TRIGONOMETRIA: UMA DISCUSSÃO HISTÓRICA

Maria Thaywana Valença Silva

thaywana.valenca@hotmail.com

Airlan Arnaldo Nascimento de Lima

airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

A motivação para realização do presente estudo surgiu a partir do ponto de vista de que a matemática poderia ser mais contextualizada e compreendida, inclusive na sala de aula, através de um olhar histórico. Muitos alunos chegam aos seus professores questionando sobre a origem da matemática. Surgem perguntas do tipo: “quem inventou (ou descobriu) a matemática? ”, “ quem foi o primeiro matemático? ”. Uma reflexão mais aprofundada nos leva a perceber que buscar repostas para tais questões exige trilhar um longo percurso de construção histórica. Portanto, este trabalho é caracterizado por uma metodologia de pesquisa qualitativa que tem como base de argumentação histórica algumas referências e nomes de grandes autores, como por exemplo Boyer e Eves. Cientes da complexidade desta jornada, optamos por delimitar nosso estudo ao caso do desenvolvimento da trigonometria. A justificativa para nossa escolha está ancorada em inquietações que surgiram e foram fomentadas durante nossa formação inicial, desde a educação básica até o curso de licenciatura em matemática. Mais especificamente, nossos estudos e vivências em disciplinas específicas de matemática, estágio supervisionado e prática de ensino, consolidaram a perspectiva de que a compreensão de elementos da historia da trigonometria pode dar sentido a diversos conceitos estudados nos diferentes níveis de ensino. Dessa forma, o objetivo deste artigo é discutir aspectos históricos do desenvolvimento da trigonometria, desde suas origens até tempos recentes. Como principal achado do estudo, evidenciamos que diferentes povos colaboraram na construção e difusão da trigonometria, ao longo de vários séculos.

Palavras-chave: Trigonometria. História. Aplicações.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho de conclusão de curso apresenta um estudo sobre aspectos históricos do desenvolvimento da trigonometria ao longo dos anos, desde sua gênese até os dias atuais, bem como as evoluções dos algoritmos utilizados para resolver alguns problemas da astronomia, geografia e dentre tantas outras áreas de conhecimento científico.

Considerando isto como nosso objetivo e as especificidades do objeto de estudo, optamos por uma abordagem metodológica de caráter qualitativo, envolvendo uma pesquisa bibliográfica em textos consolidados no meio acadêmico.

A trigonometria é um ramo da matemática onde os gregos e babilônios foram os pioneiros a analisar e desenvolver estudos sobre as relações existentes entre os lados e os ângulos dos triângulos retângulos enquanto tentavam resolver os clássicos problemas de astronomia: tamanho da Terra e a distância entre a Lua e o Sol.

A exploração da temática deste trabalho tem total relevância e importância, pois faz-se um convite para compreender as aplicações da trigonometria nos mais variados campos da ciência. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), ao abordar problemas da História da matemática, o professor oportuniza aos alunos conhecerem esta ciência como campo do conhecimento que se encontra em construção e isto é válido para qualquer assunto ou conteúdo isolado da matemática.

> A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. Além disso, conceitos abordados em conexão com sua história constituem veículos de informação cultural, sociológica e antropológica de grande valor formativo. A

> História da Matemática é, nesse sentido, um instrumento de resgate da própria identidade cultural. (PCNs.1998,42).

A trigonometria, como qualquer outra área científica, desenvolveu-se no mundo antigo a partir de necessidades que foram se moldando através da modernidade e sendo abraçada em várias áreas da ciência.

Hoje, na astronomia, a utilizamos na localização de posições aparentes de objetos celestes fazendo uso da técnica da triangulação para estimar suas distâncias, bem como na navegação e aviação. Na geografia, pode-se estimar distâncias entre divisas e em sistemas de navegação por satélite, por exemplo. Na medicina também desenvolve um papel muito importante para o funcionamento de equipamentos clínicos, como é o caso da Tomografia Computadorizada e a Ultrassonografia, sem contar com as áreas da: química, sismologia, arquitetura, engenharias, cartografia, desenvolvimento de jogos, etc.

Assim, para melhor análise e reflexão dos fatos, este artigo foi dividido em quatro pontos chaves: Origens – Construções egípcias; A Trigonometria na Grécia; A contribuição dos Hindus; A Trigonometria Renascentista e o início da era moderna. Através desses tópicos será possível obter conclusões mais concretas e claras à cerca do desenvolvimento do tema abordado.

2 ORIGENS – CONSTRUÇÕES EGÍPCIAS

A trigonometria não foi inventada em sua totalidade da noite para o dia e nem foi um feito de apenas um indivíduo ou nação, mas sim o somatório de todas as contribuições das antigas e atuais civilizações.

Segundo Boyer (1947), os povos egípcios já a utilizavam a trigonometria, de forma inconsciente, nas construções de suas pirâmides. Sua trigonometria era considerada primitiva, pois ainda não existia as relações métricas do triângulo retângulo naqueles tempos, porém, o pensamento era o mesmo, mesmo que sendo aplicado com outras unidades e padrões de medidas diferentes dos nossos.

Sabe-se que nessas construções era muito importante manter sempre a inclinação das faces da pirâmide dando o afastamento da face oblíqua da vertical para cada unidade de altura e, por esta preocupação, eles introduziram o conceito equivalente à cotangente de um ângulo. Na construção das grandes pirâmides, esses povos utilizaram alguns conceitos matemáticos importantes, como por exemplo, o do ângulo de 90° (reto), o das relações de razão e proporção, o do segmento áureo φ (“Phi”) e da aplicação do triângulo pitagórico e sua unidade de medida, o cúbito: que é a distância do cotovelo à ponta do dedo médio, segundo a anatomia do Faraó.

As observações de Haus (1999-2020) também convergem em relação às anteriores:

> Ao se observar as pirâmides, nota-se o uso de noções de trigonometria, aplicadas por meio do cálculo de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. Mas o que mais impressiona na arquitetura das pirâmides é que as relações matemáticas entre suas medidas são perfeitas e se enquadram totalmente nas três relações apresentadas abaixo, que são aplicações do Teorema de Pitágoras, mesmo este tendo surgido quase mil anos após a construção dessas pirâmides. (Haus, 1999-2020)

Haus (1999-2020) defende que o uso do segmento áureo é recorrente nesse tipo de construção, pois cada bloco da pirâmide é 1,618 vezes maior que o bloco do nível superior. As câmaras interiores das pirâmides também seguem este mesmo padrão de proporção com relação as dimensões de comprimento e largura do local de forma que a largura é 1,618 vezes menor que o comprimento.

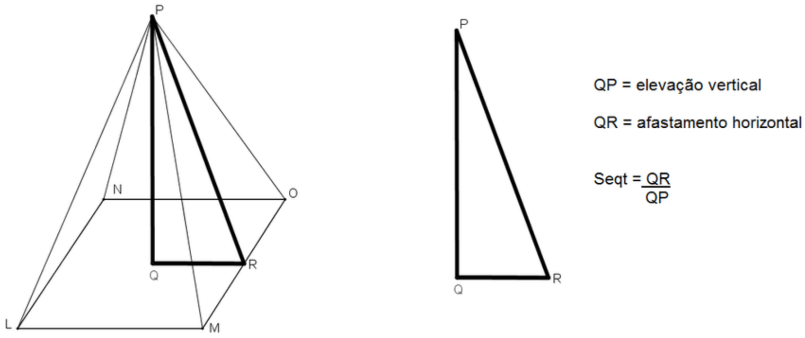
É notório a presença da aplicação do triângulo pitagórico nas edificações egípcias, Baumkart diz que “ as noções de trigonometria foram aplicadas utilizando cálculos de razão entre números e os lados de triângulos”. Isso fez com que estes monumentos se tornassem perfeitos e com comprovação da aplicação do teorema de Pitágoras, embora o mesmo surgiu cerca de mil anos depois das construções. Assim, a matemática e conhecimento utilizado pelos egípcios é comprovado pelas informações estão contidas no Papiro Rhind, de cerca de 1650 a. C. Nele contém problemas e resoluções de um escriba chamado Amósis. Dos 84 problemas matemáticos que nele havia, quatro faziam menção a “seqt” de um ângulo.

Este, por sua vez, é o conceito determinante do sucesso das construções faraônicas, pois era necessário manter a constante inclinação das faces das pirâmides e para isso acontecer era preciso colocar em prática o conceito similar ao da cotangente de um ângulo. Analisando o contexto, esta explicação é o que fica subentendida, pois Amósis não foi muito claro em suas anotações, mas Boyer explica o que, de fato, significa “seqt”:

> A palavra egípcia *seqt* significava o afastamento horizontal de uma reta oblíqua em relação ao eixo vertical de cada variação de unidade de altura. (...) A unidade de comprimento vertical era o cúbito, mas para medir a distância horizontal a unidade usada era a mão medindo um sétimo de cúbito. Portanto, o seqt da face de uma pirâmide era o quociente do afastamento horizontal pelo vertical, o primeiro medido em mãos, o segundo em cúbitos. (Boyer, 1974.pág.14)

Para melhor entendimento, a imagem a baixo demonstra exatamente o significado, na prática, do que seria o “*seqt”*.

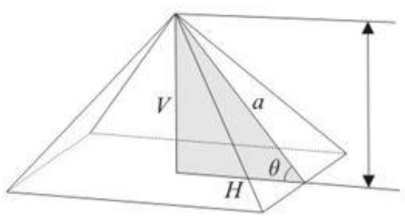
Figura 1 – Seqt



Fonte**:** https://www.researchgate.net/profile/William-Nascimento-2/publication/332907068/figure/fig7/AS:755906006499331@1557233444731/Figura-8-Demonstracao-do-seqt-em-uma-piramide-Fonte-Adaptado-de-Costa-1997.ppm, 1997.

Assim, com estas informações podemos observar as seguintes relações trigonométricas do ângulo θ tomando uma pirâmide regular qualquer como exemplo:

Figura 2 - Pirâmide



Fonte: https://www.obaricentrodamente.com/2010/08/o-seqt-de-uma-piramide.html, 2010.(Imagem com adaptação)

$$\mathrm{sen}(\theta) = \frac{V}{a} \tag{1}$$

$$\cos(\theta) = \frac{H}{a} \quad (2)$$

$$\tan\,(\theta) = \frac{V}{H} \quad (3)$$

$$\cot(\theta) = \frac{H}{V} \quad (4)$$

Logo, pelo método egípcio, vemos que da relação (4) a cotangente do ângulo θ formado pela face da pirâmide e pela base equivale ao “seqt” da pirâmide. Portanto, concluísse que:

$$S = \frac{H}{V}\ \text{cúbitos} \quad (5)$$

Usando estas informações podemos, por exemplo, determinar o seqt da pirâmide de Quéops, que tem 280 cúbitos de altura e 440 de aresta da base.

Sendo S = $\frac{H}{V}$,onde:

S = *seqt*

H= palmos

V= cúbitos

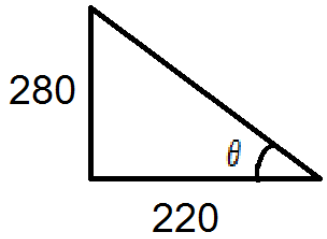
1 cúbito = 7 palmos

Note que para achar o seqt da pirâmide, devemos adotar 220 e não 440, visto que *H* equivale à metade do lado da base quadrangular. Vale salientar que deve-se deixar todas as medidas em apenas uma unidade. Como *V* é em palmos e um cúbito equivale à 7 palmos. Assim, temos:

$$S = \frac{H}{V} = \frac{7\,.\,220}{280} \quad (6)$$

Fazendo uma análise dessas informações e as trazendo para a nossa realidade e ao que estudamos hoje, podemos associar às relações métricas do triângulo retângulo:

Figura 3 – Triângulo retângulo



Fonte: Imagem própria, 2020.

$\frac{220}{280} = \frac{cateto\ adjacente}{cateto\ oposto} = cotangente$. Logo, $\cot\theta = \frac{220}{280}$.

Voltando para a equação (6), temos:

S = $\frac{7\ .\ 220}{280}$

S = 7. $\cot\theta$

Estes cálculos nos fazem concluir de que realmente a cotangente era utilizada nos sistemas de medição egípcios, ainda que de forma involuntária.

Além desta visível utilização trigonométrica nas medições das pirâmides, os egípcios, bem como os babilônios, demonstravam bastante interesse astronômico, tanto por questões religiosas quanto pelas conexões com o calendário e aos períodos de plantio. Assim, os estudos para essas áreas surgiram através da observação do nosso único satélite natural, a Lua, o que torna impossível de ser estudada suas fases sem usar triângulos.

As variações, com o passar dos dias, da Lua os deixou curiosos a ponto da percepção de que este satélite passa por fases devido às posições diferentes que a Lua ocupa em sua órbita em relação ao posicionamento da Terra e do Sol. São várias fases, mas podemos destacar quatro que recebem nomes especiais: Lua Nova. Lua Quarto Crescente, Lua Cheia, Lua Quarto Minguante.

Para os egípcios, era de extrema importância ter conhecimento das fases desse satélite, pois os cálculos de sementeira tinham que ser precisos, caso contrário, surgira a fome e ruínas para aquele povo. Como as cheias do grande rio Nilo parecia estar de acordo com as fases da Lua, os egípcios mediam as cheias e as vazantes do rio para que pudessem fazer sua programação de cultivo a fim de evitar perdas na produção. Dessa relação, os egípcios foram os primeiros homens a criar o calendário lunar. O mesmo era dividido em doze meses de 29 ou 30 dias.

Assim, todos esses saberes egípcios serviram como os primeiros degraus da ciência para os gregos, que não tardaram para aprimorar e superar o que foi deixado como herança do Egito. A matemática na Grécia ganhou seu espaço e obteve muito desenvolvimento, tornando a civilização grega uma grande preceptora a todas as outras nações.

3 A TRIGONOMETRIA NA GRÉCIA

Os estudiosos gregos geraram uma imensa contribuição e salto para a trigonometria e, claro, que não poderia deixar passar despercebido os seus grandes feitos neste artigo. A começar pela origem de nomenclatura. Trigonometria é uma palavra de origem grega que possui três radicais: tri (três), gonos (ângulos) e metron (medir), que têm como propósito o cálculo das medidas dos lados e ângulos de um triângulo. Foram eles que fizeram estudos sobre comprimento de cordas e as relações entre ângulos (ou arcos) numa circunferência.

O conceito de ângulo e como calcular sua medida é algo extremamente importante no desenvolvimento da Trigonometria, visto que ele é aplicável em diversas situações, como por exemplo, na compreensão das razões trigonométricas de um triângulo retângulo, onde os números dependem dos seus ângulos agudos e não exclusivamente da medida dos lados. Existem evidências, em forma de registro, de tentativas de medi-los. Chegaram até nossos dias alguns fragmentos de círculos que parecem ter feito parte de astrolábios primitivos, provavelmente usados como propósito de medições (Smith, 1958).

Como já foi dito, os ramos da matemática se edificaram de forma gradual e não ao mesmo tempo e nem da mesma forma. Segundo Eves (1995), os astrônomos babilônicos dos séculos IV e V a.C. acumularam uma massa considerável de dados de observações e hoje se sabe que grande parte desse material passou para os gregos. Foi dessa astronomia primitiva da Babilônia que deu origem à trigonometria esférica trabalhada pelos egípcios. Assim, como existiram vários matemáticos gregos, segue uma lista com alguns nomes importantes e as suas respectivas contribuições para a trigonometria:

3.1 PITÁGORAS E TALES

O desenvolvimento da trigonometria está diretamente relacionado ao da geometria, pois foram nesses ramos que protagonizaram os grandes sábios: Thales (625 – 546 a.C), com seus estudos de semelhanças de triângulo que dão base à trigonometria, e seu suposto pupilo Pitágoras (570 – 495 a.C), no qual, o próprio fez a demonstração de um dos mais famosos teoremas, aquele que carrega seu nome: "Em um triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos". É deste teorema que deriva a relação fundamental da trigonometria.

Tales de Mileto é reconhecido pelo fato de calcular a distância em que um barco se encontra em certo ponto do rio até a margem. A medição da altura das pirâmides do Egito comparada às projeções de suas sombras no chão também lhe é atribuído, além da sua autenticidade em função ao seu pensamento dedutivo que utilizou em seu trabalho com a geometria. Assim, cinco teoremas importantes que supostamente foram demonstrados por ele, foram relacionados ao mesmo pelo fato de utilizar as mesmas propriedades. São elas:

- Um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.
- Todo círculo está dividido em duas partes iguais por uma triangulo.
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- Os ângulos opostos pelo vértice que se formam ao cortarmos duas paralelas são iguais.
- Se dois triângulos são tais que dois ângulos do primeiro são correspondentes a dois ângulos de outro qualquer então eles são semelhantes.

Pitágoras pode ser considerado como um matemático que deu um novo entendimento para a matemática devido a resolução de um problema não solucionado em sua época que era de determinar as relações entre os lados de um triângulo retângulo e assim o fez. Provou que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

Ele nasceu em meados de 570 a.C. na ilha de Samos, Grécia. É provável que tenha sido pupilo de Tales, visto que era meio século mais novo do que ele e morava próximo a Mileto, cidade onde Tales vivia, embora alguns pesquisadores concordem e discordem com esse fato, o que realmente importa é que haviam semelhanças em suas linhas de raciocínio.

Ele é considerado tão importante porque, até então, os gregos não conheciam o símbolo da raiz quadrada e assim, o primeiro número irracional que veio a ser descoberto foi a raiz quadrada de dois, fato que surgiu da explicação de seu teorema quando relacionado a um triângulo retângulo de catetos iguais a um.

3.2 ARISTARCO

Aristarco de Samos (310-230 a.C.) foi tanto um astrônomo quanto um matemático grego. Ficou conhecido por sua tentativa pioneira de determinar os tamanhos e as distâncias Terra – Lua e Terra – Sol. Essas medidas foram calculadas em unidades de diâmetro terrestre o que torna este fato algo extraordinário, pois a medida do diâmetro da Terra só veio a ser determinado quase um século depois por Erastóstenes (276 a.C – 294 a.C.). Seus estudos serviram como influência para Copérnico, Kepler e Galileu quase 2 mil anos mais tarde.

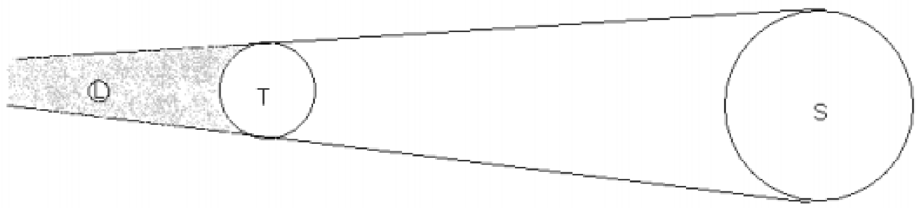
Suas conclusões à cerca da organização do Sistema Solar eram simples, porém muito admiradas até hoje devido à coerência que as mesmas expõem. Ele apresentou um modelo heliocêntrico do universo - modelo teórico que defende o fato de que a Terra e os demais planetas do nosso Sistema Solar se movem ao redor do Sol – que foi considerado um insulto religioso e ousado demais em sua época. Muitos de seus escritos foram perdidos com o tempo e apenas foram mencionados do Arquimedes. Mas, os trabalhos sobre os tamanhos e as distâncias do Sol e da Lua permaneceram por sua autoria e são considerados materiais valiosos para toda comunidade acadêmica.

Com seus cálculos, Aristarco demonstrou que a distância Terra-Sol é cerca de 19 vezes maior que a distância Terra-Lua, ou seja, TS =19 TL. Ele também calculou outras dimensões:

> A partir das demais hipóteses Aristarco obteve que a distância Terra-Lua é 40 vezes o diâmetro da Terra, a distância Terra-Sol é então 40×19=760 diâmetros terrestres. Ele também calculou o diâmetro da Lua como sendo 0,35 vezes o diâmetro da Terra e o diâmetro do Sol 6,7 vezes o diâmetro da Terra.(Silveira,2014)

Entretanto, na verdade, o valor de um ângulo que Aristarco admitiu ser 3 graus é apenas 0,15 graus e, como consequência disto, a distância Terra-Sol é quase 400 vezes a distância Terra-Lua e o diâmetro do Sol, estimado por ele como quase 7 vezes o da Terra, de fato é mais de 109 vezes maior do que o Terra.

Figura 4 – Modelo de Aristarco



Fonte: https://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/astronomia.pdf, 2006.

Logo, os resultados de Aristarco estão muito longe do valor que é aceitável hoje pela comunidade científica, todavia, os erros de precisão de Aristarco assumem pouca relevância frente a seu bom senso, pois sua linha de raciocínio tinha total sentido e isso contribuiu significativamente para que outros estudiosos pudessem, enfim, calcular as dimensões e distâncias de forma precisa.

3.3 ERATÓSTENES

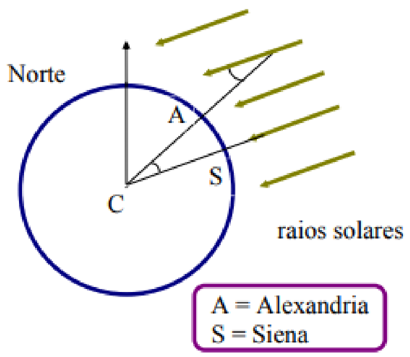
Eratóstenes de Cirene foi um grande matemático grego conhecido por calcular a circunferência e o raio da Terra com grande precisão. Foi diretor da Biblioteca de Alexandria, assim detinha muito material científico à sua disposição. Portanto, lendo um dos manuscritos da instituição, lhe veio a informação do seguinte fenômeno: Quando o sol se encontrava mais ao norte ao meio dia, ou seja, durante o Solstício de Verão, o Sol ficava quase exatamente no zênite na cidade se Siene (localizada a 800 km de Alexandria), de modo que podia ser observado no fundo de um poço.

Como em Alexandria o Sol não ficava suficientemente próximo do zênite, ele considerou o seguinte: “ tomada como estando no mesmo meridiano e 5.000 estádios ao norte de Siene tomou-se que o Sol lançava uma sombra indicando que a distância angular do Sol ao zênite era de um cinquentavo de um círculo” (BOYER, 1974. pág.117).

Ou seja, depois de ter constatado que a distância de Siene à Alexandria era de 5.000 estádios, ele encontrou o ângulo de inclinação dos raios solares; fixou uma haste perpendicular ao chão e mediu o comprimento da sombra em relação ao comprimento da haste, assim, encontrou o ângulo 7,2°, ou, simplesmente, cinquenta avos da circunferência que corresponde à 360°. Logo, ele concluiu que a circunferência da Terra deveria ser 5.000 x 50 = 25.000 estádios.

Devido aos raios solares serem praticamente paralelos entre si, conclui-se que o ângulo ACS também mede 7,2°.

Figura 4 – Raios solares



Fonte: http://www.fund198.ufba.br/trigo-pa/5-1aplic.pdf

Longo, utilizando proporcionalidade entre ângulos e arcos, Eratóstenes fez o seguinte cálculo:

$$\frac{2\pi R}{AS} = \frac{360}{7,2} \qquad (7)$$

Sendo R o raio da Terra e π = 3,14; temos:

$$2\pi R = \frac{360 \times 800}{7,2} \rightarrow R = \frac{40.000}{6,28} \rightarrow R \cong 6.369 \text{ km} \qquad (8)$$

Sabe-se que as dimensões utilizadas hoje são de 40.024 km e 6.378 km para a circunferência e o raio da Terra, respectivamente. Assim, conclui-se que Eratóstenes estava correto com sua linha de raciocínio, o que torna irrelevante essa pequena margem de erro frente à sua geniosa descoberta que é tão significativa para história e ciência.

3.4 HIPARCO E PTOLOMEU

Segundo Eves (1995), a primeira amostra documentada para o estudo da trigonometria deve-se a Hipsícles, pupilo dos povos babilônicos. Ele dividiu o zodíaco em 360 partes. Esta ideia foi aprimorada e generalizada por Hiparco (180 - 125 a.C.), pois poderia ser aplicada para qualquer círculo. Entretanto, esses escritos não chegaram até nós, porque tudo o que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas. Mas, acredita-se que na segunda metade do século dois a.C. Hiparco deu um grande passo para a trigonometria. Ele acreditava que a base de contagem 60 era a mais apropriada, assim, atribuiu o nome “arco de 1 grau” para cada parte da circunferência dividida em 360 partes. Ele dividiu cada arco de 1° em 60 partes resultando no arco de 1 minuto.

Ele também construiu o que supostamente seria a primeira tabela trigonométrica. Foi a chamada tábua de cordas, evidentemente para ser usada em sua astronomia, conteúdo este presente em seu tratado de 12 livros. Ele observou que dado um círculo qualquer, a razão do arco para a corda diminui de 180° para 0°. Então resolveu associar essas relações à um ângulo central correspondente cada corda do arco. Em decorrência disso, foi lhe atribuído o título de “Pai da Trigonometria”. (COSTA,1997)

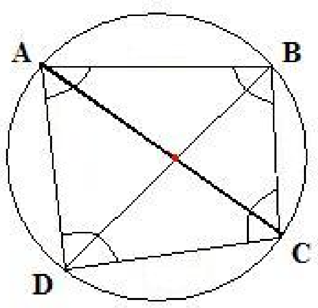
Em uma notação mais moderna, estas conclusões seria: $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Os trabalhos de Hiparco e de outros estudiosos da matemática e astronomia, foram reunidos na coleção composta por 13 livros – Almagesto - do matemático egípcio Claudius Ptolomeu (90 – 168 d.C.). Além de suas contribuições nas áreas da geografia, cartografia, teoria musical e astronomia, ele propôs um teorema que influenciou a matemática, em particular, a trigonometria. Este teorema carrega o seu nome: Teorema de Ptolomeu.

Considerando um quadrilátero ABCD inscrito numa circunferência como mostra a Figura 4. O Teorema de Ptolomeu diz que o produto das diagonais AC e BD é igual à soma dos produtos dos lados opostos, ou seja:

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC \qquad (9)$$

Figura 4: Teorema de Ptolomeu



Fonte: https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/teorema-ptolomeu.htm

Embora não fizesse o uso dos atuais termos ‘‘seno” e “cosseno”, ele utilizou o que pode ser considerado o indicador da relação fundamental da trigonometria:

$$\sin^2\theta + cos^2\theta = 1 \quad (10)$$

Este teorema é muito importante para o estudo da trigonometria, porque através dele podemos chegar ao teorema de Pitágoras e, se inserirmos a Lei dos Senos, chegamos na demonstração das fórmulas de soma e diferença de senos:

$$\sin(a + b) = \sin a \,.\cos b + \sin b \,.\cos a \quad (11)$$

$$\sin(a - b) = \sin a \,.\cos b - sen\, b \,.\cos a \quad (12)$$

4. CONTRIBUIÇÃO DOS HINDUS

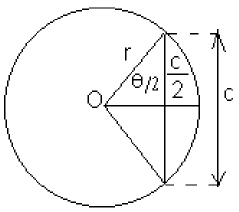
Uma das maiores contribuições da Índia de maior influência na história da matemática foi o concebimento do nosso sistema de numeração: o indo-arábico. Uma outra grandiosa contribuição foi a introdução de um equivalente da função seno na trigonometria para substituir a tabela grega de cordas. Há tabelas da função seno dos matemáticos *Siddhantas* e *Aryabhatiya* que ainda se encontram em estado de preservação.

> Aqui são dados os senos dos ângulos de 90°, para vinte e quatro intervalos iguais de 3 ¾° cada um. Para exprimir o comprimento do arco e o comprimento do seno em termos da mesma unidade, o raio era tomando como 3.438 e a circunferência como 360 x 60 = 21. 600. Isso significa um

valor para π concordando com o de Ptolomeu até quatro algarismos significativos. (Boyer,1974. Pág.157)

Por volta de 400 d.C, a Índia revelou-se um grande centro de conhecimento, medicina e arte. Neste mesmo período o que chegou até nós foram os textos, escritos em versos e em sânscrito, do Surya Siddhanta, que quer dizer Sistemas do Sol. Os hindus diziam que o autor do texto foi Surya, o deus do Sol. (Boyer, 1974). Mesmo com poucas explicações sobre este fato de ter sido escrito por um deus, o Surya Siddhanta abriu novas perspectivas para a Trigonometria, pois ele não segue a mesma linha de Ptolomeu. A relação por ele utilizada era entre a metade da corda e a metade do ângulo central correspondente, chamada pelos hindus de "jiva". O resultado disto foi a possibilidade de visão de um triângulo retângulo na circunferência como mostra a Figura 5.

Figura 5: Jiva indiano



Fonte: http://www.amma.com.pt/cm/af33/trf1/histtrigon.pdf, 2014.

Eles o definiam como sendo a razão entre o cateto oposto e a hipotenusa e daí conclui-se que a metade da corda dividida pelo raio do círculo é o seno da metade do arco, ou, de maneira análoga, a metade do ângulo central corresponde a todo arco.

$$\text{Jiva}\,\frac{\theta}{2} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \sin\frac{\theta}{2} = \frac{\frac{c}{2}}{r} = \frac{c}{2r} = \frac{1}{2r}\,\text{crd}\,\theta \tag{13}$$

Assim como os gregos, os hindus consideravam a trigonometria como uma ferramenta da astronomia. Entretanto, há vários contrastes entre os conhecimentos trigonométricos dessas duas nações. A trigonometria indiana é descrita como mais aritmética do que geométrica se comparada aos gregos. Também era considerada empírica, pois raramente apresentava demonstrações ou deduções, além de ser bastante irregular.

Entre os séculos VIII e XI, surgiram vários matemáticos hindus, podendo destacar Āryabhatas, Mahāvīra, Brahmagupta e, o então mais conhecido matemático do século XII, Bhāskara. Inclusive, este último gerou uma grande contribuição para a aritmética hindu, além de, claro, para a trigonometria. Bhāskara conseguiu demonstrar o teorema de Pitágoras de duas maneiras diferentes; a primeira demonstração, que também já fora dada na China a muito tempo, advém da decomposição e a segunda é feita traçando-se a altura relativa à hipotenusa.

Segundo Oliveira (2010), “ Tanto nos *Siddhantas* como em *Aryabhatiya* são calculados os senos de 0° a 90°, com vinte e quatro intervalos iguais de 3° $\frac{3}{4}$ cada um e para expressar o comprimento do arco e o comprimento do seno na mesma unidade, o raio foi considerado como 3438 e a circunferência como 360 × 60 = 21600 ”. E foi assim que encontraram para π um valor bem semelhante ao de Ptolomeu:

$$\pi = \frac{360 \times 60}{2 \times 3438} = \frac{21.600}{6.876} = 3.14136 \tag{14}$$

5. A TRIGONOMETRIA NA IDADE MÉDIA E O INÍCIO DA ERA MODERNA

Segundo Eves (1997), durante a época de Gerbert – Papa Silvestre II - os clássicos gregos da ciência e da matemática começaram a penetrar na Europa Ocidental. Foi uma espécie de período de transmissão, no qual, o saber grego que era preservado pelos muçulmanos, foi passado para os europeus ocidentais, bem como também todo conhecimento indo-arábico. Estes saberes foram transmitidos através das traduções do árabe, grego e hebreu para o latim.

O período referente à Idade média é composto por vários altos e baixos em relação à ciência, pois além de ser considerado a “Era das Trevas” por vários séculos devido à repressão católica, houve também a pandemia da Peste Negra durante o século XIV, onde devastou cerca de um terço da população europeia. Todavia, podemos citar alguns nomes importantes que contribuíram para que o conhecimento matemático deste período, são eles: Leonardo Fibonacci (1175-1250) – considerado o maior matemático do século XIII -, Thomas Bradwardine (1290-1349) e Nicole Oresme (1323 – 1382). Este último, por sua vez, introduziu a representação gráfica que deixa explícito a noção de funcionalismo entre as variáveis em seu trabalho intitulado por “*Treatise on the configuration of Qualities and Motions*” que “influenciou Galileu (1564-1642) e Descartes (1596-1650) nos séculos XVI e XVII. Com os estudos de Oresme, começou a se consolidar o conceito de função” (COSTA,1997. Pág.)

O século XV deu início ao Renascimento e devido questões políticas e mudanças nos governos vigentes muitos tesouros gregos tornaram-se acessíveis no Ocidente. Neste período, as cidades mercantis da Europa Central detinham o acervo sobre álgebra, aritmética e trigonometria. Desta forma, a matemática floresceu sob a influência da navegação, astronomia, agrimensura e o próprio comércio.

Nesta etapa da história, podemos mencionar grandes nomes que contribuíram para a o desenvolvimento da matemática, como é o caso de Nicholas Cusa (1401-1464) que é “mais lembrado hoje principalmente por seu trabalho na reforma do calendário e por suas tentativas de quadrar o círculo e trisseccionar o ângulo” (EVES, 1995. Pág.296); sem contar com o pupilo de Nicholas Cusa, Georg von Peurbach (1423-1463), que, ainda segundo Eves (1997), escreveu uma aritmética, alguns trabalhos de astronomia e coligiu uma tábua de senos, além de iniciar uma tradução latina, a partir do grego, do Almagesto de Ptolomeu.

Porém, o matemático mais influente do século foi Johann Müller (1436-1476), geralmente conhecido por Regiomontanus. Além de fazer traduções dos materiais vindos do oriente, ele publicou um tratado sobre triângulos, o chamado: “*Triangulis Omnimodis*”. A obra é dividida em cinco livros e é considerada uma de suas maiores criações; nela trata-se da primeira exposição sistemática da trigonometria plana e esférica como algo independente da astronomia, visto que, até então, todos os estudiosos trataram a trigonometria como apenas um instrumento da astronomia.

> Nessa obra o autor revela particular interesse na determinação de um triângulo, satisfeitas três condições dadas. Em várias ocasiões ele aplica a álgebra, como nas Proposições 12 e 23 do Livro II: (II 12) Determinar um triângulo, dado um lado, a altura relativa a esse lado e a razão entre os outros dois lados; (II 23) Determinar um triângulo, dada a diferença entre dois lados, a altura relativa ao terceiro e a diferença entre os segmentos em que a altura divide o terceiro lado. A álgebra é retórica, achando-se uma parte incógnita da figura como raiz de uma equação quadrática. (Eves, 1997. Pág. 297)

Segundo Costa (1997), a invenção posterior dos logaritmos e alguns dos teoremas demonstrados por Napier (1550-1617) mostram que a Trigonometria de Regiomontanus não diferia basicamente da que se faz hoje em dia. Inicialmente Regiomontanus usava apenas as funções trigonométricas o seno e cosseno, porém, mais tarde calculou a tábua de tangentes e as incluiu. Em outro trabalho ele aplicou a álgebra e a trigonometria em um problema da construção de um quadrilátero cíclico dados os valores dos quatro lados.

E não poderia faltar de citar Sir Isaac Newton (1642-1727) que também deu sua significativa contribuição à trigonometria pois, ao mesmo tempo que trabalhava com seus estudos sobre cálculo infinitesimal, trabalhava também, paralelamente, com séries infinitas, tendo expandido arcsen (x) em séries e, por reversão, acabou deduzindo a série para seno (x).

A trigonometria só veio a desenvolver a notação que utilizamos hoje em 1620. A palavra seno já estava sendo muito utilizada nos textos matemáticos da Europa, contudo, a notação abreviada “sen” foi utilizada ineditamente pelo professor astrônomo Edmund Gunter (1581-1626). A periodicidade das funções trigonométricas só veio a ser comprovada em 1710 por Thomas Fanten e assim, foi a partir daí que a trigonometria foi ganhando o formato dos dias atuais e grande parte desse fato também se deve à Leonard Euler (1707 – 1783) que no século XVIII tomou como unidade a medida do raio de um círculo e definir as funções aplicadas a um número. Foi nesse mesmo período que ele criou a função "e" popularmente conhecida como a função de Euler, que abriu as portas para a análise matemática e suas diversas aplicações à física.

Podemos também citar as funções periódicas e contínuas representadas por séries trigonométricas. Foram relatadas por Joseph Fourier (1768 – 1830) em sua obra mais importante *Theórie analytique de la chaleur*. As séries de Fourier têm diversas aplicações, como por exemplo na área da economia e da engenharia elétrica. Seus coeficientes são encontrados por meio de integrais e sua fórmula geral pode ser representadas como:

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos(x) + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) \ldots + b_1 \operatorname{sen}(x) + b_2 \operatorname{sen}(2x) + b_3 \operatorname{sen}(3x) \ldots \quad (15)$$

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Percebemos que a trigonometria, desde os babilônios e egípcios até os tempos de Hipócrates na Grécia era tida como uma auxiliar da Agrimensura e da Astronomia. Após o declínio da era grega clássica, tornou-se autônoma e por fim transformou-se em um ramo da Análise Matemática.

Foi um longo e complexo caminho da Humanidade para chegar até a trigonometria que hoje ensinamos aos nossos alunos. Nesse trabalho tratamos da evolução em si, e não de forma isolada o conceito de ângulo que é implícito e essencial ao desenvolvimento da trigonometria, nem da trigonometria esférica, indispensável na Astronomia ou construção das tábuas trigonométricas. Nos propusemos apenas a descortinar parte dessa trajetória desde os primórdios das primeiras civilizações até o que é mais claro e aplicável para nós hoje em dia.

Assim, deixamos a nossa sugestão aos professores que trabalham ou que trabalharão os conteúdos de trigonometria na sala de aula, que levem esse tipo de abordagem histórica para seus alunos com o intuito de que eles percebam sua importância e entendam a trajetória do conhecimento matemático, bem como seu surgimento e finalidade; não para que pensem que eles “caíram do céu” e foram entregues ao acaso, e sim porque o homem sai da sua zona de conforto devido suas necessidades e “manias” de evolução e que este caminho científico continue sendo trilhado por nossos jovens e crianças.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUMKART, Thomaz Arzivenko ; ATKINSON, Luis Gustavo De Melo ; NEIS, Kenedi. **A Influência da Matemática na História da Arquitetura**. 2019. 5 p. Disponível em: <file:///C:/Users/Usuario/Downloads/11951-Texto%20do%20artigo-43886-1-10-20191008.pdf.> Acesso em: 16 jan. 2021.

BOYER, Carl B. **História da matemática** - trad. de Elza Gomide, Ed. Edgard Blücher Ltda, São Paulo, 1974.

COSTA, Nielce M. Lobo. **A História da Trigonometria**. 1997. Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática** – trad de Hygino H Domingues, Editora da UNICAMP, 1995.

HAUS, Thiago. **A matemática e as pirâmides do Egito**. [S. l.], [1999 ou 2020] Disponível em: <http://www.educacional.com.br/especiais/Niemeyer/includes/arqCalculos/piramides_imprimir.asp?strTitulo=A%20matem%E1tica%20e%20as%20pir%E2mides%20do%20Egito#:~:text=Os%20eg%C3%ADpcios%20tamb%C3%A9m%20conseguiram%20aplicar,tri%C3%A2ngulo%20pitag%C3%B3rico%20em%20suas%20constru%C3%A7%C3%B5es.&text=Veja%20como%20eles%20o%20empregaram,entre%20lados%20de%20tri%C3%A2ngulos%20semelhantes>. Acesso em: 18 set. 2020

OLIVEIRA, Jaqueline de. **Tópicos selecionados de trigonometria e sua história**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de São Carlos Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, São Paulo.

PCNs - Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. Introdução. Brasília: MEC/SEF, 1998.

SILVEIRA, Fernando Lang da. **Determinação da distância Terra-Sol na antiga Grécia**. CREF, 2014. Disponível em: https://www.if.ufrgs.br/novocref/?contact-pergunta=determinacao-da-distancia-terra-sol-na-antiga-grecia#:~:text=A%20partir%20das%20demais%20hip%C3%B3teses,vezes%20o%20di%C3%A2metro%20da%20Terra.Acesso em: 19 de jan. de 2021.

SMITH, David E. **History of Mathematics**, vol. I, Dover Publications, INC. New York, 1958.