

A FAIXA DE MÖBIUS: um estudo sob as perspectivas histórica, geométrica e aplicações

THE MÖBIUS STRIP: a study from historical and geometric perspectives and applications

Lucy Flávia de Oliveira Feitosa Paz

lfofp@discente.ifpe.edu.br

Airlan Arnaldo Nascimento de Lima

airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho investiga, sob uma perspectiva teórica, histórica e matemática, a Faixa de Möbius e suas principais propriedades geométricas, destacando suas aplicações em diferentes áreas do conhecimento. A pesquisa parte de um resgate histórico sobre as primeiras representações dessa superfície até sua formalização matemática no século XIX por August Ferdinand Möbius e Johann Benedict Listing, enfatizando sua relevância para o desenvolvimento da topologia moderna. O objetivo geral consiste em analisar as características fundamentais da Faixa de Möbius e compreender como suas propriedades se manifestam tanto em construções matemáticas quanto em situações práticas do cotidiano. Para isso, foi realizada uma pesquisa de natureza qualitativa, descritiva e bibliográfica, utilizando livros, artigos científicos, dissertações e materiais acadêmicos relacionados ao tema. Ao longo do estudo, foram investigadas propriedades como unilateralidade, não orientabilidade, parametrização e o comportamento da superfície quando submetida a cortes longitudinais. Os resultados evidenciaram que a Faixa de Möbius apresenta características que rompem com conceitos geométricos tradicionais, demonstrando comportamentos que contradizem a percepção espacial intuitiva. Além disso, observou-se que essas propriedades ultrapassam o campo teórico e encontram aplicações em áreas como engenharia mecânica, química, nanotecnologia, arte, arquitetura e ensino da matemática. Conclui-se que a Faixa de Möbius constitui um importante exemplo da relação entre abstração matemática e aplicações práticas, reforçando a importância do estudo de estruturas geométricas que contribuem para a compreensão de fenômenos presentes em diferentes contextos científicos e cotidianos.

Palavras-chave: Faixa de Möbius. Geometria. Não orientabilidade. Aplicações.

ABSTRACT

This study investigates the Möbius strip and its key geometric properties from theoretical, historical, and mathematical perspectives, highlighting its applications across various fields of knowledge. The research begins with a historical overview—tracing the surface's early representations to its 19th-century mathematical formalization by August Ferdinand Möbius and Johann Benedict Listing—and emphasizes its significance to the development of modern topology. The primary objective is to analyze the fundamental characteristics of the Möbius strip and understand how its properties manifest in both mathematical constructions and practical, everyday situations. To this end, a qualitative, descriptive, and bibliographic study was conducted, drawing on books, scientific articles, dissertations, and academic materials related to the subject. The study examined properties such as one-sidedness, non-orientability, parameterization, and the surface's behavior when subjected to longitudinal cuts. The results revealed that the Möbius strip possesses characteristics that break with traditional geometric concepts, exhibiting behaviors that defy intuitive spatial perception. Furthermore, it was observed that these properties extend beyond the theoretical realm, finding applications in fields such as mechanical engineering, chemistry, nanotechnology, art, architecture, and mathematics education. The study concludes that the Möbius strip serves as a significant example of the relationship between mathematical abstraction and practical application, underscoring the importance of studying geometric structures that contribute to understanding phenomena across diverse scientific and everyday contexts.

Keywords: Möbius strip. Geometry. Non-orientability. Applications.

1 INTRODUÇÃO

Desde a Antiguidade, a percepção espacial, entendida como a forma pela qual o ser humano compreende e interage com o mundo físico, tem desempenhado um papel fundamental na construção do conhecimento. Influenciados pelos axiomas e princípios da geometria euclidiana, em nosso cotidiano, estamos direcionados a interagir com objetos e superfícies que possuem limites perfeitamente definidos, como "dentro" e "fora", ou "em cima" e "embaixo". A matemática, por exemplo, muitas vezes se caracteriza por sua capacidade de desafiar conceitos que se tem como verdadeiros e inquestionáveis, levando a expandir os horizontes do conhecimento humano. Nesse contexto, poucos objetos ilustram essa quebra de paradigma de forma tão clara e visualmente instigante quanto a Faixa de Möbius, ela é capaz de ser construída a partir de uma tira retangular de papel submetida a uma torção de 180° , ou, como mais conhecida, uma meia torção antes da união de suas extremidades. Essa superfície desconcerta a lógica ao apresentar uma única face e uma única borda. Na figura 1, vemos a representação da Faixa de Möbius.

Figura 1 - Faixa de Möbius



Fonte: Santos (2020)

O encanto provocado por suas propriedades, transcendem o mundo da matemática conforme apontam Möbius, Plato e Savitsky (2023), a Faixa de Möbius adentra profundamente os campos da ciência, da arte e da arquitetura. Presente no cotidiano, ela está longe de ser apenas um conteúdo abstrato restrito aos livros. Seu formato pode ser facilmente reconhecido em diversas áreas da sociedade, estando presente em acessórios como anéis, colares e pulseiras, que utilizam essa estrutura para representar a união e o infinito. Além disso, a Faixa de Möbius é frequentemente associada ao símbolo do infinito, que remete à imagem do número oito na posição horizontal, conforme apontam Cartwright e González (2016).

A Faixa de Möbius também constitui a base do símbolo universal da reciclagem, criado para representar o ciclo contínuo de reaproveitamento de materiais (Figura 2). Sua representação pode ainda ser observada no logotipo do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) (Figura 3). Essa presença evidencia como a matemática se manifesta

no cotidiano, estando presente em diversos elementos que utilizamos ou observamos diariamente.

Figura 2 – Símbolo da Reciclagem



Fonte: Möbius, Plato e Savitsky (2023)

Figura 3 – Logotipo do IMPA



Fonte: <https://impa.br/>

Do ponto de vista histórico, é importante notar que a humanidade já havia utilizado as características dessa superfície séculos antes de sua formalização. conforme registros históricos, a forma visual da faixa já se tinha registros em mosaicos romanos datados do século III, em pinturas, como também em objetos de decorações, contudo, a intuição artística precisou aguardar os matemáticos do século XIX com suas descobertas para que esta representação ganhasse o rigor científico necessário. Foi por meio das investigações quase simultâneas de August Ferdinand Möbius e Johann Benedict Listing, ambos fortemente influenciados pelos ensinamentos do matemático Carl Friedrich Gauss, que a superfície deixou de ser apenas mais uma curiosidade para se tornar um objeto matemático

estruturado e conhecido, o que resultou na criação de mais uma área da matemática, abrindo caminhos para o nascimento da topologia moderna¹.

O presente trabalho tem como objetivo explorar a Faixa de Möbius sob uma perspectiva histórica, geométrica e prática. É importante ressaltar que embora essa superfície seja um dos objetos mais simbólicos e lembrados no estudo da topologia, esta pesquisa se delimita e não se aprofundará nos rigores e nas abstrações dessa área da matemática. Em vez disso, o foco será desmistificar a superfície, apresentando suas principais propriedades matemáticas e demonstrar como esse conceito se materializa no nosso dia a dia.

A relevância deste estudo justifica-se pela necessidade de evidenciar que a matemática não se resume a fórmulas, mas constitui uma ciência viva e aplicável, capaz de se manifestar no design, contribuir para a otimização de processos em diversas áreas e expressar-se nas artes. Compreender a Faixa de Möbius é, portanto, compreender uma ponte entre o pensamento abstrato e a realidade cotidiana.

Para compreender melhor o tema proposto, este trabalho adota uma abordagem teórica e apresenta um resgate histórico sobre a Faixa de Möbius, que vão desde as suas aparições intuitivas na antiguidade até a sua formalização pelos matemáticos Möbius e Listing, em seguida, são analisadas as principais propriedades matemáticas, detalhando sob uma perspectiva geométrica, suas características como a sua unilateralidade, a não orientabilidade e a sua parametrização. Por fim, discute-se a aplicação desses conceitos, revelando como as propriedades únicas dessa superfície são utilizadas na atualidade em diferentes campos da ciência, da tecnologia e da sociedade.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste tópico, será apresentado um breve histórico envolvendo os matemáticos August Ferdinand Möbius e Johann Benedict Listing, responsáveis pela formalização acadêmica da Faixa de Möbius, no entanto, antes de adentrarmos na matemática do século XIX, é necessário destacar que a humanidade já havia tido contato com as propriedades desse objeto muito antes de sua conceituação teórica através das artes.

2.1 APARIÇÕES NA ANTIGUIDADE

Muito antes de ser formalizada teoricamente, a forma visual da Faixa de Möbius já aparecia em artefatos antigos. O registro histórico mais conhecido, segundo Cartwright e González (2016), foi encontrado em um mosaico romano construído por volta de 200 a 250 d.C., na cidade de Sentinum, atual Sassoferato, na Itália. A obra retrata o deus Aion, divindade da eternidade que representa o tempo sem início e sem fim, no interior de uma faixa rodeada pelos símbolos do zodíaco, como pode ser observado na Figura 4.

¹A topologia é o ramo da matemática que estuda as propriedades das figuras e espaços que se mantêm inalteradas sob deformações contínuas, como esticar ou torcer, sem rasgar ou colar.

Figura 4 – Mosaico de Aion



Fonte: Cartwright e González (20216)

Ao observar a imagem, percebe-se que a faixa na qual Aion está inserido apresenta uma leve torção contínua, o que remete diretamente à estrutura da Faixa de Möbius. Essa característica visual sugere a ideia de continuidade e de infinito, já que não é possível identificar de forma clara um começo ou um fim na superfície representada. Mesmo sem conhecimento matemático formal na época, essa representação acaba trazendo uma noção simbólica de eternidade e da ciclicidade do tempo, associada à figura do deus Aion. Assim, o mosaico indica que, ainda na Antiguidade, já existiam representações artísticas que se aproximavam de conceitos que mais tarde seriam estudados pela topologia, mostrando uma interessante relação entre arte, mitologia e matemática.

2.2 DAS APARIÇÕES PARA A FORMALIZAÇÃO

Após vários séculos de observações e estudos sobre superfícies não orientáveis, essa estrutura passou a ser formalizada por dois importantes estudiosos, consolidando-se como uma das superfícies mais conhecidas da geometria. Embora atualmente carregue o nome de August Ferdinand Möbius, sua descoberta é frequentemente associada também a Johann Benedict Listing, com quem divide os créditos de forma quase simultânea em 1858. Listing publicou os resultados de seus trabalhos em 1861, enquanto Möbius conforme Cartwright e González (2016) apontam nunca publicou seus resultados e seu trabalho em uma memória em 1865 sendo apresentado suas contribuições posteriormente. No entanto, Möbius apresentou suas ideias com mais rigor e profundidade matemática explorando os conceitos da topologia fazendo ligação com os seus estudos sobre os poliedros, enquanto

Listing não se aprofundou tanto em seus estudos. Vale ressaltar que ambos foram alunos de Carl Friedrich Gauss, um importante matemático, físico e astrônomo alemão uma importantíssima figura em várias áreas da ciência. A figura abaixo representa August Ferdinand Möbius.

Figura 5 - August Ferdinand Möbius (1790–1868)



Fonte: Möbius, Plato e Savitsky (2023)

August Ferdinand Möbius (1790–1868) nasceu em 17 de novembro de 1790 em Schulpforta, na Alemanha, onde estudou em casa até os treze anos, ingressando no colégio local apenas em 1803. Ele era filho de Johann Heinrich Möbius, professor de dança, e de Johanna Katharine Christiane, descendente de Martinho Lutero². Após concluir sua formação em Schulpforta ele ingressou na Universidade de Leipzig em 1809, matriculado no curso de direito por influência de sua família, mas logo saiu deste curso e ingressou onde ele realmente se interessava, no curso de Matemática, Física e Astronomia, Souza (2020). Möbius foi em busca por um maior aprofundamento na astronomia que o levou para a Universidade de Göttingen, tendo como professor Carl Friedrich Gauss (figura 6), o que contribuiu de forma significativa para aprendizagem e carreira de Möbius, com pouco tempo depois ele se tornou professor de astronomia e diretor do observatório de Leipzig, ao longo das décadas seguintes desenvolveu teorias pioneiras em geometria projetiva e topologia que resultaram na famosa Faixa de Möbius em 1858.

²Martinho Lutero (1483–1546), monge e teólogo alemão, iniciou a Reforma Protestante em 1517 ao contestar a venda de indulgências pela Igreja Católica. Ele rejeitou a compra do perdão, defendendo que a salvação é alcançada apenas pela fé.

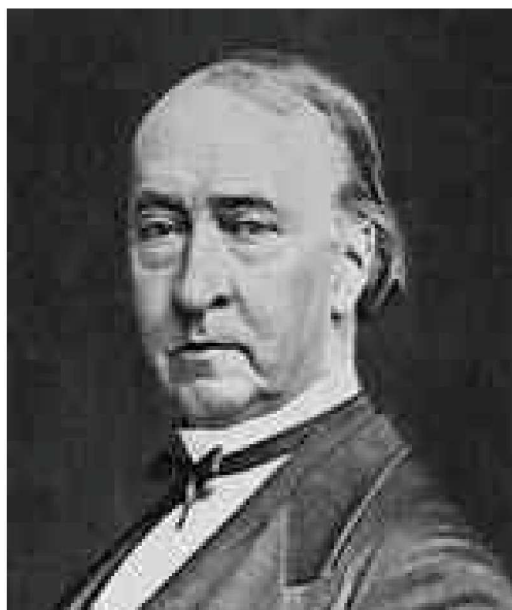
Figura 6 - Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Fonte: <https://www.britannica.com/biography/Carl-Friedrich-Gauss>

O matemático Johann Benedict Listing (1808-1882), (figura 7), nasceu em 25 de julho de 1808 na cidade de Frankfurt na Alemanha, Listing compartilhava com Möbius não apenas o interesse pelas ciências exatas, mas também a forte influência de Carl Friedrich Gauss que foi seu professor. Listing ingressou na Universidade de Göttingen em 1830 para estudar Matemática e Arquitetura, anos depois se tornou professor de física em Göttingen sendo o responsável por introduzir pela primeira vez o termo Topologia que vem do alemão “Topologie” publicado em 1847, ajudando a batizar e consolidar essa nova área da matemática.

Figura 7 – Johann Benedict Listing (1808-1882)



Fonte: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Listing/>

Assim como Möbius, as investigações de Listing o levaram a se deparar com a figura unilateral e não orientável em 1858, embora tenha sido o primeiro a publicar anotações sobre a superfície quatro anos antes da publicação de Möbius como apontado por Editores da Britannica (2025), o rigor e a conexão com a teoria dos poliedros apresentados por Möbius acabaram por eternizar o nome de Möbius na faixa. Ainda assim, a contribuição de Listing foi fundamental para o desenvolvimento da topologia moderna.

A formalização da Faixa de Möbius foi um grande avanço na maneira que as formas espaciais eram vistas e compreendidas na matemática, o que fez a faixa se tornar muito conhecida por apresentar características inéditas e fascinantes para aquele tempo, antes dessa descoberta todas as superfícies eram entendidas de maneira puramente intuitiva e euclidiana, ou seja, possuíam obrigatoriamente dois lados distintos e independentes. E com a chegada dessa nova descoberta ficou evidente que era possível uma superfície apresentar uma única borda e uma única face, com isso, foi necessário novas abordagens analíticas e de visualização matemática o que consolidou a faixa como um importante objeto de estudo em diversas áreas das exatas.

3 METODOLOGIA

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo de natureza qualitativa e descritiva, desenvolvido por meio de pesquisa bibliográfica, como aponta Gil (2008), esse tipo de pesquisa é uma importante ferramenta que auxilia na expansão do conhecimento traçando novos horizontes. A proposta deste trabalho é explorar a Faixa de Möbius sob uma perspectiva histórica, geométrica e prática. Para isso, a pesquisa delimita-se a desmistificar a superfície, apresentando suas principais propriedades e demonstrando como esse conceito se materializa no dia a dia, sem aprofundar-se excessivamente nos rigores abstratos da topologia. Para alcançar esse objetivo, o desenho metodológico foi estruturado nas seguintes etapas:

1. **Definição do tema:** O estudo da Faixa de Möbius focando em seu resgate histórico, principais propriedades e algumas aplicações.
2. **Levantamento de dados:** A revisão bibliográfica foi realizada a partir de buscas em plataformas e repositórios acadêmicos, especificamente no acervo do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), no Google Acadêmico e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD). Com um recorte temporal de trabalhos acadêmicos dos últimos 10 anos, utilizando-se também o Google para complementar e exemplificar algumas informações com artigos, sites e livros, levando em consideração para a seleção dos trabalhos pesquisados o resgate histórico, as principais propriedades e algumas aplicações.
3. **Levantamento histórico:** A primeira etapa consistiu em uma revisão de literatura focada no resgate histórico da superfície. Foram analisados registros documentais

que abordam desde as suas representações visuais intuitivas na antiguidade, como no mosaico romano do deus Aion, até a sua formalização matemática no século XIX pelos estudiosos August Ferdinand Möbius e Johann Benedict Listing.

4. **Análise das propriedades matemáticas:** A pesquisa concentrou-se na fundamentação geométrica da superfície. Utilizando referenciais teóricos, o foco foi descrever e sistematizar as características centrais da faixa, abordando especificamente sua unilateralidade, não orientabilidade, parametrização e comportamento quando submetida a cortes longitudinais.
5. **Mapeamento de aplicações:** Essa etapa consistiu na coleta de exemplos práticos e visuais que comprovam a materialização desse conceito matemático na sociedade. O levantamento abrangeu engenharia mecânica, nanotecnologia, arte e arquitetura.
6. **Recursos tecnológicos:** Foram utilizados o Overleaf para digitação e organização do texto acadêmico, bem como o software GeoGebra para representação gráfica.

O estudo assumiu um caráter qualitativo, bibliográfico e descritivo, tendo como centralidade a desmistificação dessa superfície topológica para conectar o rigor matemático abstrato à realidade prática do cotidiano. Para sustentar essa análise, os principais conceitos abordados transitam entre a topologia sem muito aprofundamento e a geometria analítica, com foco direto na unilateralidade, na não orientabilidade, na parametrização tridimensional e nas características estruturais reveladas por cortes longitudinais. Complementarmente, a pesquisa aborda a interdisciplinaridade desse conceito, evidenciando como essas propriedades se materializam em aplicações.

4 PROPRIEDADES MATEMÁTICAS

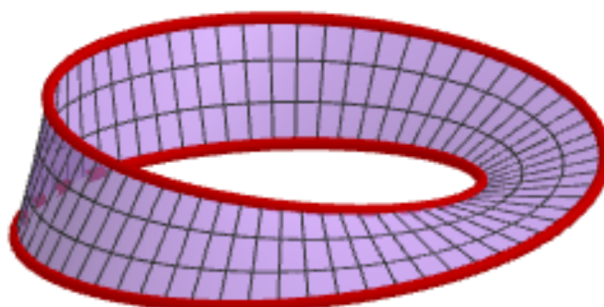
A Faixa de Möbius, é uma superfície que desafia as noções geométricas clássicas ao corromper os conceitos fundamentais de superfície, fronteira e espaço, enquanto as figuras geométricas convencionais com as quais interagimos no nosso cotidiano como a esfera, o cilindro ou até mesmo com uma simples folha de papel que possuem duas faces distintas e independentes, a estrutura resultante da união de uma meia torção em um pedaço retangular de papel rompeu com várias concepções revelando suas características fascinantes e inovadoras.

4.1 UNILATERALIDADE E NÃO ORIENTABILIDADE

A propriedade mais marcante e intuitiva da Faixa de Möbius é a sua unilateralidade, isto é, o fato de possuir apenas uma única face. Pode-se demonstrar essa característica ao traçar uma linha contínua, a partir de um ponto inicial, ao longo do centro da faixa. Ao fazer isso, nota-se que a linha percorre toda a extensão da superfície sem que seja necessário tirar a caneta do papel. Portanto, esse pequeno experimento comprova que a Faixa de

Möbius possui apenas um lado. Assim como possui apenas uma face, a Faixa de Möbius apresenta também a característica de ter uma única borda contínua. Essas propriedades podem ser visualizadas na figura a seguir.

Figura 8 – Faixa de Möbius



Fonte: Autoria própria (2026)

Acompanhando a borda destacada na cor vermelha, vemos que retornaremos para o mesmo ponto de partida, o que não aconteceria se esse mesmo experimento fosse realizado sem fazer está rotação de 180 antes da junção das extremidades os resultados seriam duas bordas independentes e diferentes, a borda superior e a inferior. No caso da Faixa de Möbius, com a rotação de 180 aplicada nas suas extremidades faz com que se una a extremidade superior de um lado com a inferior do outro lado.

Dessas características decorre o conceito de não orientabilidade, mas o que é orientabilidade? A definição a seguir foi baseada no livro "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies".

Definição: Uma superfície regular S é orientável se for possível cobri-la com uma família de vizinhanças coordenadas, de tal modo que se um ponto $P \in S$ pertence a duas vizinhanças dessa família, então a mudança de coordenadas tem Jacobiano positivo em P . A escolha de uma tal família é chamada uma orientação de S , e S , neste caso, diz-se orientada. Se uma tal escolha não é possível, a superfície é não-orientável. Se S é orientada, uma parametrização (local) x é compatível com a orientação de S se, juntando x à família de parametrizações dada pela orientação, obtem-se ainda uma (logo, a mesma) orientação de S .

Proposição: Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é orientável se e somente se existe um campo diferenciável $N: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais em S . Carmo (2012)

Demonstração: A prova é dividida em duas partes: Carmo (2012)

Se S é orientável: É possível cobrir S com uma família de vizinhanças coordenadas de forma que, na interseção de quaisquer duas, a mudança de coordenadas tenha Jacobiano positivo. Assim, define-se o vetor normal como $N(p) = N(u, v)$ em cada vizinhança. Graças ao Jacobiano positivo, os vetores normais calculados em diferentes parametrizações, $N(u, v)$

e $N(\bar{u}, \bar{v})$, coincidem nas interseções. Sendo as coordenadas construídas a partir do produto vetorial, N é uma aplicação diferenciável.

Se existe o campo diferenciável N : Cobre-se S com vizinhanças coordenadas conexas. Pela continuidade do campo normal, e intercambiando os parâmetros u e v se for necessário, podemos garantir que, para cada vizinhança:

Demonstração.

$$N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} \quad (1)$$

O produto interno a seguir será uma função contínua na vizinhança (que é conexa), logo assumirá um sinal constante:

$$\left\langle N(p), \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} \right\rangle = f(p) = \pm 1 \quad (2)$$

Se $f = -1$, trocamos u e v para obter $f = 1$. Ao fazer isso para todas as vizinhanças, analisa-se a interseção de quaisquer duas, dadas por $x(u, v)$ e $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$. O Jacobiano da mudança de coordenadas,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \quad (3)$$

deve ser estritamente positivo. Caso fosse negativo, teríamos a seguinte contradição na interseção:

$$\frac{\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}}{|\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}|} = N(p) \quad (4)$$

$$-\frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = -N(p) \quad (5)$$

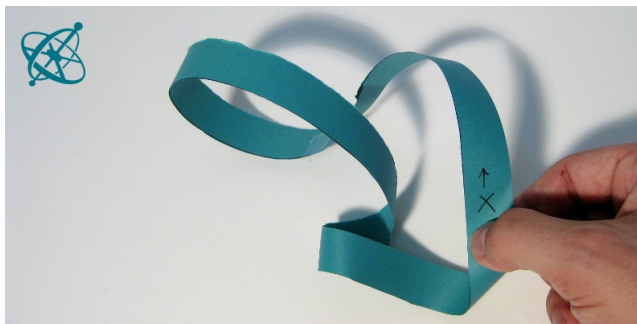
Como essa contradição não pode ocorrer (pois N é bem definido e diferenciável), o Jacobiano é sempre positivo, provando que a família de vizinhanças coordenadas satisfaz a condição de orientabilidade para S .

□

Portanto, do ponto de vista intuitivo, afirmar que uma superfície é não orientável equivale a dizer que ela não possui a distinção entre "lado de dentro" e "lado de fora". Outra propriedade geométrica notável da Faixa de Möbius pode ser observada ao realizarmos

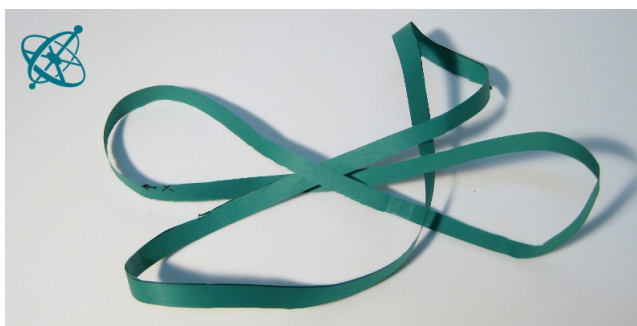
cortes longitudinais³ em sua estrutura. Retomando o exemplo da linha traçada no centro da faixa: se a superfície for cortada ao longo de toda a extensão dessa linha, de forma contra-intuitiva, o resultado não será a divisão em duas Faixas de Möbius independentes. Em vez disso, obtém-se uma única faixa mais longa, contendo duas torções (figura 9). Além disso, se um novo corte central for realizado ao longo dessa nova faixa resultante, ela finalmente se dividirá. No entanto, o resultado serão duas fitas distintas, cada uma com duas torções que permanecerão entrelaçadas entre si, conforme ilustrado na figura 10.

Figura 9 – Um corte



Fonte: https://www.ciensacao.org/experimento_mao_na_massa/e5032m_moebius.html

Figura 10 – Dois cortes



Fonte: https://www.ciensacao.org/experimento_mao_na_massa/e5032m_moebius.html

Esses fenômenos observados experimentalmente demonstram que a Faixa de Möbius possui propriedades únicas e singulares. Se o mesmo experimento de corte fosse realizado em uma superfície convencional (figura 11), como o anel cilíndrico, resultaria em duas superfícies independentes. Contudo, a aplicação da meia-torção (180°) modifica a topologia do objeto; assim, um corte longitudinal não separa a peça, mas altera o seu comprimento e o número de torções internas.

³Cortes longitudinais são cortes realizados no sentido do comprimento de um objeto ou superfície, isto é, acompanhando sua maior extensão, e não atravessando sua largura. Em uma tira de papel, por exemplo, um corte longitudinal seria feito de uma extremidade à outra, seguindo o seu comprimento.

Figura 11 – Anel Cilíndrico



Fonte: Autoria própria (2026)

Para além da manipulação física, é fundamental sistematizar o comportamento da faixa submetida a cortes longitudinais, expressando essas transformações através de generalizações matemáticas. Para modelar matematicamente estes fenômenos, define-se um retângulo inicial bidimensional de comprimento L e largura M , seja n o número de meias-voltas (onde cada meia-volta equivale a uma rotação de 180° aplicadas a esta fita antes da colagem das suas extremidades) e neste caso tomamos $n = 0$ após a união de suas extremidades e ao realizar o corte longitudinalmente e ao meio percebemos que haverá separação após o corte. A Faixa de Möbius corresponde estritamente ao caso em que $n = 1$ o comportamento topológico e as características geométricas da superfície resultante após um corte contínuo dependem fundamentalmente da paridade do número de torções n da faixa, com isso se n for um número par a superfície será orientável e após a realização de um corte longitudinal irá separar a superfície e se n for igual a um número ímpar será não orientável e após o corte não haverá separação.

Estando estreitamente relacionada a *Teoria dos Nós*⁴. Os nós podem ser considerados como formados pelo entrelaçamento e laçada de um pedaço de barbante de qualquer maneira, unindo-se as extremidades. Portanto, após cada corte realizado na faixa percebe-se que obtemos torções que também podemos chamar de nós.

4.2 PARAMETRIZAÇÃO

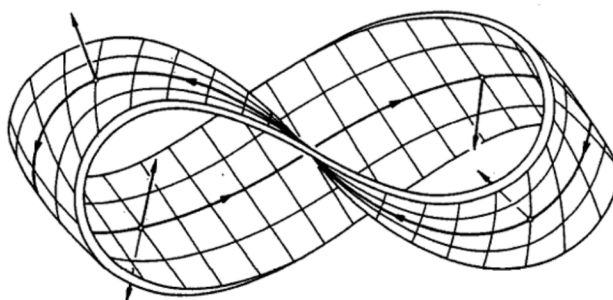
Na geometria diferencial, a propriedade de orientabilidade de uma superfície está intrinsecamente ligada à possibilidade de definirmos um campo de vetores normais unitários contínuo em toda a extensão da superfície. De maneira intuitiva, uma superfície é orientável se possuímos uma noção consistente de "lado de dentro" e "lado de fora" (ou "acima" e "abaixo") que não se altera ao percorrermos qualquer caminho fechado contido nela. Para verificar essa propriedade analiticamente, examinamos as mudanças de coordenadas entre as vizinhanças que cobrem a superfície. Se, em todas as interseções,

⁴A teoria dos nós é o estudo topológico de curvas fechadas no espaço tridimensional. De forma intuitiva, um nó matemático é como uma corda cujas pontas foram unidas, e essa teoria investiga quais deformações (como esticar ou torcer) podem ser feitas nessa estrutura sem que ela acesse a si mesma ou seja cortada.

o Jacobiano da mudança de coordenadas for positivo, a orientação é preservada, garantindo a orientabilidade global. Caso contrário, se for possível encontrar uma transição com Jacobiano negativo, a superfície não pode ser orientada globalmente. Abaixo, apresentamos o desenvolvimento analítico para a Faixa de Möbius, que serve como o exemplo fundamental de uma superfície regular não-orientável em $\mathbb{R}^3$. Os conceitos a seguir foi baseada no livro "Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies"

Exemplo 3. Descreveremos agora um exemplo de uma superfície não-orientável, a chamada faixa de Möbius (figura 12). Essa superfície é obtida considerando o círculo S^1 dado por $x^2 + y^2 = 4$ e o segmento aberto AB dado no plano yz por $y = 2$, $|z| < 1$. Deslocamos o centro c de AB ao longo de S^1 , e giramos AB em torno de c , no plano formado por Oz e c , de tal modo que quando c descreve um ângulo u , AB tenha girado $u/2$. Quando c completa uma volta ao longo de S^1 , AB retorna à sua posição inicial, com os pontos extremos invertidos.

Figura 12 – Campo de Vetores Normais ao Longo da Faixa de Möbius



Fonte: Carmo(2012)

É geometricamente evidente que a faixa de Möbius M é uma superfície regular não-orientável. Com efeito, se M fosse orientável, existiria um campo diferenciável $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ de vetores normais unitários. Tomando esses vetores ao longo do círculo $x^2 + y^2 = 4$, veremos que, depois de uma volta completa, N voltaria à sua posição inicial como $-N$, o que é uma contradição.

Daremos agora uma demonstração analítica dos fatos mencionados acima. Um sistema de coordenadas locais para a faixa de Möbius é dado por:

$$x(u, v) = \left(\left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \sin u, \left(2 - v \sin \frac{u}{2} \right) \cos u, v \cos \frac{u}{2} \right) \quad (6)$$

onde $0 < u < 2\pi$ e $-1 < v < 1$. A vizinhança coordenada correspondente omite os pontos do intervalo aberto $u = 0$. Tomando agora Ox como origem dos u 's, obtemos uma outra parametrização $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$ dada por:

$$\begin{aligned}
x &= \left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right)\right) \cos \bar{u}, \\
y &= \left(2 - \bar{v} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right)\right) \sin \bar{u}, \\
z &= \bar{v} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{u}}{2}\right)
\end{aligned} \tag{7}$$

cuja vizinhança coordenada omite o intervalo $u = \pi/2$. Essas duas vizinhanças coordenadas cobrem a faixa de Möbius, e mostram que ela é uma superfície regular.

Observe que a interseção das duas vizinhanças coordenadas não é conexa, mas constituída de duas componentes conexas:

$$\begin{aligned}
W_1 &= \left\{x(u, v) : \frac{\pi}{2} < u < 2\pi\right\}, \\
W_2 &= \left\{x(u, v) : 0 < u < \frac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned} \tag{8}$$

A mudança de coordenadas é dada por:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= u - \frac{\pi}{2} \\ \bar{v} &= v \end{aligned} \right\} \text{ em } W_1, \tag{9}$$

e

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{3\pi}{2} + u \\ \bar{v} &= -v \end{aligned} \right\} \text{ em } W_2. \tag{10}$$

Decorre que:

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = 1 > 0 \text{ em } W_1, \tag{11}$$

e

$$\frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial(u, v)} = -1 < 0 \text{ em } W_2. \tag{12}$$

Para mostrar que a faixa de Möbius é não-orientável, vamos supor que seja possível definir um campo diferenciável de vetores normais $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Intercambiando u e v se necessário, podemos admitir que:

$$N(p) = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} \quad (13)$$

para todo p na vizinhança coordenada de $x(u, v)$. Analogamente, podemos admitir que:

$$N(p) = \frac{\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}}{\|\bar{x}_{\bar{u}} \wedge \bar{x}_{\bar{v}}\|} \quad (14)$$

para todos os pontos da vizinhança coordenada $\bar{x}(\bar{u}, \bar{v})$. Entretanto, o Jacobiano da mudança de coordenadas deve ser -1 em W_1 ou em W_2 (dependendo das eventuais mudanças do tipo $u \rightarrow v$, $\bar{u} \rightarrow \bar{v}$ que tenham sido feitas). Se p é um ponto dessa componente da interseção, então $N(p) = -N(p)$, o que é uma contradição.

Portanto, a suposição de que a faixa de Möbius admite um campo diferenciável e global de vetores normais unitários é insustentável, essa contradição liquida a hipótese de orientabilidade, provando analiticamente que a Faixa de Möbius é uma superfície regular não-orientável. Com isso, conclui-se que a orientabilidade não é uma propriedade puramente local, mas sim uma característica global da superfície a impossibilidade de estender continuamente um vetor normal unitário por toda a sua extensão reflete geometricamente a ausência de uma distinção consistente entre "dentro" e "fora", consolidando a Faixa de Möbius como o exemplo clássico de uma superfície que possui uma única face em $\mathbb{R}^3$.

5 APLICAÇÕES

Como discutido anteriormente, a Faixa de Möbius transcende a abstração matemática e os conceitos euclidianos clássicos, a unilateralidade e a não orientabilidade, propriedades que em um primeiro momento pareciam ser apenas curiosidades matemáticas criadas pela mente de geômetras do século XIX, revelaram-se soluções geniais e importantíssimas para problemas práticos, tecnológicos e industriais no mundo real. A transição da topologia teórica para a aplicabilidade prática demonstra a interdisciplinaridade da matemática a capacidade de utilizar uma única superfície de forma contínua e ininterrupta permitiu que engenheiros, físicos, químicos e artistas otimizassem processos, criassem novos componentes e expressassem a ideia do infinito de forma material e tangível. A seguir, exploram-se de forma detalhada as principais e mais impactantes aplicações da Faixa de Möbius em diversas áreas do conhecimento humano.

5.1 MECÂNICA

Uma das utilizações práticas mais notáveis, intuitivas e financeiramente vantajosas das propriedades geométricas da Faixa de Möbius encontra-se na engenharia mecânica e na indústria, mais especificamente no design de correias transportadoras (figura 13). Em um sistema de correia convencional que possui a forma cilíndrica comum, com um lado de dentro e um lado de fora bem definidos, o desgaste gerado pelo atrito constante, engrenagens e materiais transportados ocorre de maneira desigual, isso resulta em uma vida útil reduzida e paradas frequentes para manutenção e substituição do equipamento.

A solução encontrada pela indústria foi a aplicação direta do conceito matemático ao introduzir uma meia torção de 180° na correia antes de unir suas extremidades, transforma-se a esteira em uma superfície de Möbius e como aponta Calça, Anoushka (2026) a aplicação dessa meia torção prolonga a vida útil da peça e possibilita que ambas as superfícies se desgastem igualmente.

Figura 13 – Correias Transportadoras



Fonte: <https://share.google/tk8yOz5h0mFvtWWEi>

5.2 QUÍMICA E NANOTECNOLOGIA

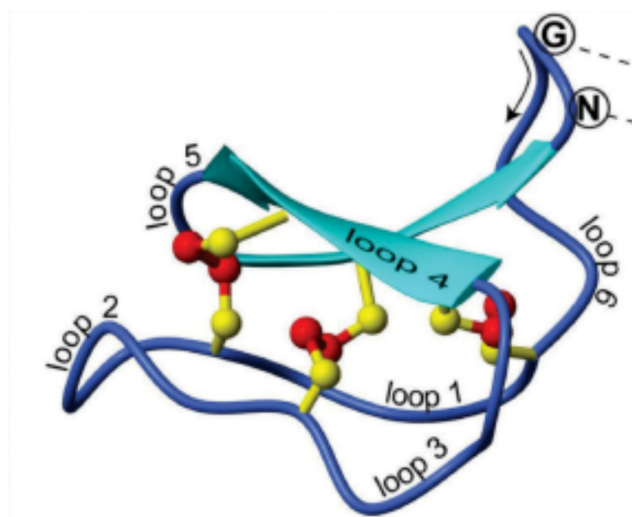
Em um nível ainda mais microscópico, a Faixa de Möbius inspirou avanços notáveis na química moderna e na nanotecnologia, desafiando a forma como compreendemos a estrutura molecular.

Contudo, os avanços nos métodos de síntese química⁵ permitiram que, cientistas finalmente sintetizassem as chamadas "Moléculas de Möbius", criando compostos orgânicos em formato de anéis que contêm a meia torção característica conforme revelam Möbius, Plato e Savitsky (2023) um exemplo extraordinário é o ciclotídeo Kalata B1 (figura 14). Diferente das moléculas de anéis convencionais, as moléculas aromáticas de Möbius

⁵Métodos de síntese química são formas de produzir novas moléculas em laboratório, combinando substâncias mais simples por meio de reações químicas controladas.

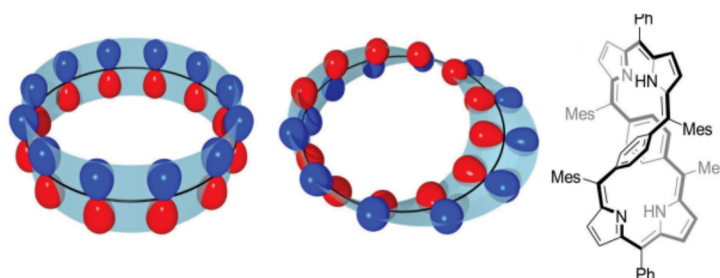
(figura 15) apresentam propriedades quânticas, magnéticas, ópticas e de condução de elétrons completamente inéditas e contraintuitivas como apontado por Calça, Anoushka (2026) esses compostos aromáticos, têm um circuito de elétrons que se torce de uma forma que ajuda a explicar padrões incomuns de estabilidade molecular. Esse avanço demonstra como a geometria espacial dita o comportamento da matéria em escala atômica, abrindo um vasto leque de possibilidades para o desenvolvimento de novos nanomateriais sintéticos, chaves moleculares e condutores para a computação do futuro.

Figura 14 – Ciclotídeo Kalata B1



Fonte: Möbius, Plato e Savitsky (2023)

Figura 15 – Moléculas Aromáticas de Möbius



Fonte: Möbius, Plato e Savitsky (2023)

5.3 ARTE, ARQUITETURA E ENSINO

Para além das ciências e engenharias, a Faixa de Möbius exerce um fascínio na representação visual, na arquitetura e nas artes, sendo a materialização estética perfeita da continuidade e do infinito. Como já evidenciado na introdução deste trabalho por meio do símbolo universal da reciclagem (desenhado por Gary Anderson para representar um ciclo contínuo e inesgotável) e logotipos institucionais, a faixa está visualmente enraizada no nosso cotidiano.

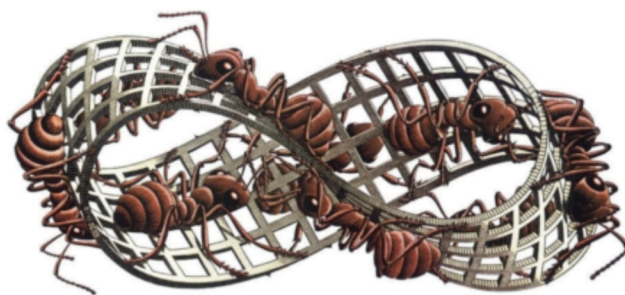
Na arte, a obra do genial artista gráfico holandês M.C. Escher que ficou conhecido por suas obras incompreensíveis (figura 16), e inquestionavelmente, a mais famosa exploração visual dessa superfície. Na sua litogravura intitulada Fita de Möbius II (Formigas Vermelhas), concluída em 1963, e segundo Möbius, Plato e Savitsky (2023) mostra formigas rastejando na faixa com a intenção de percorrer todas as partes de sua (doce) superfície, (figura 17).

Figura 16 – Obra de M.C. Escher



Fonte: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-45659225>

Figura 17 – Fita de Möbius II



Fonte: Möbius, Plato e Savitsky (2023)

Na arquitetura contemporânea, a fluidez contínua da faixa serve de inspiração para desafiar a rigidez euclidiana das construções tradicionais. Arquitetos utilizam o conceito de Möbius para criar edifícios e pontes onde não há distinção formal e estrutural clara entre teto, parede e chão, por exemplo a figura 18 da Ponte Wuchazi, na China.

Figura 18 – Ponte Wuchazi



Fonte: <https://www.cetroconcursos.org.br/tiras-de-mobius-tao-simples-de-criar-tao-dificeis-de-entender/>

Por fim, no contexto da educação matemática a Faixa de Möbius atua como uma ferramenta pedagógica de valor inestimável. Em um ambiente escolar frequentemente marcado pela memorização de fórmulas e pela rigidez da geometria plana tradicional, a superfície de Möbius oferece uma experiência de aprendizagem tátil, visual e construtivista.

6 RESULTADOS E ANÁLISES

A análise dos dados e os resultados obtidos neste estudo revelam que a transição entre a teoria geométrica abstrata e a observação de modelos tridimensionais proporciona uma compreensão mais ampla e aprofundada das propriedades das superfícies. Ao investigar as características da Faixa de Möbius, um dos primeiros resultados relevantes observados refere-se ao contraste entre sua estrutura e a percepção espacial construída a partir da geometria euclidiana tradicional. Em geral, estamos habituados a interagir com objetos que apresentam duas faces distintas, como uma folha de papel, na qual é possível distinguir facilmente um lado do outro sem que exista comunicação entre essas superfícies. Entretanto, a análise da Faixa de Möbius evidenciou que tal compreensão intuitiva não pode ser generalizada para todas as estruturas geométricas.

A modelagem tridimensional da superfície permitiu verificar que a Faixa de Möbius contradiz essa lógica convencional, ao apresentar uma única face e uma única borda contínua. Esse resultado demonstra que determinadas propriedades geométricas não podem ser compreendidas apenas por meio da observação de uma superfície, exigindo uma análise de sua estrutura. Tal comportamento evidencia uma ruptura com concepções espaciais tradicionais, mostrando que conceitos aparentemente simples, como a distinção entre dois lados independentes, podem assumir características completamente diferentes em determinadas construções matemáticas.

Para demonstrar esse fenômeno, o estudo concentrou-se na análise do comportamento de um vetor perpendicular associado à superfície. O deslocamento contínuo desse vetor ao longo da linha central da faixa permitiu observar alterações em sua orientação espacial ao

percorrer toda a extensão da estrutura. Em uma superfície convencional, após uma volta completa, o vetor retornaria ao ponto inicial mantendo a mesma orientação. Entretanto, na Faixa de Möbius, observou-se que ao completar o percurso o vetor retorna ao ponto de origem apontando para a direção oposta, apresentando uma inversão em seu sentido inicial. Esse comportamento evidencia de forma visual e geométrica a propriedade da não orientabilidade.

Do ponto de vista matemático, esse resultado possui importância significativa, pois demonstra que não existe uma definição consistente de orientação ao longo de toda a superfície. Em termos analíticos, essa inversão pode ser interpretada pelo comportamento das mudanças de coordenadas associadas à parametrização da faixa, em que determinadas transições apresentam inversão de orientação. Dessa forma, conceitos intuitivos como “acima” e “abaixo”, “interno” e “externo”, deixam de possuir uma interpretação bem definida. A análise permitiu compreender que a orientabilidade não corresponde apenas a uma propriedade local da superfície, mas constitui uma característica associada à estrutura completa do objeto.

Outro resultado importante obtido durante a investigação relaciona-se ao comportamento da Faixa de Möbius quando submetida a cortes longitudinais. Inicialmente, realizou-se um corte exatamente ao longo da linha média da superfície embora a expectativa intuitiva fosse a divisão da estrutura em duas partes independentes, o resultado observado mostrou a formação de uma única faixa contínua, mais estreita, com comprimento ampliado e contendo duas torções completas. Esse comportamento apresentou-se contrário ao esperado quando comparado ao comportamento de uma fita convencional.

A análise desse resultado evidencia que pequenas alterações na estrutura geométrica podem provocar mudanças significativas nas propriedades do objeto. Diferentemente de superfícies orientáveis comuns, a presença da meia torção modifica a organização espacial da faixa, alterando a maneira como suas regiões permanecem conectadas além disso, ao realizar um novo corte longitudinal na estrutura resultante, observou-se a formação de duas faixas distintas que permanecem entrelaçadas entre si. Esse resultado demonstra que as propriedades topológicas da superfície influenciam diretamente o comportamento obtido após determinadas transformações.

Além dos aspectos teóricos, os resultados permitiram identificar a presença dessas propriedades em aplicações práticas relacionadas a diferentes áreas do conhecimento na engenharia mecânica, observou-se que o conceito da Faixa de Möbius pode ser aplicado na construção de correias industriais e sistemas de transmissão, permitindo um desgaste mais uniforme do material e contribuindo para o aumento de sua vida útil. Em áreas como arquitetura, arte e design, sua estrutura contínua inspira construções e representações visuais que exploram ideias relacionadas à continuidade, ao movimento e ao infinito.

No contexto educacional, os resultados obtidos também reforçam a relevância pedagógica dessa superfície matemática a utilização de recursos visuais e experimentais

possibilita que conceitos frequentemente tratados de maneira abstrata sejam compreendidos de forma mais concreta. Além disso, a investigação da Faixa de Möbius estimula a curiosidade e incentiva a construção do conhecimento por meio da observação, da formulação de hipóteses e da experimentação.

Os resultados obtidos evidenciam, portanto, que a Faixa de Möbius constitui um exemplo significativo de como conceitos matemáticos abstratos podem ser compreendidos por meio de representações geométricas e interpretações visuais. As observações realizadas reforçam a relação entre teoria e prática, demonstrando que propriedades inicialmente tratadas apenas em âmbito matemático podem contribuir para aplicações concretas em diferentes áreas do conhecimento. Dessa maneira, os resultados encontrados confirmam os objetivos propostos nesta pesquisa, evidenciando que a matemática ultrapassa os limites da abstração e se manifesta de maneira presente e aplicável em diversos contextos da realidade.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao longo deste trabalho foi possível compreender que a Faixa de Möbius representa muito mais do que uma curiosidade matemática, seu estudo permitiu observar como conceitos que, inicialmente, parecem distantes da realidade cotidiana podem apresentar aplicações e interpretações relevantes em diferentes áreas do conhecimento. A investigação realizada evidenciou que a matemática não se limita à resolução de cálculos ou à utilização de fórmulas, mas constitui um campo amplo capaz de explicar fenômenos, estimular questionamentos e estabelecer relações entre teoria e prática.

Por meio do resgate histórico apresentado, observou-se que as características associadas à Faixa de Möbius já estavam presentes em manifestações artísticas e culturais muito antes de sua formalização matemática. Posteriormente, com as contribuições de August Ferdinand Möbius e Johann Benedict Listing, essa estrutura passou a ser estudada de maneira sistemática, tornando-se um importante objeto para o desenvolvimento da topologia moderna. Esse percurso histórico evidencia que a construção do conhecimento matemático ocorre de forma gradual, sendo resultado de observações, investigações e aperfeiçoamentos ao longo do tempo.

No que se refere às propriedades matemáticas abordadas, verificou-se que a Faixa de Möbius rompe com percepções intuitivas construídas a partir da geometria tradicional. Suas características de unilateralidade e não orientabilidade demonstram que nem todas as superfícies podem ser compreendidas a partir das noções convencionais de interior e exterior, ou de lados independentes. Além disso, os experimentos relacionados aos cortes longitudinais revelaram comportamentos inesperados, mostrando que pequenas modificações estruturais podem gerar resultados significativamente diferentes do esperado.

Também foi possível perceber que a importância dessa superfície ultrapassa os limites da teoria matemática. As aplicações apresentadas demonstram sua presença em diferentes

contextos, abrangendo desde processos industriais e estudos químicos até manifestações artísticas, arquitetônicas e educacionais. Isso reforça a ideia de que muitos conceitos matemáticos considerados abstratos possuem impacto direto no desenvolvimento científico e tecnológico, contribuindo para a criação de soluções práticas e para a compreensão de diversos fenômenos presentes na sociedade.

Além disso, o estudo da Faixa de Möbius apresenta relevante potencial pedagógico, uma vez que possibilita uma abordagem mais dinâmica e investigativa do ensino de matemática. A utilização de construções, observações e experimentações permite que o processo de aprendizagem se torne mais significativo, despertando a curiosidade e incentivando o desenvolvimento do pensamento crítico. Dessa forma, o estudante deixa de ocupar apenas uma posição passiva diante dos conteúdos e passa a participar ativamente da construção do conhecimento.

Embora os objetivos propostos neste estudo tenham sido alcançados ao explorar a Faixa de Möbius sob as perspectivas histórica, geométrica e prática, é fundamental registrar as limitações metodológicas e teóricas que cercaram a elaboração desta pesquisa. A principal dificuldade prática enfrentada residiu na realização do levantamento bibliográfico em língua portuguesa, a escassez de literatura científica densa e detalhada publicada originalmente em nosso idioma sobre o tema, a maior parte das produções nacionais disponíveis limita-se a abordagens extremamente resumidas e introdutórias. Em conformidade com as delimitações estabelecidas na introdução, este trabalho optou por não adentrar de maneira detalhada no formalismo matemático abstrato e nos rigores teóricos próprios da topologia geral, concentrando-se em desmistificar a superfície de forma acessível e correlacioná-la com o cotidiano. Diante dessas limitações e com o propósito de incentivar a continuidade acadêmica e a expansão das investigações sobre esta estrutura geométrica, sugerem-se as seguintes propostas para estudos futuros:

1. **Aprofundamento Formal no Campo da Topologia Geral e Algébrica:** Uma pesquisa voltada para a matemática pura e abstrata em vez de focar na construção visual ou física da Faixa de Möbius, que busque estudar o objeto por meio de estruturas algébricas.
2. **Estudo Geométrico por meio da Geometria Diferencial:** Focado no cálculo avançado, na análise de funções coordenadas e nas propriedades métricas locais da faixa como curvatura e vetores tangentes.
3. **Desenvolvimento e Avaliação de Sequências Didáticas no Ensino de Matemática:** Um trabalho de campo voltado para a educação matemática através da elaboração de uma sequência didática focada na Faixa de Möbius e aplicá-la com alunos baseadas em experimentos de manipulação física e cortes longitudinais da faixa.

4. **Modelagem Geométrica Computacional Interativa e Impressão 3D:** Unir a matemática abstrata com demonstrações visuais e fabricação usando impressoras 3D para demonstrações mais complexas.
5. **Análise Comparativa de Superfícies Não Orientáveis e unilaterais:** Um estudo comparativo que busque novos horizontes geométricos para além da faixa, analisando outras formas que também desafiam a percepção espacial convencional e pouco conhecidos.

Por fim, conclui-se que os objetivos propostos neste trabalho foram alcançados, uma vez que foi possível explorar a Faixa de Möbius sob perspectivas históricas, geométricas e práticas, estabelecendo relações entre seus fundamentos matemáticos e suas aplicações no cotidiano. Espera-se que esta pesquisa possa contribuir para a compreensão dessa superfície e estimular novos estudos que ampliem sua investigação, permitindo aprofundamentos em áreas como, a geometria diferencial e ensino da matemática, fortalecendo a percepção da matemática como uma ciência presente, dinâmica e constantemente conectada ao mundo real.

REFERÊNCIAS

CALÇA, Anoushka. **Faixa de Möbius**. Enciclopédia Britânica, 12 de maio. 2026. Disponível em: <https://www.britannica.com/science/Mobius-strip>. Acesso em: 25 abr. 2026.

CALISTER, Fernando Marques. **Representações dos Números Complexos e Transformações de Möbius**. 2016. 87 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2016. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=78670&id1=2862. Acesso em: 08 mar. 2026.

CARMO, M. P. D. **Geometria diferencial de curvas e superfícies**. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012. Disponível em: <https://pt.scribd.com/document/549477786/Geometria-diferencial-de-curvas-e-superficies-by-Manfredo-Perdigao-do-Carmo-z-lib-org>. Acesso em: 15 mai. 2026.

CARTWRIGHT, Julyan H. E.; GONZÁLEZ, Diego L. **Möbius strips before Möbius: Topological hints in ancient representations**. arXiv preprint arXiv:1609.07779, 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1609.07779>. Acesso em: 30 abr. 2026.

EDITORES DA BRITANNICA. **Agosto Ferdinando Möbius**. Enciclopédia Britânica, 13 de novembro. 2025. Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/August-Ferdinand-Mobius>. Acesso em: 27 abr. 2026.

EDITORES DA BRITANNICA. **transportador**. Enciclopédia Britânica, 23 de janeiro. 2014. Disponível em: <https://www.britannica.com/technology/conveyor>. Acesso em: 25 mai. 2026.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Disponível em: <https://ayanrafael.com/wp-content/uploads/2011/08/gil-a-c-mc3a9>. Acesso em: 29 mai. 2026.

MÖBIUS, Klaus; PLATO, Martin; SAVITSKY, Anton. **The Möbius Strip Topology: History, Science, and Applications in Nanotechnology, Materials, and the Arts**. Singapore: Jenny Stanford Publishing, 2023.

SANTOS, Marcus Vinicio de Jesus. **Transformação de Möbius**. 2016. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de Sergipe, São Cristovão, 2016. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=95039&id1=2722. Acesso em: 01 mar. 2026.

SOUZA, André Luiz Braga de. **Transformação de Möbius: projeções na esfera de Riemann**. 2020. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade

Federal de Mato Grosso, Barra do Garças, 2020. Disponível em: https://sca.proformat-sbm.org.br/busca_tcc_det.php?id=171052430&id1=5669. Acesso em: 01 mar. 2026.