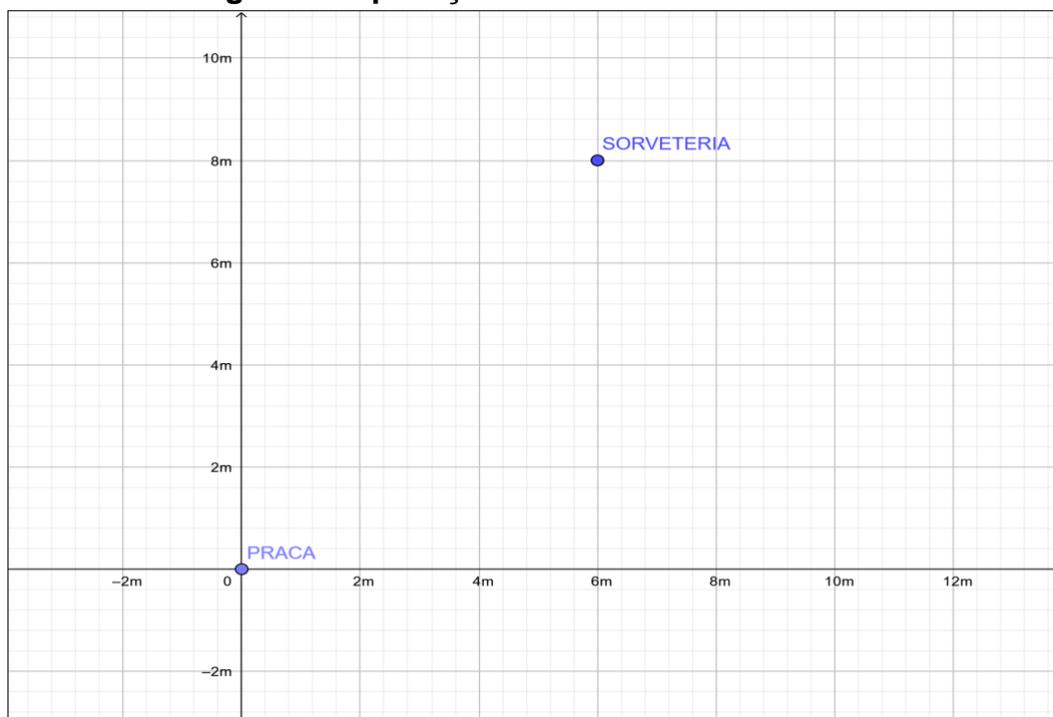
As primeiras noções estudos sobre Geometria datam do Egito Antigo e Grécia Antiga, onde os primeiros conceitos geométricos eram utilizados para demarcação de terras, desenho de mapas, construção civil, etc. (FURLANI, 2016). Na Grécia antiga surge a Geometria Euclidiana Plana que é uma área da Matemática que trata de Geometria em duas e três dimensões sendo baseada, como o próprio nome indica, nos postulados desenvolvidos por volta do século III a. C. pelo matemático Euclides de Alexandria (BICUDO, 2009).

O trabalho de Euclides está registrado em sua grande obra “Os Elementos” (BICUDO, 2009). A obra é composta por 13 livros dos quais os 04 primeiros tratam da Geometria Plana que era conhecida no período da sua escrita, além de também abordar nos últimos volumes Teoria dos Números, Geometria Espacial e Incomensuráveis (SANTOS, 2007). A Geometria Plana desenvolvida por Euclides consiste em assumir um pequeno conjunto de axiomas, dos quais se pode deduzir outras proposições que se provadas passam a ser teoremas.

A grande mudança na área ocorre em meados do século XVII onde foi fundamentada por muitos estudiosos e matemáticos, mas algumas formalizações e contribuições fundamentais na área são muito creditadas a Renè Descartes e Pierre de Fermat que, devido ao desenvolvimento da álgebra advinda dos séculos anteriores, a Geometria Plana passa a ser tratada algebricamente. Isso faz surgir uma área completamente nova: a Geometria Analítica (FURLANI, 2016).

O tratamento matemático da Geometria Analítica difere da análise da Geometria Euclidiana no que diz respeito à sua abordagem, que utiliza símbolos, equações e operações algébricas para resolver problemas geométricos a depender de um sistema de coordenadas, e. g., coordenadas Cartesianas, Esféricas ou Polares, ao invés de solucionar problemas de maneira axiomática como na Geometria Euclidiana. A maneira de solucionar problemas desenvolvida com a Geometria Analítica é muito utilizada na física, na engenharia e na computação gráfica, por exemplo (DANTE, 2005).

Figura 1 - Aplicação de Geometria Analítica¹



Fonte: Próprio autor

¹ - A Ilustração de uma aplicação simples de Geometria analítica em uma situação prática. O ponto SORVETERIA está a 6 m ao leste (eixo x) e 8 m ao norte (eixo y) da localização da PRAÇA, tomado como a origem do sistema de coordenadas cartesianas, representados ambos por pontos com seus nomes.

Um exemplo simples de aplicação de Geometria Analítica é a análise de coordenadas em um mapa, por exemplo. Podemos determinar a posição de um objeto qualquer (pessoa, mesa, carro, prédio, etc.) a partir da sua distância relativa a algum ponto arbitrário (lago, rodovia, armazém, etc.) na horizontal e na vertical (eixos x e y) de um plano cartesiano.

Podemos observar cenário a partir da seguinte situação hipotética:

Maria e João combinaram de se encontrar em um ponto da cidade. O ponto é uma sorveteria que se encontra à 6 metros de distância de uma praça na direção leste e 8 metros na direção norte. Se colocarmos em um plano cartesiano as coordenadas do ponto de encontro deles em relação a direções leste (x) e norte (y) relativos à praça, teríamos o seguinte esquema:

Na Figura 1 podemos ver como João e Maria poderiam representar a localização espacial da Sorveteria fazendo uso da Geometria Analítica. Para isso eles precisaria construir um sistema de coordenadas cartesianas a partir de uma origem arbitrária (ponto PRAÇA) em $x = 0$ e $y = 0$ do plano cartesiano e a partir dessa referência denotar as coordenadas da Sorveteria (ponto SORVETERIA) em $x = 6$ m e $y = 8$ m.

Outra maneira possível de analisar situações como essa é discutida através de um tratamento capaz de descrever também grandezas que não estão apenas relacionadas a quantidades, mas também a direções no espaço, que é o caso das grandezas vetoriais, tema que será alvo da próxima seção.

2.1.1 Geometria Vetorial

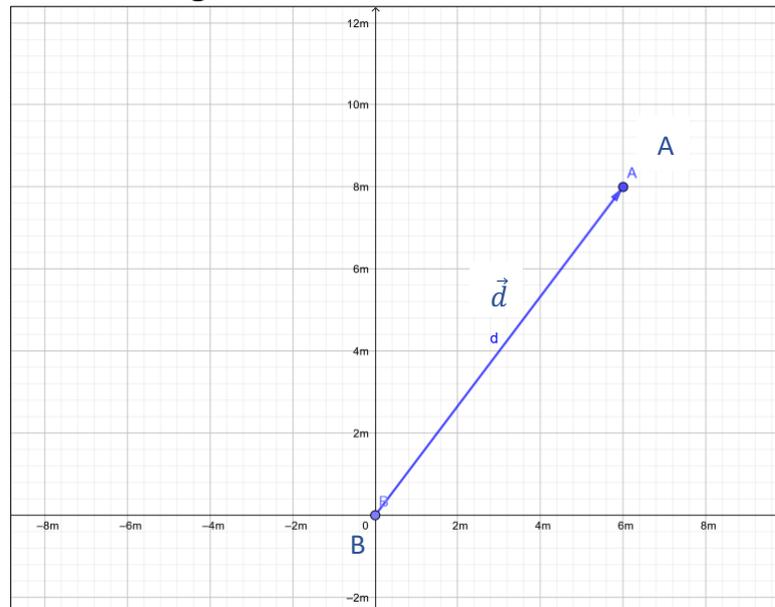
Para tratamento de um problema com o uso da Geometria Analítica se faz necessário determinar quais tipos de grandezas serão utilizadas para solução deste. Os tipos de grandezas são dois: escalares e vetoriais.

As escalares podem ser descritas simplesmente por um número real associado a uma unidade como temperatura, massa, voltagem, comprimento, etc. O segundo tipo de grandeza, a vetorial, além de ser determinada por um número real é também descrita pela orientação espacial de determinada grandeza, como direção e sentido. Grandezas vetoriais são comumente utilizadas na física e engenharia e têm grande importância por conseguir descrever quantidades como velocidade, deslocamento, campos elétricos e magnéticos, força, dentre tantos outros exemplos (RODRIGUES, 2015).

Com os vetores, se torna possível realizar operações distintas das operações comuns com grandezas escalares, em que precisa ser levado em conta a magnitude, direção e sentido do vetor para que a operação seja realizada corretamente. Dentre estas estão a soma, subtração, produto vetorial, produto escalar, cálculo de módulo de um vetor, etc. (SANTOS, 2010).

Podemos exemplificar a composição e utilização de um vetor tomando o exemplo de João e Maria descrito anteriormente. Supondo que ambos se encontram na PRAÇA (ponto B, figura 2) e desejam se deslocar até a SORVETERIA (ponto A, figura 2), eles precisariam deslocar-se 06 metros para o leste (eixo x) e 08 metros para o norte (eixo y). Esse deslocamento total pode ser representado por um vetor \vec{d} que possui módulo, direção e sentido, como mostrado na Figura 2.

Figura 2 - Vetor Deslocamento²



Fonte: Próprio autor

O vetor \vec{d} é definido pelas coordenadas B (0,0) e A (6,8) da seguinte forma:

$$\vec{d} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y}$$

$$\vec{d} = 6\hat{x} + 8\hat{y}.$$

Em que \vec{d} é definido a partir dos pontos iniciais e finais que definem os pontos A e B, em que x (y) e x' (y') são as coordenadas dos pontos finais e iniciais do vetor \vec{d} , respectivamente,. O vetor também pode ser representado por $\vec{d} = ((x - x'), (y - y'))$ em que cada posição no parêntese externo representa uma direção no espaço. Em que \hat{x} e \hat{y} denotam os vetores unitários nas direções x e y .

Operações entre vetores podem ser feitas, mas suas demonstrações estão além do escopo desse trabalho, podendo ser consultadas em livros texto padrão sobre Geometria Analítica - ver, por exemplo Rodrigues (2015). O exemplo de João e Maria será importante quando discutirmos uma abordagem para a utilização de vetores para tratar transformações isométricas a seguir.

Na seção seguinte discutiremos um pouco sobre o ensino de Geometria Vetorial no Brasil, que como citado anteriormente é o tema deste trabalho.

2.1.2 Ensino de Geometria Vetorial

No Brasil, a depender do estado, podemos encontrar diversas maneiras de abordagem pedagógica sobre Geometria Analítica em escolas do Ensino Médio, visto que as propostas já foram reformadas muitas vezes e estão sob o controle de cada estado (RODRIGUES, 2015).

Dentre os diferentes caminhos pedagógicos presentes no Ensino Médio sobre esse assunto, um está ausente em boa parte dos livros didáticos e ementas

² - Representação de um vetor deslocamento d (seta azul) indicando a direção do deslocamento do ponto B (PRAÇA) para o ponto A (SORVETERIA).

estaduais que é o que descreve as operações geométricas através de vetores, sendo muito mais frequentemente utilizado um tratamento puramente analítico (RODRIGUES, 2015).

Neste tipo de abordagem é apresentado o Plano Cartesiano e a partir dele as noções básicas de distância entre dois pontos na reta (\mathbb{R}) e no plano (\mathbb{R}^2), não sendo tratada de maneira alguma a natureza vetorial de tais situações, sendo esse reservado apenas quando o aluno se depara com assuntos da física (RODRIGUES, 2015; DIAS, 2018).

Algumas propostas já foram discutidas em relação ao tratamento vetorial, como a tratada por Silva (2013) que propõe que o ensino de geometria analítica vetorial se divida em quatro partes:

- Coordenadas: em que se apresenta como estabelecer o plano cartesiano e calcular distâncias entre pontos.
- Vetores no plano: introduzir de maneira simples e objetiva o conceito de vetores e de como operá-los, destacando o produto interno.
- Estudo da reta: onde se discute três tipos de equações de reta: paramétricas, cartesiana e reduzida e sempre que possível, realizar um tratamento vetorial no estudo da reta.
- Princípios de Geometria Analítica espacial: apresenta-se de que maneira os vetores no espaço \mathbb{R}^3 podem ser usados como uma maneira adicional no tratamento de vetores no plano (\mathbb{R}^2).

Rodrigues (2015), por exemplo, considera alguns benefícios em relação a abordagem vetorial que segundo o autor traz pelo menos três vantagens, sendo elas:

- i) Os vetores são objetos de fácil manipulação e frequentemente produzem, quando corretamente aplicados, soluções muito rápidas e elegantes para os problemas;
- ii) As equações da reta, em suas distintas formas, são facilmente encontradas e justificadas;
- iii) Os vetores são um conteúdo propedêutico ao estudo dos números complexos (RODRIGUES, 2015, p. 2).

Dessa maneira, no seu trabalho o autor propõe um plano de ensino baseado em vetores para ensino de Geometria Analítica que pode ser utilizado durante um ano letivo em uma rede de ensino (pública ou particular), concluindo que seus resultados corroboram com a aspiração de alguns profissionais da área em tratar a Geometria a partir de vetores nessa etapa do Ensino Básico.

Além de propostas de ensino, a revisão de livros didáticos indica que há realmente um descaso para com o trato dos vetores na Educação Básica. Em seu trabalho, Silva (2013) analisou obras voltadas à educação no Ensino Médio e constatou que durante um período de quase 15 anos (de 2001 até 2012), muitos dos mais famosos livros didáticos continuam com a mesma característica de não tratar vetores em nenhum dos 3 volumes abordados durante as séries do Ensino Médio.

No mesmo período escolar, esses assuntos são tratados de maneira breve em livros didáticos de Física. Com isso, podemos afirmar que muitos dos livros didáticos recentes são excludentes em relação aos assuntos relacionados a vetores.

Algumas propostas surgiram como alternativas ao abandono da abordagem não relacionada a vetores e estão sendo alvo de estudo de cada vez mais pesquisadores na área de ensino de matemática (SANTOS et. al., 2007; BREDA et al., 2013; FURLANI, 2016).

Se torna evidente a partir dos trabalhos citados acima que a ausência desse tema no ensino médio se dá por diversos fatores, variando desde as propostas estaduais de ensino até a construção dos livros didáticos que serão utilizados em sala de aula, sem nenhum enfoque na área. Tentamos, porém, mostrar como uma simples abordagem pode ser feita para tentar trazer esse assunto à tona no Ensino Médio, como será mostrado na próxima seção.

2.2 GeoGebra

Um dos métodos auxiliares que surge como proposta para abordar Geometria Analítica no Ensino Médio parte da utilização de *softwares* matemáticos, de fácil utilização, para auxiliar a visualização de conceitos que por muitas vezes são de difícil assimilação por parte dos alunos desde os primeiros anos do ensino básico (GORDO, 1993; CANAVARRO, 2007; PACHECO, 2018).

Essa dificuldade de abstração matemática depende de vários fatores, sendo que um comumente discutido se trata da dissociação da disciplina para com sua utilização no mundo real que segundo Rangel (1992, p.17), “o ensino de matemática nas séries iniciais não leva em conta suas experiências diárias, nas quais estabelece relações de semelhanças e diferenças entre objetos e fatos”. O autor pontua também que o estudante é responsável apenas pela classificação e quantificação dos objetos matemáticos retratados em sala de aula, tornando o assunto distante da vivência diária do discente não possuindo significado algum para ele.

Entretanto, o uso da tecnologia está cada vez mais presente na vida de todos e não seria diferente para com os estudantes, principalmente de nível médio em que a cada dia que passa, mais discentes têm acesso a computador, *smartphones* e *internet*. Tendo isso em vista, a junção de tecnologia e educação é um assunto muito debatido nos últimos anos, discutida como uma possível alternativa para alguns problemas associados justamente à falta de conexão com situações reais e com visualização dos elementos matemáticos abstratos tratados estaticamente em livros, limitando as possibilidades de interpretação dos educandos (SILVA et. al, 2017).

Nas perspectivas de trabalho presentes aqui, para tratamento vetorial, existem diversos aplicativos gratuitos disponíveis para abordagem desse tipo de construção Matemática. Apesar disso, iremos discutir o uso de apenas um deles: o GeoGebra. A utilização desse *software* permite ao usuário trabalhar os conceitos de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística dentre outras ferramentas construídas justamente para serem de fácil manipulação. Atualmente, segundo as informações do site do aplicativo geogebra.org/about (2020):

O GeoGebra possui uma comunidade de milhões de usuários em praticamente todos os países. O GeoGebra se tornou um líder na área de *softwares* de matemática dinâmica, apoiando o ensino e a aprendizagem em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática. (GEOGEBRA, 2020).

Além disso, o GeoGebra recebeu vários prêmios internacionais de melhor *software* de educação em matemática, para alunos e educadores, sendo comprovado como uma ferramenta muito útil para ensino dessa área. Sendo assim, propõe-se aqui, como afirmado anteriormente, uma ideia já discutida em outros trabalhos (SANTOS et. al., 2007; BREDA et al., 2013; FURLANI, 2016) de utilizar

esse *software* como ferramenta de ensino em turmas do Ensino Médio, tratando vetorialmente os temas de Geometria Analítica.

Alguns benefícios de se utilizar um aplicativo como este podem ser citados. O primeiro deles está no auxílio da associação entre a maneira algébrica de representação dos vetores e sua construção geométrica. Além disso, também pode servir para melhor sedimentar os conceitos abordados com o auxílio do *software* ao submeter o discente a uma situação diferente das comumente experimentadas em sala de aula (FURLANI, 2016). Também pode ser citada a maior participação dos estudantes, além de uma melhor aceitação por parte dos mesmos em relação aos temas, que causam desconforto devido à sua abstração (SILVA et. al., 2017).

Se torna válido salientar, além dos benefícios para o discente, que o papel do professor como ponte interdisciplinar entre os conteúdos (informática, ensino e matemática) passa a ser cada vez mais importante com a implementação de ferramentas tecnológicas em sala de aula, em que o professor agora tem também que ser responsável por criar experiências que ligam o estudante a realidade, não bastando o simples tratamento tradicional desconexo com a vivência diária dos alunos (FURLANI, 2016; MORAN, 2004).

A seguir discutiremos como poderia ser abordado os temas de transformações isométricas com o auxílio do GeoGebra.

3 TRANSFORMAÇÕES ISOMÉTRICAS COM O GEOGEBRA

Sendo o principal tema desse estudo, a análise de Transformações Geométricas no plano, mais especificamente as isometrias, tem uma particular importância porque a partir dela se pode unir muitos conceitos tratados pela Geometria Euclidiana, composta pelo estudo de objetos rígidos, com a álgebra desenvolvida na geometria Euclidiana (ARAGÃO, 2011).

Isometrias são um tipo especial de transformações no plano que preservam a distância entre dois pontos após as transformações no plano (REZENDE & QUEIROZ, 2000). Em termos vetoriais, transformações isométricas são aquelas que conservam o módulo do vetor tratado inalterado, conservando também, segundo Aragão (2011):

- A ordem dos pontos numa reta;
- A colinearidade dos pontos;
- A medida dos ângulos;
- O paralelismo das retas. (ARAGÃO, 2011)

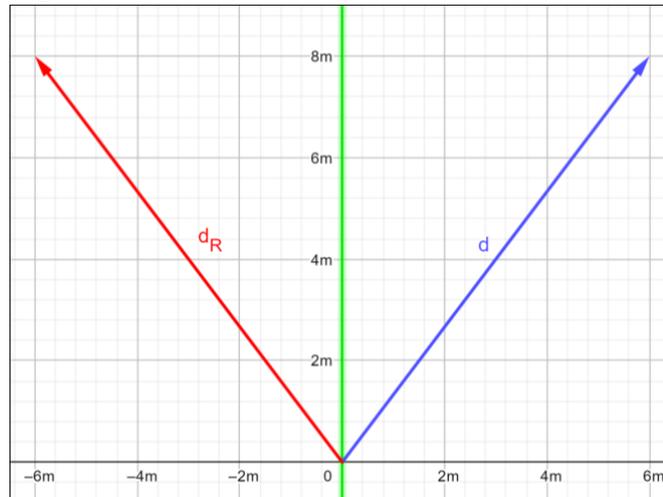
3.1 Reflexão

Uma importante aplicação de isometria se dá pela reflexão em retas, que por definição assume que uma “reflexão na reta r ou simetria axial é a transformação geométrica que fixa todos os pontos da reta r e associa cada ponto P do plano, não pertence a r , ponto P' , de modo que r é a reta mediatriz do segmento PP' ” (ARAGÃO, 2011). Podemos assim nomear a reta r como sendo a mediatriz do segmento PP' .

Utilizando esse conceito na geometria vetorial podemos, utilizando o exemplo de João e Maria citado anteriormente, realizar uma reflexão simples do vetor \vec{d} em relação um eixo de simetria localizado no eixo y , como exibido na Figura 3. Nesse exemplo temos a geração de um novo vetor $\vec{d}_R = -6\hat{x} + 8\hat{y}$.

Vale ressaltar que o módulo do vetor deve permanecer inalterado sobre transformações, em que $|\vec{d}| = |\vec{d}_R| = 10$. Esse vetor \vec{d}_R poderia corresponder a outro estabelecimento que os dois gostariam de visitar após ir à sorveteria, em uma situação hipotética que permitiria tratar esse conceito em sala de aula.

Figura 3 - Reflexão do Vetor Deslocamento³



Fonte: Próprio autor

No GeoGebra *Classic* (o *Classic* indica uma versão específica do programa) essa reflexão pode ser feita através de um comando do próprio programa. Este é denominado “Reflexão em relação a uma reta” encontrado como o primeiro item do nono botão superior do programa. Isso pode ser visto na Figura 4 abaixo:

Figura 4 - Menu de Operações de simetria no GeoGebra⁴



Fonte: Próprio autor

³ - Representação da reflexão do vetor deslocamento \vec{d} (seta azul) em relação ao eixo y (reta verde) resultando no vetor \vec{d}_R (seta vermelha).

⁴ - Imagem da tela do computador com o menu de reflexão ativo. Essa é uma maneira prática de mostrar a operação de reflexão com o auxílio do GeoGebra Classic.

Com isso, a partir da simples escolha da reta de referência (reta verde, eixo y na Figura 4) podemos realizar essa transformação no nosso vetor \vec{d} .

3.2 Translação

A transformação isométrica denominada como translação é aquela em que um objeto se desloca paralelamente em linha reta de um ponto a outro. Uma translação também é definida por uma isometria que desloca o objeto original segundo uma direção, um sentido e um comprimento, que são comuns a vetores. As translações conservam o módulo, a direção e os ângulos e dos segmentos de reta de uma determinada figura (ARAGÃO, 2011).

A definição de translação permite também que utilizemos uma translação sobre um vetor, utilizando outro vetor, sem que isso altere o módulo, direção ou sentido do primeiro. Utilizando um ponto arbitrário, como por exemplo o ponto PRAÇA, o mesmo dos exemplos anteriores, podemos realizar sobre este uma translação \vec{t} em uma direção e módulo arbitrários. Digamos que \vec{t} tenha valor de 6 metros na direção \hat{x} e 2 metros na \hat{y} , ou seja:

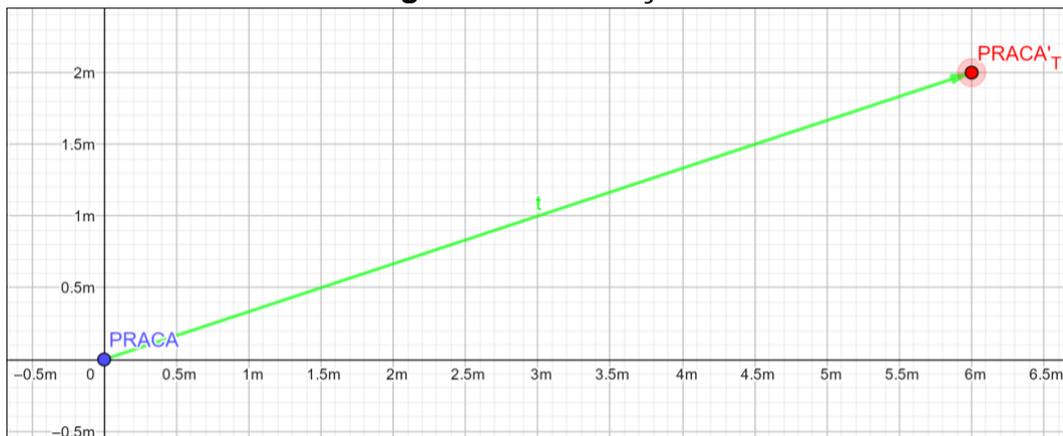
$$\vec{t} = 6 \hat{x} + 2 \hat{y}.$$

Para realizar a translação, precisamos somar as coordenadas de \vec{t} em cada uma das direções do espaço com as correspondentes do ponto PRAÇA, ou seja, as coordenadas do ponto se tornam:

$$PRAÇA_T = (6,2).$$

A ilustração dessa transformação pode ser vista na Figura 5 abaixo:

Figura 5 - Translação⁵



Fonte: Próprio autor

Podemos também ilustrar essa situação no exemplo anterior de João e Maria de maneira simples, como por exemplo o fato de tomar a Praça, distante 6m ao leste e 2m ao norte da posição anterior.

⁵ - Representação da translação do ponto PRAÇA (ponto azul) pelo vetor \vec{t} (seta verde) resultando no ponto PRAÇA_T (ponto vermelho).

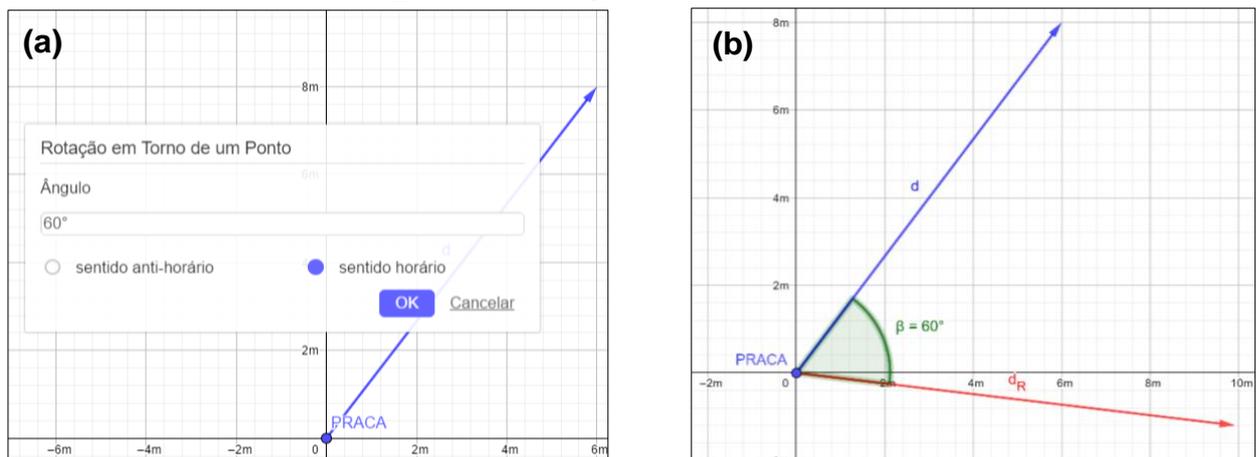
No aplicativo do GeoGebra essa isometria pode ser feita com poucos cliques se já tiver sido determinado o vetor \vec{t} . Essa opção pode ser vista como a penúltima opção no menu ativo da Figura 4.

3.3 Rotação

A rotação é uma isometria que ocorre quando giramos um objeto geométrico em torno de uma coordenada específica por um ângulo $0^\circ < \beta < 360^\circ$ (ARAGÃO, 2011). Essa transformação altera a direção e o sentido do objeto, mantendo suas dimensões inalteradas.

Podemos aplicar uma transformação como essa ao vetor \vec{d} citado anteriormente com o auxílio do GeoGebra. Nesse caso, rotacionamos o vetor por um ângulo de 60° no sentido horário, selecionando a quarta opção no menu ativo mostrado na Figura 4. A partir disso podemos escolher por qual ângulo rotacionar a partir de um ponto, que aqui foi escolhido como o ponto PRAÇA (0,0). Isso pode ser visto na Figura 6 (a) junto do vetor obtido após a rotação, Figura 6 (b).

Figura 6 - Rotação de um Vetor⁶



Fonte: Próprio autor

Esse exemplo pode servir para ilustrar como se pode visualizar essas transformações de rotação com o auxílio do programa em uma situação criada pelo professor ou extraída de algum livro didático. Além disso o programa ainda nos dá os valores do vetor após a rotação, que pode ser feito tanto no programa quanto utilizando álgebra, cuja demonstração está ausente nesse texto. O valor encontrado no GeoGebra do vetor rotacionado foi $\vec{d}_R = 9,93 \hat{x} - 1,2 \hat{y}$. Os exemplos acima podem ser estendidos para 3 dimensões, sem perda alguma de generalidade, bem como utilizado para operações compostas por duas ou mais transformações.

Essa abordagem concorda com a discutida por Silva (2013) para tratamento vetorial em Geometria Analítica, uma vez que em um simples exemplo se pode discutir os conceitos de coordenadas, vetores no plano, estudo da reta e geometria analítica espacial, o que torna a ferramenta muito útil em termos de visualização do conceito.

⁶ - (a) Rotação do Vetor \vec{d} (seta azul) em relação ao ponto PRAÇA (ponto azul) em $\beta = 60^\circ$ no sentido horário. (b) resultado da rotação do vetor \vec{d} resultando no vetor \vec{d}_R (seta vermelha).

Outros problemas encontrados na literatura também podem ser resolvidos com o GeoGebra, como por exemplo os exercícios extraídos de livros didáticos discutidos por Rodrigues (2015) e Furlani (2016) que vão além do tema tratado aqui, mas podem ser úteis para a construção de novas abordagens utilizando o aplicativo.

Como o programa é gratuito e pode ser instalado também em *smatphones*, o professor pode utilizar o *software* para realização de trabalhos de casa por parte dos alunos, uma vez que tendo o discente aprendido como ele funciona, este tornaria mais fácil a resolução de alguns problemas matemáticos (FURLANI, 2016).

Em seguida serão apresentadas as respectivas conclusões sobre as possibilidades de utilização do GeoGebra como ferramenta pedagógica que foram analisadas até aqui.

4 COSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho podemos realizar um breve levantamento sobre a pesquisa que vêm sendo desenvolvida acerca do ensino de Geometria Analítica com foco vetorial e podemos notar que há um descaso em relação ao estudo dessa área específica tanto pelas ementas de ensino estadual, quanto pela ausência da discussão desse tema em livros didáticos do ensino médio.

Além disso, o avanço tecnológico tem permitido verdadeiras revoluções no nosso dia-a-dia e essa realidade não deveria ser excluída do meio educacional. Tendo isso em vista, foi construída uma exemplificação (a partir de uma situação arbitrária e simples) de como um aplicativo matemático gratuito pode auxiliar o trabalho do docente em sala de aula ou mesmo fora dela, mostrando as possibilidades de discussão de Geometria Analítica com foco Vetorial.

Foram tratados com o GeoGebra alguns temas que constituem as transformações isométricas de Translação, Rotação e Reflexão, que ao utilizar situações hipotéticas simples, se pôde discutir os temas com a intenção de provocar o aluno a visualizar uma situação que poderia ser real. Essa situação ainda tem o bônus de ser auxiliada pela ferramenta visual do aplicativo.

Visto isso, torna-se possível afirmar que o objetivo deste trabalho foi alcançado, na medida em que foram construídas e desenvolvidas as referidas figuras relacionadas ao tema da pesquisa. Ademais, enfatiza-se que mais pesquisas devem ser devolvidas atribuindo o campo prático da aplicação do GeoGebra nas diversas áreas da engenharia, arquitetura, física, dentre outros, visto que o trabalho desenvolvido, apenas propõe seu uso teórico em construções dessas áreas, mas não chega a executá-las no campo prático.

Dessa forma, no que tange a sua aplicabilidade em sala de aula, acreditamos que atividades como essa podem ser melhor desenvolvidas, tendo a possibilidade de contribuir com o processo de ensino-aprendizagem em uma área que demanda muito da capacidade de abstração de cada estudante, além de reforçar a interdisciplinaridade em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ARAGÃO, E. R. *Transformações Geométricas Isometriase Ornamentos*. Trabalho de Conclusão de Curso. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Unicamp. Campinas, São Paulo, 2011.
- BREDA, A. & TROCADO, A. & DOS SANTOS, J. *O Geogebra para além da segunda dimensão*. *Indagatio Didactica*. 5, 2013.
- CANAVARRO, A. P. *O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática*. *Quadrante*, Vol. XVI, Nº 2, 2007.
- CORDEIRO, E. M.; de Oliveira, G. S. *Os primeiros anos do ensino fundamental: um estudo psicopedagógico sobre as origens das dificuldades de aprender matemática*. *Encontro de pesquisa em educação*, 7, 2013. *Anais...* v. 1, n. 1, Uberaba, 2013.
- DANTE, L. R. *Matemática Dante*. Volume Único, v. 1, 2005.
- DIAS, A. S. *A utilização de vetores auxiliando o aprendizado da Geometria Analítica no Ensino médio*. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologias, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- ENSWORTH, C. *Thrust Vector Control for Nuclear Thermal Rockets*. In: 49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, p. 4075. 2013.
- FURLANI, C. *O uso de conceitos de Geometria Analítica no Ensino Médio com o Auxílio do GeoGebra*, 1993. Dissertação de Mestrado (Mestrado Profissional em Matemática) – Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa.
- GEOGEBRA. *Aplicativos Matemáticos*. Disponível em: <https://www.geogebra.org/> . Acesso em: 20 ago. 2020.
- GORDO, M. F. P. C. M. *A Visualização Espacial e a Aprendizagem da Matemática*. 1993. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências e Tecnologias, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- MASOLA, W. de J.; ALLEVATO, N. S. G. *Dificuldades de aprendizagem matemática de alunos ingressantes na educação superior*. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 64-74, jun. 2016. ISSN 2447-3944. Disponível em: <https://seer.imed.edu.br/index.php/REBES/article/view/1267>. Acesso em: 14 set. 2020. doi:<https://doi.org/10.18256/2447-3944/rebes.v2n1p64-74>. *nos primeiros anos*. *Quadrante*, Vol. XVI, Nº 2, 2007.
- MORAN, J. M. *Os novos espaços de atuação do professor com as tecnologias*. *Rvista Diálogo Educacional*, Curitiba, v. 4, n. 12, p. 15, Mai/Ago 2004.
- PACHECO, M. & ANDREIS, G. *Causas das dificuldades de aprendizagem em Matemática: percepção de professores e estudantes do 3º ano do Ensino Médio*,

2018. Revista Principia - Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB. 1. 105. 10.18265/1517-03062015v1n38p105-119.

RANGEL, A. S. *Educação matemática e a construção do número pela criança*. Porto Alegre. Artes Médicas, 1992.

REZENDE, E. Q. F. QUEIROZ, M. L. B. *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Editora Unicamp, Campinas, 2000.

RODRIGUES, J. M. *Geometria analítica com enfoque vetorial no ensino médio*, 2015. Dissertação de Mestrado (Mestrado profissional em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, SP.

SANTOS, J. A.; FRANÇA, K. V.; SANTOS, LSB dos. *Dificuldades na aprendizagem de Matemática*. Monografia de Graduação em Matemática. São Paulo: UNASP, 2007.

SANTOS, R. J. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Minas Gerais: UFMG, 2010. ISBN 85-7470-014-2.

SILVA, R. I.; IGREJA, J. A.; OLIVEIRA, M. P. de O.; RODRIGUES, P. G. JUNIOR, S. A. J. *Análise geométrica do estudo das posições relativas entre reta e plano com o Geogebra*. REVEMAT. Florianópolis (SC), v.12, n. 1, p. 78-86, 2017.

SILVA, R. S. *Geometria analítica no ensino médio: uma proposta com tratamento Vetorial*, 2013. Dissertação de Mestrado (Mestrado profissional em Matemática) – Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, ES.

TOKARNIA, M. *Desempenho de estudantes do ensino médio é menos que os de 20 anos atrás*, 2016. Disponível em: <https://agenciabrasil.ebc.com.br/educacao/noticia/2016-09/desempenho-de-estudantes-do-ensino-medio-e-menor-que-o-de-20-anos-atras#:~:text=O%20desempenho%20de%20estudantes%20no,b%C3%A1sico%2C%20concentrando%20os%20piores%20indicadores>. Acesso em: 14 de set de 2020.