

CONSTRUÇÃO DE UM GRAVÍMETRO INTERFEROMÉTRICO DE MOLA PARA MEDIÇÃO DA ACELERAÇÃO GRAVITACIONAL

CONSTRUCTION OF AN INTERFEROMETRIC SPRING GRAVIMETER FOR MEASURING GRAVITATIONAL ACCELERATION

Allan Christopher Rodrigues Barboza

acrb@discente.ifpe.edu.br

Cícero Jailton de Moraes Souza

cicero.souza@pesqueira.ifpe.edu.br

Ibson José Maciel Leite

ibson.leite@pesqueira.ifpe.edu.br

Mário Antonio Alves Monteiro

mario.monteiro@reitoria.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho tem como principal objetivo apresentar a construção de um gravímetro, que seja capaz de medir o valor da aceleração gravitacional. O equipamento utiliza um interferômetro de Michelson-Morley com um de seus espelhos fixo em um sistema rotacional, e cujos elementos principais são a mola e uma massa de prova. Através da análise de torques foi possível obter uma expressão matemática para a gravidade em função do número de franjas deslocadas e, assim, determinar o valor da gravidade com uma precisão satisfatória.

Palavras-chave: Gravímetro. Aceleração gravitacional. Interferômetro.

ABSTRACT

This work has as main objective to present the construction of a low-cost gravimeter, which can measure the value of gravitational acceleration. The equipment uses a Michelson-Morley interferometer where one of its mirrors is fixed in a rotational system, whose main elements are the spring and a test mass. Through the analysis of torques it was possible to obtain a mathematical expression for gravity as a function of the number of displaced fringes and, thus, to determine the value of gravity with satisfactory precision.

Keywords: Gravimeter. Gravitational acceleration. Interferometer.

1. INTRODUÇÃO

Ao longo da história, o conhecimento sobre o cosmos sempre foi motivo de fascínio e curiosidade humana. O empenho em responder perguntas como: por que a Lua não cai na Terra? Ou por que os objetos caem? Nos ajudaram a compreender o que hoje conhecemos como gravidade. Para Nusseveing (2013), a gravidade é uma das quatro forças fundamentais da natureza, juntamente com as forças eletromagnética, nuclear forte e nuclear fraca. É a força que faz corpos massivos se atraírem e, em nosso sistema Solar, é a responsável por manter os planetas em órbita em torno do Sol.

A atração gerada pela enorme massa da Terra faz com que objetos, ao caírem em regiões próximas a superfície do nosso planeta, sofram uma aceleração, chamada de aceleração gravitacional (CAMP *et al*, 2003). Segundo Nicoli (2020), em um modelo ideal, onde a Terra fosse uma esfera perfeita, essa aceleração seria constante para toda a superfície, assim como é considerada na maioria dos problemas de física no ensino de nível médio e até superior. Entretanto, essa grandeza física varia e o valor de sua magnitude depende, principalmente, da forma e rotação da Terra, da distribuição de massa em seu interior, da localização na superfície terrestre (latitude e longitude) e as posições relativas da Lua e do Sol, que causam as marés (AQUINO, 2017).

Enersto & Ussami (2002), afirmam que a diferença no valor da aceleração gravitacional em regiões distintas é minúscula. Porém deve ser levada em conta, pois possibilita o estudo de anomalias gravitacionais, que são basicamente a diferença entre o valor teórico da gravidade para aquela região e o valor medido. O conhecimento dessas anomalias pode ter importantes implicações, como por exemplo, revelar no subsolo a presença de minerais metálicos ou até mesmo uma jazida petrolífera (LOPES, 2008).

Os gravímetros são os instrumentos responsáveis por determinar com grande precisão os valores gravitacionais, através de dois tipos de medidas: absolutas e relativas. As primeiras fornecem o valor da gravidade de forma direta em um local, se utilizando sobretudo, do princípio da queda livre onde é usado a interferometria a laser para se obter os valores das distâncias, além de relógios atômicos para contar o tempo (AQUINO, 2017). As medidas relativas, por sua vez, medem a gravidade em dois pontos diferentes, empregando um sistema-massa mola como seu principal componente.

A alta sensibilidade e precisão que esses equipamentos possuem, tornam seu custo bastante elevado, inviabilizando em muitos casos, o acesso a esses instrumentos. Diante disso, diversos procedimentos experimentais podem ser utilizados para medir a gravidade, contudo, segundo Souza & Cardozo (2020), alguns experimentos não fornecem o nível de exatidão que é esperado neste tipo de medida.

Seguindo essa premissa, este trabalho descreve o processo de construção de um gravímetro onde através do mesmo, pretende-se verificar experimentalmente o valor da gravidade local. O funcionamento básico deste protótipo consiste em uma mola presa a uma haste rotacional, sobre a qual é colocada uma massa de prova. O valor da deformação da mola causada pela interação gravitacional das massas que compõem o sistema, é medido através de um interferômetro de Michelson-Morley associado ao equipamento. Deste modo é possível obter valores gravimétricos com um bom grau de precisão.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1. Lei da Gravitação Universal e o método gravimétrico

Apoiado nos trabalhos de Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630), Isaac Newton, em 1687 publica em seu livro *Philosophie Naturalis Principia Mathematica* a formulação de três lei de movimento, juntamente com a lei da Gravitação Universal. Essa lei diz que qualquer partícula material de massa M no universo atrai outra de massa m com uma força que depende do produto das duas massas e do inverso do quadrado da distância r entre seus centros de massa (TIPLER & MOSCA, 2006). O módulo dessa força pode ser obtido pela expressão:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1)$$

Em que G é a constante da gravitação universal, determinada por Cavendish em 1798, e cujo valor corresponde a $6,67428 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ no Sistema Internacional. Araújo (2013, p. 01), afirma que “esta lei explicita a forma atrativa que existe entre dois corpos devido ao fato de terem massa, mas nada diz sobre sua origem”. Tal explicação só seria dada posteriormente, no início do século XX, por Albert Einstein em sua Teoria da Relatividade Geral.

Segundo Aquino (2017), o método gravimétrico é responsável pelas medições e interpretações das variações do campo gravitacional terrestre, ele é baseado na Lei da gravitação Universal mencionada acima, no entanto, no método gravimétrico, mede-se a aceleração da gravidade (g) ao invés da força gravitacional (F). Através de segunda lei de Newton é possível encontrar a aceleração com que a massa M atrai a massa m , que em módulo é:

$$F = ma = mg = G \frac{Mm}{r^2}$$

$$g = G \frac{M}{r^2} \quad (2)$$

A equação acima, partindo da ideia de que a Terra é perfeitamente esférica e estática em seu eixo, fornece o valor teórico esperado do campo gravitacional em todos os locais da superfície do planeta, significando que esse valor seria constante em toda superfície da Terra. Porém o movimento de rotação, bem como a forma elipsoidal da Terra, que foi também descrita pelo próprio Newton no “*Principia*”, faz com que haja uma pequena variação no valor da gravidade, devido ao fato de que “pontos mais próximos do equador estão mais distantes do centro de massa da Terra que aqueles mais próximos aos polos, causando um aumento da aceleração do equador para os polos”. (NICOLI, 2020, p. 35)

A relação que descreve matematicamente a variação gravitacional devido ao formato elipsoidal da Terra, e sua velocidade angular é, segundo Lopes (2008), representada pela Fórmula Internacional da Gravidade, apresentada abaixo:

$$g(\varphi) = 9,78032677(1 + 0,0052790414 \text{ sen}^2(\varphi) + 0,0000232718 \text{ sen}^4(\varphi)) \quad (3)$$

Onde φ é a latitude medida em graus. De acordo com Nicoli (2020), além desse fator, a gravidade também depende das características da região, como a densidade e composição de rochas na superfície e subsuperfície, e a altitude de uma montanha por exemplo. Isso deve-se ao fato de que a aceleração da gravidade diminui em função da distância ao centro da Terra. Nicoli (2020, p. 36), afirma que “a aceleração gravitacional se torna $3,086 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$ menor a cada metro distanciado do nível do mar”. Esse efeito, chamado de correção Ar-livre, deve ser considerado em qualquer medida ou cálculo da aceleração da gravidade em regiões acima do nível do mar.

Para Lopes (2008), o valor teórico da gravidade, variando em função da latitude e altitude, e o valor real, medido na mesma região por um equipamento que possibilite essa medida com uma boa precisão (gravímetro), em tese, devem ser iguais. Entretanto, quando isso não acontece, revela-se uma anomalia nesta grandeza, chamada de anomalia gravitacional. Que dá o indicativo de que pode haver materiais metálicos presentes em rochas na região, jazida de petróleo ou quaisquer outros corpos litológicos.

2.2. Gravímetros

As primeiras observações e medidas do valor da gravidade tiveram início por volta do século XVI com os estudos de Galileu Galilei (1564-1642) sobre os corpos em queda livre e o isocronismo pendular (CASTRO JUNIOR et al, 2018). Contudo, devido às limitações tecnológicas da época, havia uma grande dificuldade em controlar os fatores externos como a resistência do ar, além do problema em se medir pequenos intervalos de tempo e distâncias.

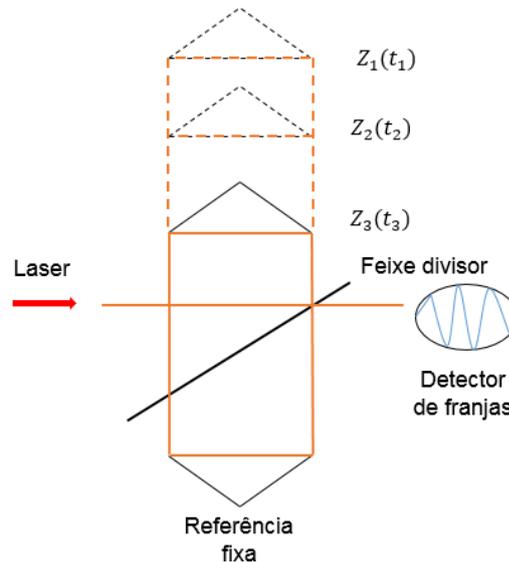
Daí em diante, os métodos para se medir a gravidade evoluíram crescentemente, de modo que atualmente a tecnologia e qualidade dos componentes que constituem os gravímetros permitem que eles obtenham um nível de precisão significativo. Estes instrumentos, por sua vez são utilizados para medir de forma indireta o valor da gravidade em diferentes pontos da superfície da Terra mediante a medição direta de grandezas físicas fundamentais como tempo e deslocamento. Os gravímetros também são classificados em: absolutos e relativos.

2.2.1. Gravímetros absolutos

Os gravímetros absolutos obtém o valor da gravidade de forma isolada no ponto em que é feita a medida. O princípio físico utilizado é a medição da taxa de variação de velocidade, ou seja, a aceleração gravitacional (g) do objeto em queda livre no vácuo, onde a altura da queda é proporcional ao quadrado do tempo que o objeto cai. Segundo Guimarães *et al.* (2020), outra forma de se medir a gravidade de forma absoluta é utilizando o método pendular desenvolvido por Huygens em 1673, de forma que o período de oscilação do pêndulo é inversamente proporcional ao valor de (g). Porém devido à instabilidade, imprecisão e limitações, esse método entrou em desuso, dando lugar aos gravímetros absolutos de queda de corpos, cujo funcionamento básico pode ser visto na Figura 1. Neste método se observa a queda de um prisma (corpo de prova), utilizando-se a interferometria a *laser* para medir as

posições do prisma e relógios atômicos, ou de quartzo, para medir o instante de tempo em que o prisma se encontra em cada uma das posições (AQUINO 2017).

Figura 1: Princípio de funcionamento de um gravímetro absoluto que utiliza interferometria a laser.



Fonte: Revista Brasileira de Cartografia.

Estes equipamentos são bastante robustos e suas medidas são conduzidas em ambientes estáveis e com temperatura e umidade controlada. Barbosa (2015), afirma que estes instrumentos podem alcançar uma precisão de 10^{-9} m/s^2 , porém isso requer grande acurácia e um longo período de observações. Diante da sua complexidade de construção, o gravímetro absoluto possui grande dificuldade de instalação em qualquer terreno, desse modo, sua operação é fixa em estações gravimétricas ao redor do mundo, e o valor de gravidade obtido por ele é usado como calibração para os gravímetros móveis.

2.2.2. Gravímetros relativos.

Os gravímetros relativos são equipamentos móveis que permitem a obtenção do valor da gravidade de qualquer local especificado. Este tipo de aparato é constituído, na maioria dos casos, por um peso que é equilibrado por uma força contrária de natureza elástica (sistema massa-mola), onde uma pequena variação de aceleração gravitacional resulta no deslocamento da massa e na variação do comprimento da mola. A relação para g em um ponto, a partir de deformação da mola e da massa que gera essa deformação, é dada por:

$$g = \frac{k\Delta l}{m} \quad (4)$$

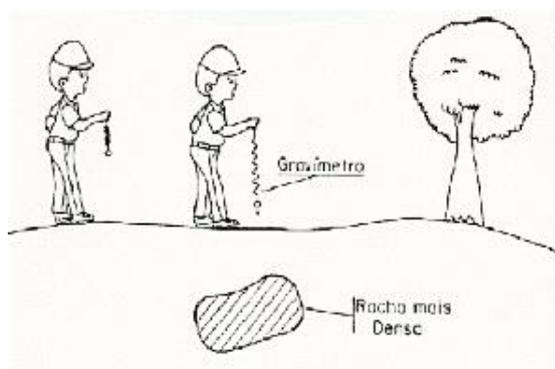
Onde k é a constante elástica da mola, Δl é a variação de comprimento da mesma e m é a massa de prova. Para Escobar (1988), a medição relativa da

gravidade, refere-se, a diferença da aceleração da gravidade (Δg) entre dois pontos distintos, como mostrado abaixo:

$$\Delta g = g_2 - g_1 \quad (5)$$

Onde g_2 e g_1 são medidas de gravidade em dois diferentes pontos. Na Figura 2 é possível observar o funcionamento simples de um gravímetro relativo de mola, onde há uma alteração na medida devido ao fato da massa de prova do equipamento ser atraída por uma rocha subsuperficial bastante densa.

Figura 2: Princípio básico de funcionamento de um gravímetro relativo de mola.



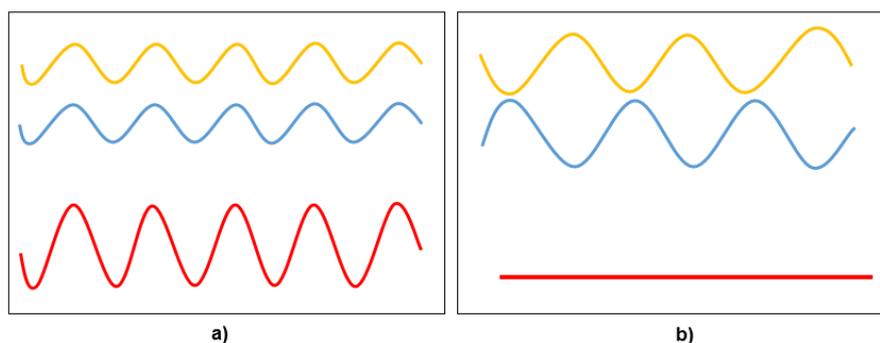
Fonte: IAG – USP.

Os gravímetros relativos de mola possuem diversas configurações e atualmente trazem consigo componentes que diminuem efeitos externos como: variação de temperatura entre as medidas, desgaste da mola e vibrações externas, o que torna o instrumento capaz de realizar medidas gravimétricas em qualquer região com boa precisão.

2.3. O interferômetro de Michelson-Morley

Albert Michelson em conjunto com Edward Morley, no intuito de investigar o éter luminoso, que se acreditava na época ser uma substância que permeava todos os corpos e o principal meio onde as ondas eletromagnéticas se propagavam (MARTINS, 2006), desenvolveram, em 1887, um instrumento que, de acordo com Halliday (2008, p. 97), “pode ser usado para medir comprimentos ou variações de comprimentos com grande precisão, através de franjas de interferência”. Esse dispositivo é baseado no fenômeno da interferência luminosa entre dois feixes de luz que ocorre quando há uma superposição de duas ou mais ondas eletromagnéticas no espaço. Esta superposição pode ter um caráter destrutivo, quando as ondas coincidem perfeitamente, ou seja, possuem a mesma fase, e a amplitude mínima da onda se soma com a amplitude máxima da segunda onda (interferência destrutiva – Figura 3b), ou pode ter um caráter de reforço, quando sua amplitude dobra, devido a estarem em mesma fase e a amplitude máxima de ambas as ondas se somarem (interferência construtiva – Figura 3a) (CATELLI & VICENZI, 2004).

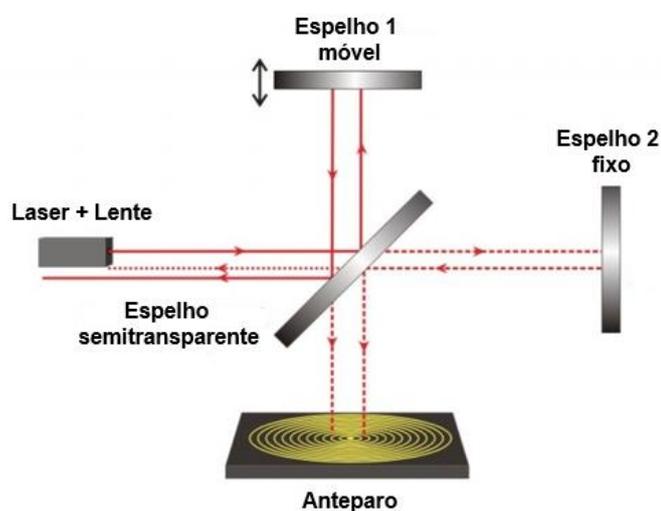
Figura 3: a) Interferência construtiva, b) interferência destrutiva.



Fonte: Luso Academia.

Segundo Silva *et al.* (2017), o funcionamento desse equipamento se dá da seguinte forma: a luz produzida pelo laser é expandida por uma lente e em seguida é direcionada ao espelho semitransparente que divide o feixe perpendicularmente em partes iguais, onde parte da luz é direcionada ao Espelho 1 (conforme mostrado na Figura 4) e a outra parte é direcionada ao Espelho 2. Os feixes são refletidos por cada um dos espelhos e se encontram na região onde foram divididos. Diante da diferença de caminho óptico experimentada pelos feixes luminosos ao se sobreporem, gera-se um padrão de interferência, chamado de franjas de interferência (regiões claras e escuras) mostrado no anteparo da Figura 4.

Figura 4: Esquema do Interferômetro de Michelson-Morley.



Fonte: Modificado de Alfa Omega-Eletronics pelo autor, 2020.

No dispositivo acima, é possível observar que um dos espelhos é fixo e o outro móvel. Se o espelho móvel sofre uma mudança em sua posição, as franjas de interferência também se deslocam. Halliday (2008), afirma que, uma vez conhecido o valor do deslocamento desse espelho em relação ao espelho semitransparente, e conhecida a quantidade de franjas que se deslocaram em um determinado ponto, é possível determinar o comprimento de onda do laser, a partir da equação abaixo:

$$\lambda = \frac{2\Delta L}{\Delta N} \quad (6)$$

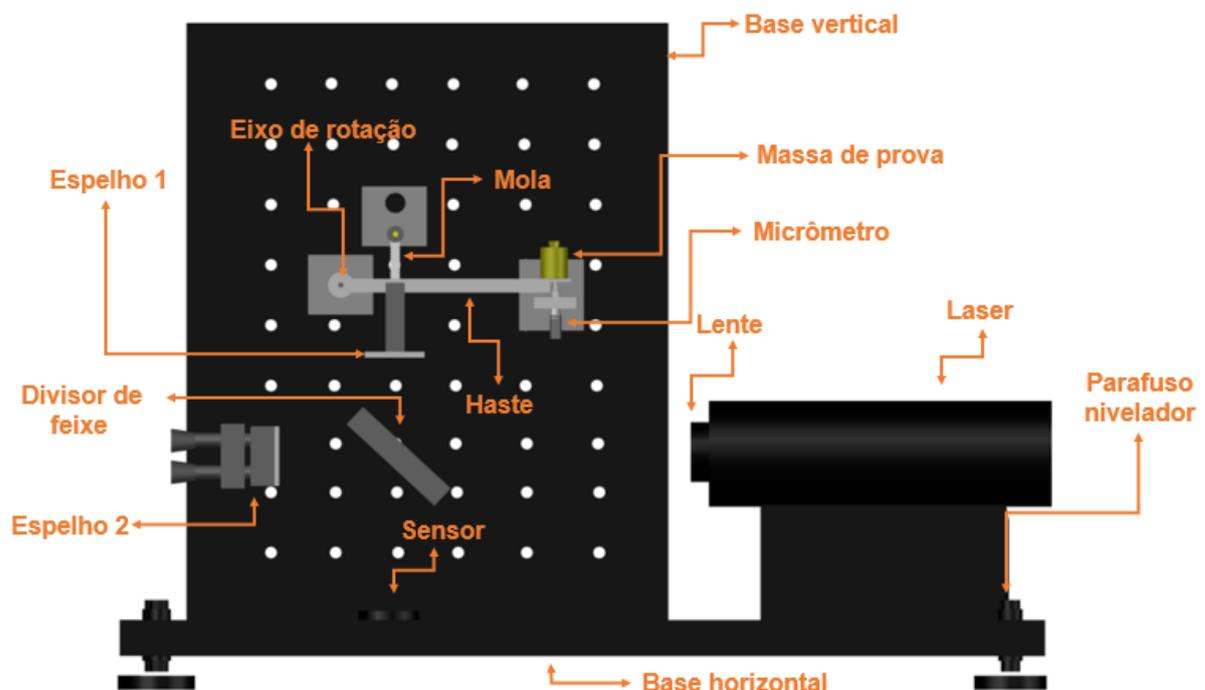
Onde λ é o comprimento de onda do laser, ΔL é o deslocamento do espelho móvel e ΔN é o número de franjas deslocadas.

Devido a sua alta precisão na medição de variações de pequenas distâncias, neste trabalho buscamos utilizar um interferômetro de Michelson-Morley para medir o deslocamento sofrido por uma mola devido a atuação de força gravitacional sobre uma massa de prova. Para isso montamos um sistema onde a medição da distensão da mola é feita de forma indireta, utilizando a contagem das franjas de interferência deslocadas. Ao invés de utilizarmos a Equação 4, aplicada em experimentos envolvendo gravímetros relativos e obtida através do equilíbrio das forças, propomos uma nova forma de análise, onde a equação a ser utilizada para determinar o valor de g é obtida através do equilíbrio estático das forças que atuam na haste do equipamento desenvolvido.

3. EQUIPAMENTO DESENVOLVIDO

Antes de construir o gravímetro e realizar os experimentos, fizemos primeiro um esboço de como deveria ser o equipamento, de forma que pudéssemos definir melhor as dimensões e o funcionamento do mesmo. Para isso utilizamos a plataforma *AutoCad*, e o esboço do gravímetro desenvolvido pode ser observado na Figura 5.

Figura 5: Modelo esquemático do gravímetro projetado na plataforma *AutoCAD*.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2020.

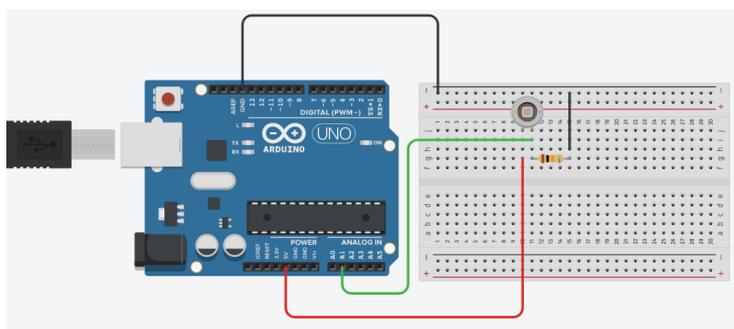
Uma vez finalizado o esboço iniciamos a construção do equipamento. Os materiais utilizados para a construção foram: duas chapas de alumínio de 20cm × 25cm e 17cm × 22cm, ambas com um pouco mais de 1cm de espessura, utilizadas como base vertical e horizontal do projeto e postas perpendicularmente entre si; parafusos niveladores; uma haste de alumínio de 47,7 g ($\pm 0,3g$) presa a um eixo rotacional; uma massa de prova de 100,0g ($\pm 0,3g$); uma mola de constante elástica k , cujo valor era inicialmente desconhecido; rolamentos; um *laser* HeNe de 633,2 nm ($\pm 0,5nm$); uma lente; um divisor de feixe, posto sobre a base vertical num ângulo de 45°; um espelho móvel (espelho 1); um espelho fixo (espelho 2); um micrômetro; um Arduino Uno; um LDR (*Light Dependent Resistor*) e um resistor de 10k Ω .

Antes do acionamento do equipamento é necessário verificar se todo o sistema do interferômetro do gravímetro está nivelado, para que dessa forma seja possível a formação de franjas de interferência. No espelho 1 foi desenvolvido um aparato móvel, composto por uma haste rotacional, uma mola e uma massa de prova, além do auxílio de um micrômetro, que é responsável por deixar o sistema em uma posição zero. Quando o mesmo é girado no sentido horário pelo operador, o sistema é deslocado para baixo fazendo com que a mola sofra uma deformação devido a interação gravitacional com as massas do sistema.

Em virtude da mola e o espelho 1 estarem a mesma distância do eixo de rotação da haste, consideramos que a deformação da mola e o deslocamento do espelho eram iguais. Diante disso, essa mudança na posição do espelho 1 possibilita que as franjas de interferências se alternem em regiões claras e escuras até o momento em que o micrômetro perde o contato com a haste sobre a qual a massa de prova se encontra.

O valor do deslocamento do espelho é obtido contando-se o número de franjas que foram deslocadas em relação a posição inicial, até o momento em que o sistema esteja em equilíbrio. O micrômetro também tem a função de fazer com que esse movimento vertical, que acontece até que o sistema atinja o equilíbrio, seja mais lento, possibilitando assim que o sensor de Luz (LDR) e o Arduino, diante de uma programação relativamente simples, capte as variações das franjas. O Arduino é uma placa de prototipagem rápida *open source*, que permite a integração com diversos sensores e componentes eletrônicos. Um dos sensores que podem ser utilizados junto ao Arduino é o LDR (veja a figura 6). Conforme a quantidade de luz sobre o LDR varia, o sinal da variação é captado pelo Arduino.

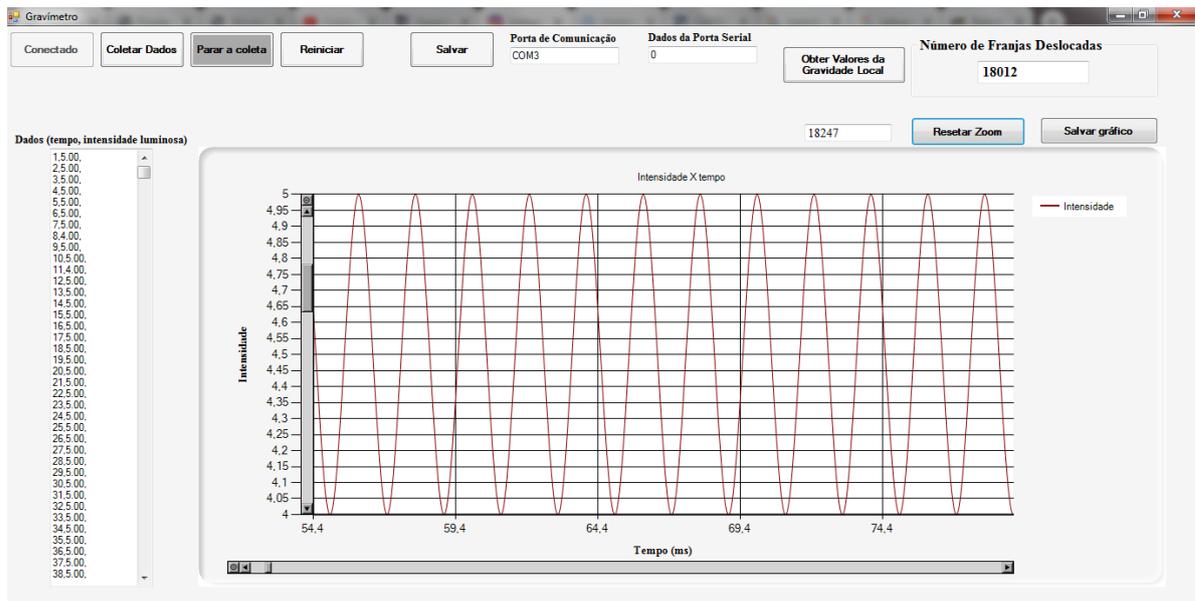
Figura 6: Esquema do sensor de luz associado a placa *Arduino*, elaborado no *TinkerCad*.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2020.

Para que se tenha uma melhor clareza na visualização dos dados referentes a contagem das franjas, foi desenvolvido um *software* na plataforma Visual Basic 2010 Express, onde é possível a comunicação com o Arduino através da porta serial. Os dados da variação da intensidade luminosa (em volt) advindos do Arduino, são plotados na interface gráfica do *software*, como mostrado na Figura 7. No botão “Obter valores da Gravidade local” é possível obter o valor teórico de g para a latitude e altitude especificadas, como mostrado na Figura 8, bem como o valor do deslocamento do espelho com base na quantidade de franjas e o comprimento de onda do *laser*.

Figura 7: Interface do *software* desenvolvido no Visual Basic.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2020.

Figura 8: Interface do *software* desenvolvido no Visual Basic para o valor da gravidade local.

Fonte: Elaborada pelo autor, 2020.

A Figura 9 mostra o equipamento depois de construído, porém, sem a fonte *laser*.

Figura 9: Gravímetro construído.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2020.

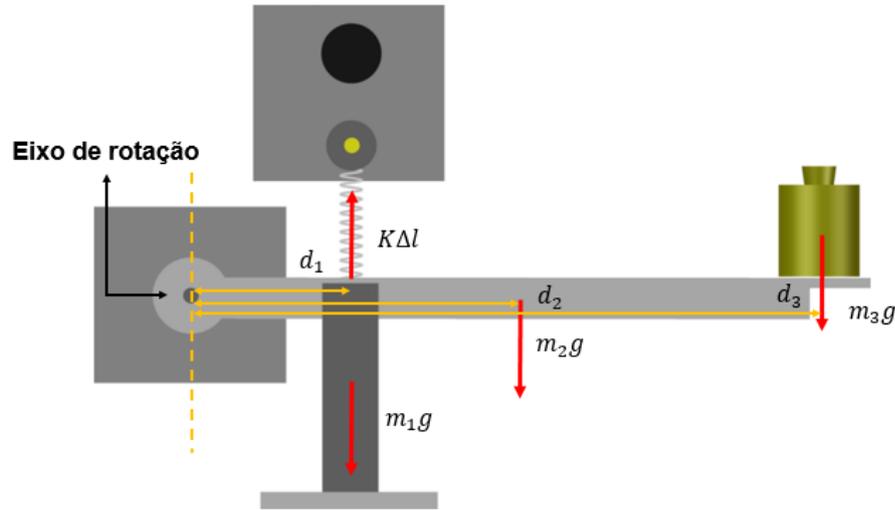
4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1. Gravímetro interferométrico de mola: uma abordagem por meio da análise de torques

Devido às limitações experimentais para determinar com precisão a variação de gravidade entre dois locais, neste trabalho descrevemos a construção de um gravímetro que obtém o valor de g no local da medida. Ele é baseado em um sistema interferométrico com uma configuração similar à adotada por Michelson e Morley em seu experimento. Foi utilizado também a ideia da medição da gravidade em função da elongação da mola, onde, através de um sistema rotacional (observe a Figura 10), é possível obter o valor da aceleração da gravidade mediante a medição da variação do número de franjas de interferência em duas situações de equilíbrio do sistema, com e sem a massa de prova.

Na Figura 10 podemos observar a haste de massa m_2 , que pode girar em torno de um eixo de fixo de rotação. O centro de massa da haste (aqui suposta homogênea) está a uma distância d_2 do eixo de rotação. Um espelho de massa m_1 foi colocado a uma distância d_1 do eixo de rotação. O espelho também pode girar em torno de um eixo próprio, de forma que mesmo quando a haste é girada, o espelho sempre se mantém totalmente na horizontal. No ponto da haste oposto ao espelho foi colocada uma mola de constante elástica k , também a uma distância d_1 do eixo de rotação da haste. Por fim, a uma distância d_3 do eixo de rotação, é colocada uma massa de prova m_3 .

Figura 10: Esquema do equilíbrio de forças no gravímetro.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2020.

Por se tratar de um corpo rígido (corpo que possui dimensão não desprezível), para que o sistema se encontre em equilíbrio é necessário que não haja nenhum tipo de deslocamento causado por forças translacionais, e nenhum tipo de rotação, ou seja, as resultantes das forças translacionais externas devem se anular, assim como a resultante dos torques externos ($\vec{\tau}_i$). Dessa forma, sendo \vec{r}_i os vetores que representam a posição dos pontos de atuação das forças translacionais $\vec{F}_{\perp i}$, temos que, no equilíbrio:

$$\sum \vec{\tau}_i = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_{\perp i} = 0 \quad (7)$$

O “resultado da ação de uma força sobre um corpo, de modo que essa força esteja aplicada perpendicularmente a uma distância do eixo longitudinal do sistema” (VIEIRIA et al, 2019, p. 18) é chamada de torque ($\vec{\tau}$). Esta grandeza também pode ser descrita como a tendência que uma força tem de rotacionar um corpo sobre a qual ela é aplicada e pode ser escrita em módulo como:

$$\tau = d F \sen \theta \quad (8)$$

Onde d é a distância do eixo de rotação até a força, e θ é o ângulo formado entre a distância de rotação (d) e a força (F).

Conforme a haste gira e fica na posição de equilíbrio, que faz um ângulo α com a horizontal (Figura 11), a soma dos torques se anula, de modo que, a partir da Equação 7 e da Equação 8 obtemos:

$$\sum \vec{\tau}_i = \vec{d}_1 \times \vec{F}_{el\perp} + \vec{d}_1 \times m_1 \vec{g}_{\perp} + \vec{d}_2 \times m_2 \vec{g}_{\perp} + \vec{d}_3 \times m_3 \vec{g}_{\perp} = 0$$

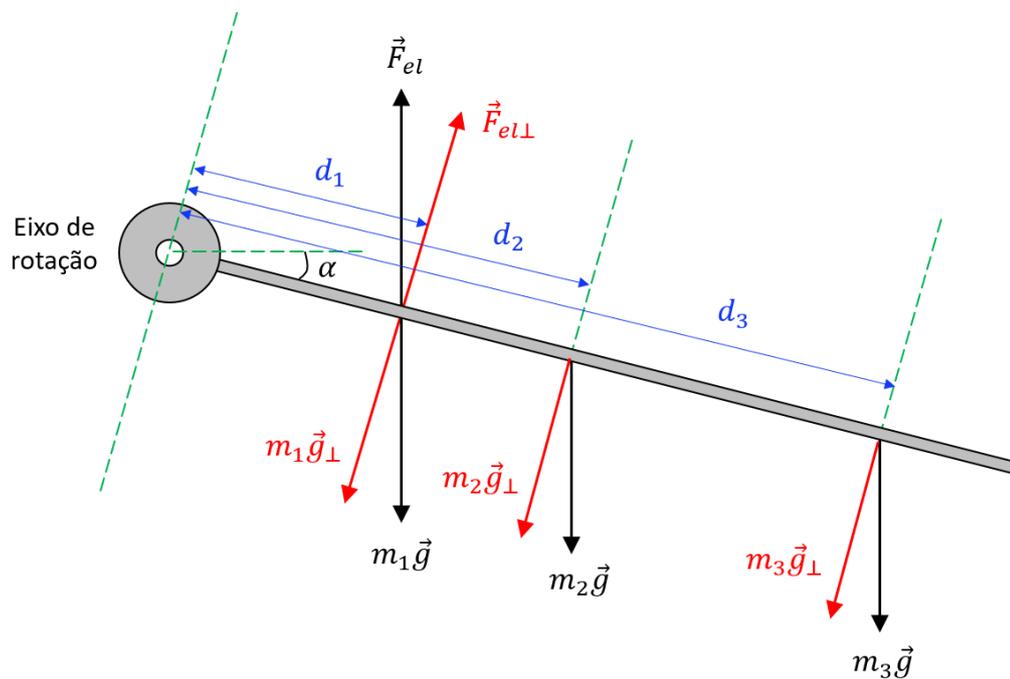
$$d_1 F_{el} \sen(90^\circ - \alpha) = (d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3) g \sen(90^\circ - \alpha)$$

$$d_1 F_{el} = (d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3) g \quad (9)$$

Com $|F_{el}| = k\Delta l$, onde k é a constante da mola e Δl é a deformação sofrida por ela. Assim, podemos concluir que:

$$\Delta l = \frac{(d_1 m_1 + d_2 m_2 + d_3 m_3)}{k d_1} g \quad (10)$$

Figura 11: Diagrama de forças que atuam sobre a haste do gravímetro.



Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Ao retirar o corpo de prova m_3 o sistema irá adquirir uma nova estabilidade, e a deformação irá diminuir, de modo que a nova distensão da mola, $\Delta l'$, pode ser escrita como:

$$\Delta l' = \frac{(d_1 m_1 + d_2 m_2)}{k d_1} g \quad (11)$$

A diferença ΔL entre as deformações pode ser obtida subtraindo-se a Equação 11 da Equação 10, de onde obtemos:

$$\Delta L = \Delta l - \Delta l' = \frac{m_3 d_3}{k d_1} g \quad (12)$$

Essa diferença ΔL pode ser obtida através da contagem das franjas de interferência que se deslocaram quando o sistema mudou de uma estabilidade para outra. De acordo com a Equação 6, ΔL pode ser escrito em termos da variação no número de franjas:

$$\Delta L = \frac{\lambda \Delta N}{2} \quad (13)$$

A partir das equações 12 e 13 podemos escrever a seguinte expressão para a aceleração da gravidade, g :

$$g = \frac{k d_1}{m_3 d_3} \left(\frac{\lambda \Delta N}{2} \right) \quad (14)$$

Dessa forma, conhecendo o valor da constante elástica k , da massa de prova m_3 , das distâncias d_1 e d_3 , do comprimento de onda λ (fornecido pelo fabricante do *laser*) e medindo o número de franjas ΔN , é possível determinar o valor da aceleração gravitacional.

4.2. Medida da constante elástica da mola

Para obter um valor para g , conforme a Equação 14, é necessário utilizar uma mola com constante elástica conhecida. Porém, para este trabalho, as molas que estavam a nossa disposição não tinham valores de k conhecidos, de forma que foi necessário inicialmente medir a constante elástica da mola utilizada.

Para medir a constante de elasticidade colocamos um peso na extremidade da mola e observamos a distensão resultante conforme se variava o peso. Enquanto o peso atua para baixo, a força elástica atua no sentido oposto até que o sistema atinja o equilíbrio. Nesse instante medimos a distensão sofrida pela mola e repetimos o processo para diferentes pesos. Isolando k na Equação 4, obtemos:

$$k = \frac{mg}{\Delta l} \quad (15)$$

Para calcular a força peso (mg) utilizamos o valor da aceleração da gravidade do IFPE – *campus* Pesqueira, obtida a partir dos dados de latitude e altitude locais utilizando a Fórmula Internacional da Gravidade (Equação 3) e levando em consideração a correção de altitude proposta por Nicoli (2020). Desse modo, para uma latitude de $-8,36472^\circ$ e altitude de 675 m acima do nível do mar (dados adquiridos através do *software Google Earth*), obtivemos o seguinte valor teórico para o campo gravitacional local: $g = 9,78 \text{ m/s}^2$. A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos a partir das medições da constante elástica:

Tabela 1: Resultados das medidas de k .

Peso (N)	0,685	1,467	1,858	2,152	2,641	3,325	3,814	4,108
Deformação (m)	0,0020	0,0040	0,0050	0,0060	0,0075	0,0090	0,0100	0,0110
k (N/m)	342	367	372	359	353	369	381	380
k médio:	365 N/m			Desvio padrão da média de k :			5 N/m	

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Dessa forma, o valor da constante elástica obtido foi $k = 365 \text{ N/m} \pm 5 \text{ N/m}$. Devemos chamar atenção para o fato de que esse resultado foi obtido a partir de um valor teórico da aceleração da gravidade. Portanto, a eficácia do equipamento será demonstrada por quão próximo o valor experimental de g obtido por ele estará próximo do valor teórico $g = 9,78 \text{ m/s}^2$.

4.3. Contagem do número de franjas

Para medir o número de franjas deslocadas ΔN , primeiro deixamos o sistema sem a massa de prova e fixo na posição de equilíbrio, de modo que a deformação da mola com a haste nessa posição era $\Delta l'$. Depois de adicionar a massa de prova, a haste foi rotacionada lentamente, em relação ao seu eixo fixo, até atingir uma nova posição de equilíbrio. Dessa maneira teremos uma nova deformação Δl na mola e, conseqüentemente, uma variação na posição do espelho que é igual a diferença ΔL entre as duas deformações nas posições de equilíbrio ($\Delta L = \Delta l - \Delta l'$), isso acaba gerando uma mudança no padrão de interferência devido a modificação do caminho óptico da luz do *laser*. É essa modificação que gera o deslocamento das franjas de interferência. Durante o processo o número de franjas deslocadas foi contabilizado através do sensor LDR conectado ao Arduino.

A partir da quantidade dos máximos de intensidade que aparecem no gráfico do *software* (veja a Figura 7), obtivemos o valor do número de franjas que correspondem ao deslocamento do espelho móvel do gravímetro. Este procedimento foi realizado de forma bastante cautelosa, pois devido à grande sensibilidade que o interferômetro possui, qualquer vibração externa ou descuido do operador poderia colocar em risco a veracidade da medida. No decorrer do processo de obtenção das franjas percebemos uma pequena folga entre o eixo de rotação e o espelho, o que acarretava uma descentralização no padrão de interferência, porém isso não afetou significativamente o processo de contagem. A Tabela 2 apresenta os resultados de 5 medidas das franjas de interferência:

Tabela 2: Resultados das medidas de ΔN .

ΔN	18031	18019	18012	18016	18021	
ΔN médio	18020			Desvio padrão da média de ΔN :		3

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Logo, a contagem do número de franjas deslocadas é $\Delta N = 18020 \pm 3$ franjas.

4.4. Resultado da medida de g

O valor de g pode ser obtido a partir da Equação 14 e utilizando os dados da Tabela 3 a seguir:

Tabela 3: Valores e incertezas das variáveis de interesse.

Variável	k (N/m)	d_1 (m)	d_3 (m)	m_3 (kg)	λ (nm)	ΔN
Valor médio/mais provável	365	0,02330	0,05000	0,100	633,2	18020
Incerteza σ da medida	5	0,00001	0,00001	0,003	0,5	3

Fonte: Elaborada pelo autor, 2021.

Substituindo o valor médio/mais provável dessas grandezas na Equação 14 encontramos o seguinte valor mais provável para g :

$$g = 9,7 \text{ m/s}^2$$

A incerteza final da medida pode ser calculada pela fórmula geral para a propagação de erros (TAYLOR, 2012), segundo a qual a incerteza em uma função $q(x, \dots, z)$ de várias variáveis pode ser expressa por:

$$\sigma_q = \sqrt{\left(\frac{\partial q}{\partial x} \sigma_x\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial q}{\partial z} \sigma_z\right)^2} \quad (16)$$

Sendo a nossa função $g(k, d_1, \lambda, \Delta N, m_3, d_3)$, sua incerteza será definida por:

$$\sigma_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial k} \sigma_k\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial d_1} \sigma_{d_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \sigma_\lambda\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial \Delta N} \sigma_{\Delta N}\right)^2} \quad (17)$$

O que, fazendo as derivadas e substituindo os valores das variáveis, resulta em $\sigma_g = \pm 0,3 \text{ m/s}^2$. Dessa forma, podemos escrever o resultado da medição da aceleração da gravidade g da seguinte maneira:

$$g = 9,7 \text{ m/s}^2 \pm 0,3 \text{ m/s}^2$$

Como mencionado anteriormente, uma vez que utilizamos um valor teórico de g para determinar a constante elástica da mola, a forma de determinar a eficácia do equipamento é comparar o valor teórico ($g = 9,78 \text{ m/s}^2$) com o valor experimental ($g = 9,7 \text{ m/s}^2 \pm 0,3 \text{ m/s}^2$). Fazendo isso podemos perceber que o valor obtido experimentalmente pode variar de $9,4 \text{ m/s}^2$ a $10,0 \text{ m/s}^2$. O que significa que o valor de g medido pelo equipamento pode variar aproximadamente de 96 % a 102 % do valor teórico.

Este resultado mostra que o equipamento pode fornecer uma boa aproximação para valores de gravidade locais em situações nas quais não se exija uma alta precisão. No entanto, devido a variação da medida ainda ser relativamente grande, o equipamento ainda não pode ser utilizado para medidas relativas de gravidade que na maioria dos casos exigem uma precisão muito maior dos instrumentos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um gravímetro tem como principal característica determinar o valor da aceleração gravitacional no local onde é feita a medida. Através dos resultados obtidos pudemos concluir que o equipamento aqui desenvolvido cumpriu com êxito sua função obtendo uma boa estimativa para o valor da gravidade local. Como vimos, o sistema rotacional do nosso protótipo permite integração de uma mola e uma massa de prova com um interferômetro de Michelson-Morley, proporcionando assim o desenvolvimento de um método alternativo para a medição gravitacional, utilizando componentes que podem ser facilmente encontrados em laboratórios de física. Levando em conta a influência dos atritos nos eixos do sistema, a resistência do ar e os erros humanos que ocorrem em qualquer experimento, consideramos que obtivemos uma precisão satisfatória no resultado obtido.

A construção do gravímetro interferométrico de mola aborda conhecimentos teóricos experimentais que podem contribuir na formação acadêmica dos estudantes de física. Acreditamos também que este equipamento também possa servir como suporte didático para professores, pois desenvolve de forma interdisciplinar conhecimentos de física, geofísica e eletrônica básica.

Como pretensões futuras, o equipamento pode ser aprimorado, desenvolvendo-se um sistema que diminua o atrito entre o eixo de rotação e o eixo do espelho móvel. Pode-se adicionar também elementos que ajudem a manter a temperatura no mesmo constante, evitando assim o desgaste e a dilatação da mola. Em trabalhos futuros também pretendemos utilizar o método das oscilações da mola para determinar o valor de k de forma independente do valor de g .

REFERÊNCIAS

AQUINO, R.S. **Levantamento gravimétrico do litoral médio do estado do estado do Rio Grande do Sul: parte central emersa da bacia de pelotas**. Dissertação

(Programa de pós-graduação em geociências) - Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2017.

ALPHA O. E. **Interferômetro de Michelson**. Disponível em: <https://www.alphaomega-electronics.com/pt/sistemas-de-formacao-e-educacao/3090-nvis-6115-interferometro-de-michelson.html>. Acessado em: 20 de dez. De 2020.

ARAÚJO, M. **Lei da atração gravitacional**. Revista de Ciência Elementar, 1(01): 0011.2013.

BARBOSA, L. **Gravidade e gravimetria**. 2015. Disponível em: https://intranet.ifs.ifsuldeminas.edu.br/luciano.barbosa/EAC-Geodesia-Fisica/aula_04_gravity_and_gravimetry.pdf. Acessado em: 22 de jan. De 2021.

CASTRO JUNIOR, C. A. C.; GUIMARÃES, G. N.; FERREIRA, N. C. **Evolução da infraestrutura gravimétrica no brasil**. São Paulo, UNESP, Geociências, v. 37, n. 2, p. 361 - 384, 2018.

CAMP, M.V *et al.* **The measurement of the gravity g**. 2003. Disponível em: <http://homepage.oma.be/mvc/gravi/gravity.pdf>. Acessado em: 20 de dez. De 2020.

CATELLI, F.; VICENZI, S. **Interferômetro de Michelson**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v.21, n. especial: p.350-358. 2004.

ERNESTO, M.; USSAMI, N. **Introdução a geofísica**. Departamento de Geofísica, IAG/USP. 2002.

ESCOBAR, I. P. **Os Gravímetros Mecânicos**. Revista Brasileira de Cartografia, v. 42, p. 85-95, 11.1998.

GUIMARÃES *et al.* **30 anos de Medições Gravimétricas Absolutas no Brasil**. Revista Brasileira de Cartografia. vol. 72, n. 1, 2020.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R. **Fundamentos de Física**. LTC, vol 4. 8. Ed., cap. 35, p. 76-110. Rio de Janeiro: 2008

IAG – USP. Disponível em: <https://www.iag.usp.br/siae98/gravimetria/imageR6B.gif>. Acessado em: 10 jan. De 2021.

LEITE, I. J. M. **Experimentos de Física Moderna para a determinação da constante de Planck utilizando Arduino e Visual Basic: uma alternativa na formação e na prática docente**. 2018. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) - Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2018.

LUSO ACADEMIA. **Introdução a interferência**. Disponível em: <https://lusoacademia.org/tag/introducao-a-interferencia/>. Acessado em: 30 de dez. De 2020.

LOPES, W. **Variação da aceleração da gravidade em função da latitude e altitude**. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v.25, n.3: p.561-568, dez.2008.

MARTINS, R. A. **O éter ou o nada**. GHTEC. 2006. Disponível em: <http://www.ghetc.usp.br/server/pdf/Sci-Am-eter-2.PDF>. Acessado em 30 de dez. De 2020.

NICOLI, M.A. **A Terra sob a óptica da gravidade: uma proposta interdisciplinar para o ensino de física**. Dissertação (Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física) - Instituto Federal do Espírito Santo, Cariacica. 2020.

NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica 1: Mecânica. São Paulo: Bluncher, 2013. ISBN 978- 85-212-0745-0.

SILVA, C.C. *et al.* **Construção de um interferômetro de Michelson- Morley com materiais de baixo custo.** Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, Ponta Grossa, v. 10, n. 1, p. 1-15, jan./abr. 2017.

SOUZA, F.M.L; CARDOZO, S.C. **Aceleração da gravidade: análise de experimentos didáticos.** Revista Brasileira de Ensino de Física, vol. 42, e20200202 (2020).

TAYLOR, John R. **Introdução à análise de erros: o estudo de incertezas em medições físicas.** 2ª ed. Porto Alegre: Bookman Editora, 2012.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para Cientistas e Engenheiros - Vol. 1, 5a ed.** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

VIEIRA, O. B. **Projeto e construção de um dinamômetro para medir o torque dinâmico de um eixo rotativo.** Revista Gestão Industrial, Ponta Grossa, v. 15, n. 2, p. 16-52, Abr/Jun 2019.