

DE HIPASO DE METAPONTO A EUDOXO DE CNIDO: A HISTÓRIA POR TRÁS DA DESCOBERTA DOS IRRACIONAIS

From Hippasus of Metapontum to Eudoxus of Cnidus: The Story Behind the Discovery of Irrational Beings

Alan Yvson da Silva Martins

aysm@discente.ifpe.edu.br

Bruno Lopes Oliveira da Silva

bruno.lopes@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo geral analisar o contexto histórico, filosófico e matemático da descoberta das grandezas irracionais na Grécia Antiga, destacando a crise provocada pela incomensurabilidade e a contribuição da teoria das proporções de Eudoxo de Cnido para a reconstrução dos fundamentos da matemática grega. Para tanto, realizou-se uma pesquisa de abordagem qualitativa, fundamentada em revisão bibliográfica de obras clássicas da História da Matemática e da Educação Matemática, tomando como principais referências Boyer (1996), Eves (2004), Roque (2012), Miguel e Miorim (2019), D'Ambrosio (2012), Pommer (2018), além de estudos relacionados aos Elementos de Euclides. A investigação discute a concepção pitagórica de número e comensurabilidade, a descoberta da irracionalidade da diagonal do quadrado unitário, a antifairese como método de identificação da incomensurabilidade e a teoria das proporções elaborada por Eudoxo como resposta ao problema dos irracionais. Como principal resultado, verificou-se que a chamada Crise dos Incomensuráveis representou uma importante ruptura epistemológica, ao evidenciar os limites do paradigma pitagórico e impulsionar o desenvolvimento de novas estruturas conceituais para o tratamento das grandezas. Além disso, o estudo aponta a História da Matemática como um recurso didático relevante para o ensino dos números irracionais, contribuindo para uma abordagem mais contextualizada, investigativa e significativa da aprendizagem matemática.

Palavras-chave: História da Matemática. Incomensurabilidade. Escola Pitagórica. Eudoxo de Cnido. Ruptura Epistemológica.

ABSTRACT

Instituto Federal de Pernambuco *campus* Pesqueira. Curso de Licenciatura em Matemática. 06 de julho de 2026.

This study aims to analyze the historical, philosophical, and mathematical context of the discovery of irrational magnitudes in Ancient Greece, highlighting the crisis provoked by incommensurability and the contribution of Eudoxus of Cnidus' theory of proportions to the reconstruction of the foundations of Greek mathematics. To this end, a qualitative research approach was conducted, based on a literature review of classic works in the History of Mathematics and Mathematics Education, drawing primarily on Boyer (1996), Eves (2004), Roque (2012), Miguel and Miorim (2019), D'Ambrosio (2012), Pommer (2018), as well as studies related to Euclid's *Elements*. The investigation discusses the Pythagorean conception of number and commensurability, the discovery of the irrationality of the diagonal of a unit square, *anthyphaeresis* as a method for identifying incommensurability, and the theory of proportions developed by Eudoxus as a response to the problem of irrationals. As a main result, it was found that the so-called Crisis of Incommensurables represented a major epistemological rupture by exposing the limits of the Pythagorean paradigm and driving the development of new conceptual frameworks for the treatment of magnitudes. Furthermore, the study points to the History of Mathematics as a relevant pedagogical resource for teaching irrational numbers, contributing to a more contextualized, investigative, and meaningful approach to mathematics learning.

Keywords: History of Mathematics; Incommensurability; Pythagorean School; Eudoxus of Cnidus; Epistemological Rupture.

1 INTRODUÇÃO

Durante muitos séculos, a matemática vem se desenvolvendo e se aperfeiçoando rapidamente com a ajuda de figuras importantes como matemáticos e até mesmo filósofos. Entretanto, como toda ciência, a matemática passou por vários períodos conturbados na história, incluindo as crises. Entre os episódios mais decisivos da história da matemática antiga está a chamada “*A Crise dos Incomensuráveis* “. Em contraste às outras crises, a descoberta dos irracionais teve um certo impacto na visão de mundo estabelecida pelos matemáticos da época. A evolução da Matemática é pontuada por rupturas conceituais que transformaram a compreensão humana sobre os números, as grandezas e a lógica científica. Um dos episódios mais emblemáticos desse processo foi a Crise dos Incomensuráveis, na Grécia Antiga, desencadeada pela descoberta de que a diagonal de um quadrado unitário não poderia ser expressa como uma fração. O acontecimento abalou os

fundamentos da escola pitagórica, cuja filosofia defendia que o universo e toda a realidade eram explicados estritamente por números inteiros e suas razões.

No século V a.C., a filosofia pitagórica predominava e segundo Pitágoras o universo era regido por números, mas não quaisquer números, apenas os inteiros. Tais números eram tão importantes para Pitágoras e seus seguidores que eles os consideravam a essência de tudo. Segundo Boyer (1996) a palavra número na Grécia era usada só para inteiros e uma fração não era considerada como um ente único, mas como a relação entre inteiros. Os pitagóricos viam os números como a base de tudo: a música, o movimento dos planetas e as formas geométricas eram vistos como reflexos dessa perfeição matemática. Romper com isso parecia impossível. Assim, a revelação de que existiam grandezas sem uma medida comum gerou uma crise enorme, pois desafiava muito mais do que a matemática da época, atacava a própria filosofia que sustentava o modo de vida deles. No entanto, a ruptura do paradigma de comensurabilidade causou problema quando se percebeu que nem todos os números poderiam ser expressos por razões inteiras.

A descoberta de que a diagonal do quadrado unitário não poderia ser expressa pela razão entre inteiros revelou a existência de grandezas incomensuráveis, os futuros números irracionais. Ao evidenciar os limites da aritmética pitagórica, a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ impulsionou a matemática grega em direção a um novo rigor dedutivo, no qual a geometria assumiu o papel central no tratamento de grandezas contínuas, entendidas aqui como magnitudes que não se restringem a unidades discretas e contáveis, permitindo uma divisão infinita que transcende a aritmética dos números inteiros. Nesse cenário, destaca-se a contribuição de Eudoxo de Cnido, cuja teoria das proporções unificou grandezas comensuráveis e incomensuráveis sob uma mesma estrutura lógica. Posteriormente sistematizada por Euclides no Livro V de *Os Elementos*, essa formulação reestruturou os fundamentos da matemática grega, garantindo o avanço rigoroso da geometria a despeito do desafio da incomensurabilidade.

Diante desse cenário de crise, a escola Pitagórica viu seus fundamentos bases abalados, uma vez que a descoberta dos irracionais confrontava a crença de que tudo era número inteiro. Segundo registros históricos, a filosofia pitagórica era restrita apenas aos integrantes da academia, ou seita, como muitos a chamavam, conforme

Porfírio em *Vida de Pitágoras*. Uma das versões da história conta que a descoberta dos irracionais foi atribuída a Hipaso de Metaponto. Indo além da narrativa mística e do destino trágico de Hipaso, a descoberta da incomensurabilidade impôs um desafio técnico sem precedentes: a incapacidade da aritmética da época em medir a própria realidade geométrica que ela buscava descrever. Essa anomalia do sistema dedutivo obrigou a matemática a abandonar a intuição em favor de uma estrutura dedutiva mais complexa, capaz de lidar com a continuidade do espaço sem depender exclusivamente da contagem de unidades inteiras.

Em um certo sentido, a análise histórica da Crise dos Incomensuráveis não deve ser apenas vista como um documento do passado, mas como um elemento vivo na formação acadêmica e do conhecimento matemático. Dando ênfase, claro, a outros registros históricos que são de suma importância nas formações atuais, visto que, para Miguel e Miorim (2019), uma abordagem histórica com essa fundamentação pode criar um ambiente vantajoso para o diálogo e para a problematização pedagógica dos temas estudados no presente.

Dessa maneira, ao estudar o rompimento causado pela descoberta dos irracionais dentro do pensamento pitagórico atribuída a Hipaso e posteriormente a resolução do problema por Eudoxo, tal pesquisa procura prover e auxiliar o entendimento da natureza do rigor matemático, trazendo consigo temas profundamente importantes para a matemática. A utilização de fatos históricos para anteceder o tema que irá ser apresentado, é uma certa “transposição didática” por meio da História da Matemática que usa a própria história para desmistificar a matemática, mostrando assim que ela é uma criação humana, derivada de necessidades e desafios do passado. Outro ponto que merece ser mencionado é a ideia de atrair a atenção dos alunos, usando a curiosidade como ferramenta na utilização desse meio, fazendo com que o interesse por parte deles desperte e torne o ensino-aprendizagem mais interessante e, de certa forma, lúdico. Além de sua relevância histórica e epistemológica, esse episódio carrega um forte potencial didático. Ao abordar a descoberta dos irracionais sob uma perspectiva histórica, o professor pode apresentar a matemática como uma construção humana viva, tecida por dúvidas, impasses e reformulações. Essa transição da crise pitagórica para a sala

de aula fomenta uma prática pedagógica que supera a mera transmissão mecânica de fórmulas, estimulando uma postura mais crítica, reflexiva e investigativa nos estudantes.

Diante disso, este trabalho busca analisar o contexto histórico, filosófico e matemático da descoberta das grandezas irracionais na Grécia Antiga, enfatizando o papel da escola pitagórica, a crise da comensurabilidade e a solução proposta por Eudoxo de Cnido. De maneira específica, pretende-se investigar a concepção pitagórica de número e proporção, examinar a demonstração da irracionalidade da diagonal do quadrado unitário, compreender a teoria das proporções desenvolvida por Eudoxo e discutir as contribuições históricas e didáticas desse episódio para o ensino da Matemática.

A organização desse trabalho reflete a trajetória de superação do pensamento grego. Para cumprir tais propósitos, a estrutura deste trabalho foi organizada de modo a refletir a própria trajetória de superação do pensamento grego. Primeiramente, detalha-se o contexto da escola pitagórica. Em seguida analisa-se o colapso dessa harmonia provocado pela diagonal do quadrado e a paralisia conceitual que se seguiu. No terceiro momento, examina-se o método da antífareses como o dispositivo que evidenciou a natureza infinita da incomensurabilidade. Posteriormente, discute-se a sistematização teórica de Eudoxo de Cnido, que deu o rigor necessário para a solidificação da geometria clássica nos *Elementos* de Euclides e por fim analisar a transposição didática para os livros didáticos e o aprendizado em sala de aula.

2 O DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO E CONCEITUAL DA INCOMENSURABILIDADE.

Para entender a fundo a importância dos números irracionais e como eles podem ser trabalhados em sala de aula, esta fundamentação teórica reconstrói o caminho histórico e os desafios que transformaram a matemática na Grécia Antiga. O percurso deste capítulo inicia-se com uma análise da Escola Pitagórica, buscando compreender a forte ligação entre o misticismo e a visão de que os números inteiros governavam o universo. Em seguida, o foco se volta para o momento de ruptura dessa filosofia: o colapso gerado quando a diagonal do quadrado revelou uma grandeza que

a aritmética da época não conseguia medir ou explicar. Para detalhar esse impasse lógico, examina-se o método da antifairese, que funcionava como uma evidência visual dessa incomensurabilidade. Por fim, discute-se a solução teórica proposta por Eudoxo de Cnido para organizar esses conceitos e, a partir desse resgate, reflete-se sobre o potencial didático desse episódio para humanizar o ensino da matemática nas salas de aula atuais

1.1 A Escola Pitagórica: Entre o Místico e o Concreto.

Após viajar por vários lugares pelo Oriente, como a Babilônia, Índia e Egito, Pitágoras regressou para a Grécia com idade avançada, tendo por volta de 53 anos e tornou-se líder de um movimento religioso que, posteriormente, viria a ser considerado uma escola envolta em misticismo, muitas vezes chamada de seita.

A escola fundada por Pitágoras de Samos estabeleceu o alicerce de uma filosofia que enxergava na aritmética a chave para o entendimento do cosmos. Diferente de civilizações anteriores que utilizavam a matemática para fins práticos, os pitagóricos buscavam uma demonstração formal e universal para as relações métricas. Em *Vida de Pitágoras*, Porfírio descreve a importância do silêncio na formação dos discípulos;

Ele impunha aos que vinham a ele um silêncio de cinco anos, testando quão bem eles podiam se conter; e somente após terem sido testados pelo silêncio, e tendo dado provas de sua moderação, é que lhes permitia ouvir suas lições dentro da cortina e vê-lo pessoalmente. (Porfírio, 1982, p. 43).

O silêncio posto por Pitágoras aos seus adeptos não era meramente uma regra disciplinar, mas um processo de purificação espiritual e uma rigorosa prova de confiança por parte deles ao seu mestre. Esse estágio servia como o principal divisor hierárquico dentro da escola: de um lado estavam os *Acusmáticos*, discípulos iniciantes que apenas ouviam os preceitos orais (*acusmata*) sem permissão para ver o mestre ou questionar lições; do outro, estavam os *Matemáticos*, que, após provarem seu autocontrole através do silêncio, eram admitidos ao contato direto com Pitágoras para discutir demonstrações. Embora Pitágoras e seus seguidores tivessem um olhar místico aprofundado, isso não os impediu de criarem a Aritmética, visto que para

alcançar o concreto (a matemática) era preciso passar pelos ritos místicos (silêncio e a purificação).

A jornada pelas maravilhas da matemática permitiu que Pitágoras construísse um instrumento musical, o monocórdio, o que lhe proporcionou investigar as bases da matemática acústica. Graças à sua genialidade, o filósofo percebeu que dependendo do tamanho de uma corda, suas vibrações alternavam-se ao tomar conhecimento de que as notas eram obtidas pelas divisões (razões numéricas) feitas em uma corda utilizando números inteiros. A escala musical utilizada até hoje foi concebida mediante as observações de Pitágoras. Para o filósofo, a relação entre os números e a natureza era perfeitamente harmônica e apenas os membros da academia discutiam suas descobertas entre si em reuniões secretas, que apenas aqueles que detinham o símbolo da escola podiam entrar (Ver figura 1). Tal símbolo chamado de pentagrama, foi objeto de estudo, onde Pitágoras e seus adeptos descobriram inúmeros segredos matemáticos

Para os pitagóricos o pentagrama representava mais do que um símbolo secreto, ele guardava a beleza da natureza. Essa medida matemática era vista como a assinatura da perfeição no universo. A junção entre o concreto e o místico fica mais evidente quando percebemos que essa mesma regra foi usada pelos gregos para construir esculturas e monumentos, como o Partenon. Logo, o que começou com um segredo espiritual da escola, tornou-se a base da beleza e da arquitetura no mundo real.

Ao estudarem a fundo as propriedades da estrela de cinco pontas, os pitagóricos perceberam que ela guardava em si a Proporção Áurea, uma relação geométrica que eles consideravam uma assinatura perfeita. O que tornava essa descoberta fascinante e posteriormente irônica era o fato de que a razão áurea é, em si, um número irracional. Dessa forma o próprio emblema que representa a perfeição da escola carregava, de forma misteriosa, a semente da incomensurabilidade.

Figura 1- Pentágono



FONTE: Eves (2004, p. 101).

Segundo Boyer (1996), Jâmblico, um grande filósofo neoplatônico, atribuiu a Pitágoras a descoberta dos *números amigáveis*, que assim como muitas das descobertas do filósofo, eram envoltas em misticismo.

Esse par de números alcançou uma aura mística, e rezava a superstição posterior que dois talismãs com esses números seriam uma amizade perfeita entre os que os usavam. Os dois números tiveram um papel importante na magia, feitiçaria e na determinação de horóscopos. (Boyer, 1996, p. 98).

O par de números amigáveis atribuídos a Pitágoras é constituído por 284 e 220. Eles são amigáveis pois os divisores próprios de 220 são 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 e 110 cuja soma é exatamente 284. Da mesma forma, os divisores próprios de 284, quando somados, resultam em 220. Apesar dessa harmonia perfeita encontrada nos números inteiros, a academia de Pitágoras enfrentaria posteriormente um paradoxo que abalaria seus pilares, tornando o pensamento pitagórico insustentável por um certo período.

1.2 O Número como *Arché*: A Ontologia da Unidade.

Na cosmovisão pitagórica, o número não era simplesmente um símbolo para qualificar objetos, mas a própria *Arché*, o princípio primordial que era a composição da realidade. Para os iniciados da Escola, a máxima “*tudo é número*” significava que a harmonia do cosmos, desde o movimento dos astros até as oitavas musicais, era governada por propriedades aritméticas. Diferente da concepção moderna, o “*número*” para os gregos referia-se exclusivamente aos inteiros positivos; o que hoje compreendemos como frações eram vistos apenas como razões entre esses inteiros, mantendo a integridade da unidade. Essa ontologia numérica dava ao mundo um caráter modesto e ordenado, onde a clareza do universo dependia da capacidade de

expressar qualquer relação física através de uma contagem de unidades indivisíveis. Em *Vida de Pitágoras*, Porfírio destaca a crença de que os números eram a linguagem da divindade e a ferramenta de organização do cosmos, sustentando que o número é o mestre das formas e das ideias, e que todas as coisas se assemelham ao número.

O centro desse pensamento era a doutrina da comensurabilidade, a ideia de que, dadas duas grandezas quaisquer, existiria sempre uma unidade de medida comum capaz de contê-las um número inteiro de vezes. Essa perspectiva estabelece uma ponte perfeita entre a geometria e a aritmética: qualquer segmento de reta, por mais elaborado que fosse, deveria ser passível de representação por uma razão inteira. Os pitagóricos acreditavam que o universo era um mosaico harmonioso onde todas as partes eram “mensuráveis entre si”, uma certeza que transformava a matemática em forma de teologia racional. Essa segurança na razão absoluta e na harmonia das proporções conferia à escola pitagórica sua autoridade intelectual, instituindo um modelo onde a existência de algo “incalculável” era, por definição, impossível.

1.3 O Teorema de Pitágoras e o Colapso da Harmonia: A descoberta da Incomensurabilidade.

Comumente, ao estudarmos a matemática dos anos finais do ensino fundamental, observa-se uma das atribuições ao grande matemático grego Pitágoras: o tão notório Teorema de Pitágoras. Contudo, o que poucas vezes é discutido em sala é que essa relação métrica já era conhecida por povos anteriores à Grécia Antiga. Registros como a famosa tabuleta de argila babilônica *Plimpton 322*, datada de aproximadamente 1800 a.C., e alguns documentos egípcios demonstram que esses povos já utilizavam números inteiros, como as ternas pitagóricas, para resolver problemas práticos de construção, muito antes do nascimento do matemático de Samos.

Figura 2 – Tabuleta de argila babilônica, Plimpton 322.



FONTE: Boyer (1996, p. 24).

Seguindo essa lógica, o reconhecimento da escola pitagórica não reside na “invenção” da fórmula, mas na tentativa de oferecer uma demonstração formal e universal para essa relação. Acredita-se que os Pitagóricos utilizavam a geometria para decompor as áreas. Ao fazerem comparações de dois quadrados iguais preenchidos com triângulos retângulos, eles visualizaram que a área do quadrado construído sobre o lado maior (hipotenusa) equivalia exatamente a soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos. A demonstração formal, que deveria ser a notoriedade da harmonia dos números, acabou por se tornar o pontapé inicial de um problema para a filosofia Pitagórica.

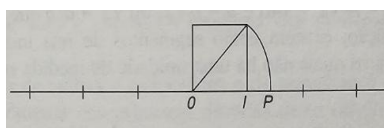
A aplicação sistemática do teorema revelou a maior fragilidade do pensamento pitagórico. Em algum dos seus momentos de descoberta, Pitágoras e seus seguidores, ao empregar a lógica a um quadrado de lado unitário, se depararam com uma diagonal cujo valor não podia ser expressado por uma razão entre os números inteiros, o número em questão era $\sqrt{2}$. Tal fenômeno que desafiava o lema da escola pitagórica, marcou o início da Crise dos Incomensuráveis, pois descobrira uma grandeza que a aritmética da época não era capaz de medir ou nomear. Segundo Eves:

A descoberta da existência de números irracionais foi surpreendente e perturbadora para os pitagóricos. Em primeiro lugar porque parecia desferir um golpe mortal na filosofia pitagórica segundo a qual tudo dependia dos números inteiros. (Eves, 2004, p.106).

O que antes era uma relação perfeita entre áreas tornou-se um paradoxo perturbador, invalidando a premissa ontológica da crença de que o universo era regido estritamente por números inteiros e suas frações. Em sua obra, *Introdução à História da Matemática*, Howard Eves usa uma demonstração geométrica simples para mostrar que os números racionais comportam uma interpretação visual direta. Ao

analisar a fundamentação histórica dos números, o autor demonstra que essa interpretação geométrica se baseia na subdivisão infinita de um segmento unitário OI . Nessa visão, qualquer ponto P na reta deveria corresponder a uma fração p/q , onde o segmento seria comensurável com a unidade OI . Entretanto, Eves ressalta o colapso dessa concepção ao representar a diagonal de um quadrado posto sobre a reta (conforme a figura 3): o ponto ressaltante não coincide com nenhum número racional.

Figura 3 – Representação geométrica da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado unitário.



FONTE: Eves (2004, p. 105).

Ao observar a relação que se obtém ligando uma extremidade à outra (desenhando a diagonal), vemos que se deu origem a exatos dois triângulos retângulos. Tendo em vista que todos os lados de um quadrado são exatamente iguais, temos que ambos os catetos medem 1 unidade e busca-se determinar a diagonal, para isso, utilizamos o teorema citado anteriormente, o Teorema de Pitágoras, enunciado como: a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Aplicando essa relação temos a seguinte equação:

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow 1^2 + 1^2 = c^2$$

Quando resolvemos a equação acima, obtemos o valor de “ d ” que é a nossa diagonal do quadrado unitário (na equação acima, está sendo representado por “ c ”) como sendo $\sqrt{2}$, que seria exatamente o ponto P (representado na imagem 3). O problema central para os pitagóricos estava no fato de que, ao tentar expressar o valor de “ d ” em formato de fração/razão (ou seja, como um número racional), eles viram que tal tarefa era impossível. Esse fenômeno mostra que o ponto P , embora exista fisicamente na geometria, não correspondia ao sistema numérico que eles consideravam “perfeito”. Essa lacuna entre a geometria e a aritmética da época é o que define a essência da Crise dos Incomensuráveis.

Segundo contam, a descoberta da incomensurabilidade foi atribuída a Hipaso de Metaponto, que divulgou o descobrimento e deu a queda ao dogma do lema da escola pitagórica. Existem duas versões da história, uma delas conta que após divulgar “a violação do dogma pitagórico”, Hipaso foi expulso da escola e posteriormente foi erigido um túmulo para ele enquanto estava vivo, simbolizando que, para a comunidade, ele estava morto.

O descobrimento da incomensurabilidade não apenas invalidou o lema da escola, mas afundou a matemática grega, levando-a a um estado de paralisia conceitual. O que antes era uma unidade indivisível e ao mesmo tempo harmoniosa revelou-se um abismo de divisibilidade infinita. O termo que caracterizava a palavra irracional, após a descoberta, era justamente *alogon* que significa “não passível de razão” ou “não deve ser dito”, reforçando a ideia de que a descoberta do número irracional $\sqrt{2}$ deu origem a um vácuo na lógica aritmética, chegando ao ponto de ela não conseguir operar. Diante desse impasse a matemática grega procurou refúgio na geometria pura por medo dos números desconhecidos. Os gregos passaram a tratar grandezas de forma separada de números.

Diante da impossibilidade de mostrar certas grandezas através da aritmética dos inteiros, a matemática grega sofreu uma mutação, passando a utilizar ainda mais a geometria. Como as operações com números irracionais geram problemas lógicos insuperáveis para a época, os geômetras passaram a substituir valores numéricos por dimensões geométricas. Deste modo, ao invés de somar números, somavam-se segmentos de reta. Essa mudança de padrão permitiu que a matemática continuasse a avançar, mas puramente sob a geometria.

Assim como o termo *alogon* se referia aos irracionais, o incomensurável descoberto a partir da diagonal do quadrado de lado unitário também tinha sua designação grega como sendo *arrestos* ou indivisíveis. Embora a demonstração da irracionalidade da $\sqrt{2}$ seja atribuída aos próprios pitagóricos, não se tem bases concretas para afirmar tal feito. A prova disso utiliza o método por absurdo, vejamos;

Assumimos que $\sqrt{2}$ seja racional, então:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \text{ (} p \text{ e } q \text{ são primos entre si.)}$$

Elevamos ambos os lados ao quadrado:

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Multiplicamos ambos os termos por q^2 :

$$2q^2 = \frac{p^2}{q^2} * q^2$$

$$2q^2 = p^2$$

Como p^2 é o dobro de um inteiro, concluímos que p^2 é par; logo p também é par. Assumiremos agora o seguinte caso, façamos $p = 2r$ na última equação;

$$2q^2 = (2r)^2$$

$$2q^2 = 4r^2$$

$$\frac{2r^2}{2} = \frac{4r^2}{2}$$

$$q^2 = 2r^2$$

Concluímos então que q^2 é par, e, portanto, q também é par. Porém isso é impossível, uma vez que admitimos que p e q são primos entre si, logo, abandonamos a suposição de que $\sqrt{2}$ fosse racional, por levar a uma contradição. Por muito tempo, o único número irracional conhecido foi justamente o mencionado no parágrafo acima, embora alguns anos mais tarde, segundo Platão, Teodoro de Cirene mostrou que outros números também eram irracionais como $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ e $\sqrt{17}$, como afirma Eves (2004).

A paralisia diante do incomensurável forçou o nascimento de um rigor lógico nunca visto. A necessidade de provar a irracionalidade através do método da redução ao absurdo demonstra que a intuição já não era mais suficiente para sustentar aquilo. A partir desse ponto, a matemática grega distanciou-se das aplicações práticas, focando em estrutura dedutiva onde cada afirmação precisava ser blindada contra problemas posteriores, o que culminaria, séculos mais tarde, na organização impecável encontrada nos *Elementos* de Euclides, segundo Eves (2004), o escândalo foi resolvido por um brilhante matemático, discípulo de Platão e do pitagórico Arquitas, através de uma nova definição de proporção

A Crise dos Incomensuráveis mostrou, na verdade, o confronto profundo entre o discreto e o contínuo. Enquanto a aritmética pitagórica operava em um espaço de unidades únicas e contáveis, a geometria revelava uma natureza contínua, onde entre dois pontos sempre existe uma infinidade de outros. Esse precipício entre o que se pode contar e o que se pode medir, tornou-se o maior desafio intelectual da antiguidade, transformando a descoberta em uma reviravolta que separou, por milênios, o tratamento dado aos números daquele dado às grandezas.

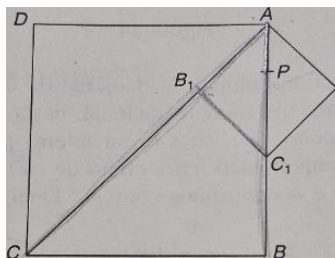
1.4 Antifairese: A Ponte Entre o Caos da Incomensurabilidade e as Proporções de Eudoxo.

Antes de compreendermos a solução proposta pelo matemático de Cnido para o problema dos irracionais, precisamos entender como os gregos visualizavam a incomensurabilidade. O dispositivo usado era a antifairese, do grego *anthyphairesis* (ανθυφαίρεσις), era um método que utilizava subtrações sucessivas semelhantes ao que conhecemos hoje como Algoritmo de Euclides para encontrar o máximo divisor comum. Para os pitagóricos, ao fazer comparações entre duas grandezas, esperava-se que o processo terminasse em um resto zero, as grandezas eram declaradas comensuráveis, revelando uma unidade comum que coubesse perfeitamente em ambas. De uma forma mais simples e para exemplificar, vamos comparar duas barras, uma de 15 cm e a outra de 6 cm. Ao subtraímos a menor da maior ($15 - 6$), obtemos o resultado 9. Subtraímos 6 de novo ($9 - 6$), encontrando 3; fazendo a comparação do

resto 3 com a barra de 6 unidades temos: $6 - 3 = 3$ e $3 - 3 = 0$. Concluimos então que o 3 é a medida comum (MDC), provando assim que a razão $15:6$ é comensurável.

No entanto, a utilização desse dispositivo à diagonal de um quadrado unitário mostrou um comportamento perturbador. O processo de subtração não apenas falhava em terminar, mas gerava um ciclo infinito de outros novos quadrados e diagonais cada vez menores. A importância dessa construção está no fato de que ela levou a matemática grega a uma evolução, buscando unidades estáticas. Observando a Figura 4, vemos a demonstração geométrica de divisões feitas a partir de um quadrado.

Figura 4 – Representação geométrica ilustrando divisões de um quadrado.



FONTE: Eves (2004, p.106)

Eves explica que ao tentarmos marcar o comprimento do lado AB sobre a diagonal AC , encontramos o ponto B_1 . O segmento que resta (B_1A) torna-se a base para a construção de um novo quadrado menor, onde o problema se repete igual. Esse processo “infinito” atua como uma evidência da crise, pois demonstra que a razão entre a diagonal e o lado não é passível de ser expressa por números inteiros.

Enquanto na comparação entre as barras de 15 e 6 unidades o processo termina rapidamente ao encontrarmos o MDC, na diagonal do quadrado unitário ($\sqrt{2}$), a antifairese torna-se um algoritmo sem fim. Cada nova subtração gera um resto que exige a criação de um novo quadrado, sucessivamente. Esse loop infinito lógico era a prova visual e geométrica de que a razão entre essas duas grandezas não era um ente perfeito (na concepção pitagórica), mas algo que desafiava a própria definição de limite e medida da época.



1.5 Eudoxo de Cnido: A Mente que Harmonizou o Discreto e o Contínuo.

Eudoxo de Cnido, que viveu entre os anos de 408 e 355 a.C., atuou como matemático, astrônomo e filósofo. Nascido em uma família de médicos, chegou a exercer a profissão por anos antes de ampliar seus horizontes intelectuais em viagens para a Itália e Atenas. Em suas viagens, teve oportunidades de estudar com Arquitas, um dos seguidores de Pitágoras e frequentar seminários de filosofia juntamente com Platão e outras renomadas figuras da época. Eudoxo também estudou astronomia com os egípcios e registrou pela primeira vez que a duração de um ano era de 365 dias e 6 horas e por volta do ano 350 foi designado a escrever a constituição da cidade de Cnido, segundo Bongiovanni *et al.* (2005).

Muito além da sua relevância na filosofia e na política, Eudoxo deixou um legado científico notável. Na matemática, sua maior contribuição foi o desenvolvimento de uma nova visão para as proporções, onde permitiu que a matemática da época conseguisse lidar com grandezas incomensuráveis de uma forma única, solucionando assim um dos maiores impasses da matemática grega. A estratégia de Eudoxo foi eficiente ao ponto de tornar-se a base do livro V de Euclides.

1.6 A Teoria das Proporções e os Elementos de Euclides.

Boa parte dos problemas relacionados à matemática foram solucionados com o passar do tempo e com a ajuda de muitos matemáticos, assim como a questão dos números irracionais, ou incomensuráveis; décadas após a crise que abalou o pensamento pitagórico. Para eles toda grandeza era comensurável, ou seja, toda grandeza poderia ser expressa por razões inteiras. Entretanto, surgiu o problema ao descobrir a irracionalidade de $\sqrt{2}$, o que para a lógica na época, era uma grandeza que não admitia comensurabilidade. Eudoxo de Cnido, foi uma figura emblemática que conseguiu contornar o problema da irracionalidade. De acordo com Eves (2004), a exposição magistral da teoria das proporções de Eudoxo encontra-se no livro V de Euclides e segue afirmando que foi por meio dessa teoria, aplicável tanto a grandezas comensuráveis como a grandezas incomensuráveis, que se resolveu o problema lógico em decorrência da descoberta dos números irracionais pelos pitagóricos.

Essa construção lógica foi preservada e sistematizada por Euclides nos *Elementos*, ele define proporção ou igualdade entre duas razões da seguinte maneira:

Caso uma primeira tende para uma segunda a mesma razão que uma terceira para uma quarta, também os mesmos múltiplos tanto da primeira quanto da terceira terão para os mesmos múltiplos da segunda e da quarta, segundo uma multiplicação qualquer, a mesma, razão, tendo sido tomados correspondentes. (Bicudo, 2009, p. 210).

A genialidade da proposta de Eudoxo residiu em deslocar o foco da busca por uma unidade de medida comum para a comparação sistemática entre grandezas. Para compreender a profundidade da Definição 5 de Eudoxo, é preciso notar que ela opera como um teste universal de igualdade. Diferente da abordagem pitagórica, que exigia um divisor comum para comparar grandezas (comensurabilidade), Eudoxo introduz uma comparação baseada em múltiplos infinitos. Se tomarmos quatro grandezas a, b, c e d , elas estarão na mesma razão se, para todos os inteiros positivos m e n ; $ma > nb$, $ma = nb$, $ma < nb$ implicarem, respectivamente, em $mc > nd$, $mc = nd$ e $mc < nd$.

Em linguagem mais simples, Eudoxo precisava dizer que duas frações ou duas razões eram iguais, mesmo quando não dava para usar números racionais, como no caso da raiz de 2. A jogada dele foi usar os múltiplos, por exemplo: se tomarmos uma razão de 2 para 4 e outra de 5 para 10, ao multiplicarmos ambas as razões por duas elas irão continuar proporcionais. No livro V dos *Elementos*, Eudoxo estabelece uma condição de existência entre duas grandezas. Conforme a tradução de Bicudo (2009) para os *Elementos*, a definição 4 estabelece que magnitudes são ditas ter uma razão entre si aquelas que multiplicadas podem exceder uma à outra.

Tal estratégia lógica foi revolucionária porque permitiu que a geometria continuasse a progredir com rigor absoluto, mesmo sem possuir uma teoria aritmética para os números irracionais. Como aponta Klein (1976 *apud* POMMER, 2018), essa solução deu à matemática grega a segurança necessária para tratar grandezas contínuas com a mesma precisão que tratava os números discretos, resolvendo o impasse que havia paralisado a escola pitagórica.

1.7 A História da Matemática como Recurso Didático: Do Problema à Sala de

Aula:

A utilização da história como uma ferramenta pedagógica não deve ser vista meramente como uma narração de fatos ou uma curiosidade segregada, mas sim como uma estratégia de transposição didática capaz de humanizar o conhecimento. Como discutido anteriormente, a Crise dos Incomensuráveis representou uma ruptura de paradigma que forçou a matemática grega a buscar novos meios de rigor. Ao transpor esse cenário para a educação básica, o professor permite que o aluno perceba a matemática como uma ciência viva, fruto de dúvidas e de desafios, e não como um conjunto de fórmulas estáticas e inquestionáveis.

Conforme aponta Pommer (2018, p. 9), a utilização de livros e relatos da História da Matemática permite posicionar o pensamento do estudante dentro do fluxo de desenvolvimento da humanidade, em suma, o aluno irá entender que o conhecimento matemático provém da necessidade humana e não algo que surgiu do nada. Ao apresentar a paralisia conceitual causada pela diagonal do quadrado unitário, o professor possibilita que o aluno discuta e compare as limitações da aritmética pitagórica com o sistema numérico atual, tornando o aprendizado um processo de investigação e não apenas de memorização técnica.

Além da paralisia conceitual, é de suma importância questionar de que forma esse conhecimento é transposto para os livros didáticos. Caraça (1970, *apud* POMMER, 2018) observa que existe uma tendência em apresentar a matemática como “algo criado”, um todo harmonioso onde os capítulos se encadeiam sem aparentes contradições. Entretanto, ao ocultar as hesitações e os erros do passado, como o impacto traumático da incomensurabilidade para os pitagóricos, o ensino acaba por limitar o aluno a enxergar a ciência como um ser vivo, impregnado às necessidades de entendimento de cada época. Sob essa mesma ótica, a História da Matemática deixa de ser um anexo temporal e passa a ser a própria resposta a perguntas que provém de diferentes contextos.

A descoberta dos irracionais pode ser vista como uma investigação interna à própria Matemática que, conforme os documentos oficiais sugerem, motiva o desenvolvimento de novos métodos e conceitos. Portanto, ao levar essa discussão para a sala de aula, o docente abre espaço para que o aluno acesse operações de pensamento mais profundas, pois, como defendem Raths et al. (1977, *apud* POMMER, 2018), o pensar é uma forma de perguntar pelos fatos, tornando o aprendizado uma experiência essencial para o desenvolvimento cognitivo.

Nessa visão, é importante destacar que a Matemática, conforme defendido por D'Ambrósio e reiterado pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), deve ser entendida como uma estratégia humana para explicar e manejar a realidade. Ao apresentar a descoberta dos números irracionais como uma resposta a um dilema real de compreensão, o ensino deixa de ser uma mera transmissão de conhecimento acabados e passa a espelhar-se no dinamismo da ciência. Portanto, a introdução da história da crise pitagórica em sala de aula cumpre o papel de mostrar ao estudante que a evolução dos conceitos matemáticos é fruto de uma construção histórica e social, estimulando uma postura crítica e investigativa diante do saber.

Kline (1976, *apud* POMMER, 2018), destaca que a apresentação escolar da matemática frequentemente deixa de lado a sua gênese histórica para oferecer uma estrutura lógica impecável, o que desperta no aluno a falsa impressão de que os teoremas surgem de forma natural e sem obstáculos. Ao trazer para a sala de aula os aspectos de tentativa e erro que permearam a descoberta da irracionalidade, o professor desconstrói a imagem da matemática como um saber inalcançável. Essa abordagem permite que o estudante perceba que a obtenção de resultados científicos é, muitas vezes, fruto de argumentos por semelhança e do sentido físico dos conceitos, e não apenas de uma lógica fria que, como aponta o autor, geralmente surge depois das criações.

Como consequência prática desta pesquisa, propõe-se uma abordagem pedagógica fundamentada na investigação. Em vez da apresentação direta do Teorema de Pitágoras como um algoritmo, o docente pode conduzir os alunos pela via do erro e da descoberta, utilizando a construção geométrica da diagonal do

quadrado para evidenciar a falha da comensurabilidade. Esta estratégia, alinhada aos PCNs, transmuta o erro histórico num ponto de partida para a aprendizagem, permitindo que o aluno percorra, em escala reduzida, o caminho de Hipaso a Eudoxo.

3 METODOLOGIA

De natureza qualitativa e fundamentada na pesquisa bibliográfica, a presente investigação analisa os aspectos históricos, epistemológicos e pedagógicos da descoberta dos irracionais na matemática grega. Tal escolha metodológica é imperativa, pois a compreensão da Crise dos Incomensuráveis pressupõe interpretar documentos textuais, filosóficos e científicos de origens distintas. Sob a ótica de Gil (2017), a pesquisa bibliográfica recorre ao acervo científico existente, oferecendo ao pesquisador um panorama consolidado das produções sobre a área.

No contexto deste estudo, o método viabiliza tanto o resgate histórico da ruptura pitagórica quanto o confronto analítico entre as perspectivas de diferentes historiadores da matemática. Ademais, Ludke e André (2018) sustentam que o viés qualitativo ajuda a descortinar fenômenos em sua totalidade complexa, valorizando os significados dos processos históricos. Desse modo, a análise ultrapassa a simples descrição dos acontecimentos, focando na interpretação das transformações conceituais que a incomensurabilidade impôs à estrutura lógica da matemática antiga.

Para alcançar as metas propostas, a metodologia adotada será de caráter bibliográfico. Tal abordagem qualitativa, examinará fatos históricos utilizando artigos e livros de referência, tal como *Os Elementos* de Euclides, *Introdução à História da Matemática*, por Howard Eves, *Vida de Pitágoras*, por Porfírio e *Matemática, uma breve história*, por Paulo Robe; procurando não descrever apenas fatos históricos, mas entender as lacunas lógicas que levam ao problema de pesquisa.

O desenvolvimento desse estudo fundamenta-se em obras clássicas da História da Matemática, como *História da Matemática*, de Carl Boyer, e *Introdução à História da Matemática*, de Howard Eves, além de estudos voltados à Educação Matemática e à epistemologia dos números irracionais. Também são utilizadas fontes clássicas, como *Os Elementos*, de Euclides, especialmente o Livro V, cuja sistematização da teoria das proporções constitui parte essencial desta investigação.



Além das fontes históricas, a pesquisa dialoga com autores da Educação Matemática, como Ubiratan D'Ambrosio, Antônio Miguel e Maria Ângela Mirim, buscando compreender as contribuições da História da Matemática para o ensino. Tal articulação permite analisar de que maneira a trajetória histórica da descoberta dos irracionais pode favorecer práticas pedagógicas mais investigativas e reflexivas, aproximando os estudantes dos processos de construção do conhecimento matemático. Finalmente, utilizando a didática para refletir sobre esses temas que podem ser acrescidos com êxito no ensino e articulando o rigor histórico à prática pedagógica.

Neste sentido, a investigação percorrerá o caminho da análise documental, interpretando como a falha aritmética da diagonal do quadrado unitário foi convertida em um novo paradigma geométrico. Utiliza-se a perspectiva da Educação Matemática para refletir sobre esses temas, tornando mais maleável o rigor matemático à prática pedagógica através da transposição didática, visando oferecer algum auxílio para que o erro histórico seja ressignificado como objeto de aprendizagem em sala de aula.

O percurso investigativo estrutura-se em três eixos centrais. O primeiro mapeia o pensamento pitagórico e sua concepção de número como elemento ordenador do cosmos, a fim de delimitar a noção original de comensurabilidade. O segundo dedica-se à ruptura provocada pela irracionalidade da diagonal do quadrado unitário, examinando seus desdobramentos epistemológicos e o papel da antífares (subtração recíproca) no entendimento da incomensurabilidade. O terceiro eixo investiga a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido e sua posterior consolidação em *Os Elementos* de Euclides, evidenciando como essa estrutura restabeleceu o rigor dedutivo grego. Complementarmente, o estudo articula essas dimensões às potencialidades didáticas da História da Matemática, assumindo que a reconstrução histórica humaniza o saber e mitiga o ensino puramente mecânico. Sob essa ótica, analisa-se como o itinerário que une Hipaso de Metaponto a Eudoxo pode subsidiar propostas pedagógicas que explicitem a matemática como um campo dinâmico, forjado por tensões, quebras de paradigma e reconstruções conceituais.

O embasamento teórico se solidifica ao analisar-se o contexto sociocultural e místico da Escola Pitagórica, fornecendo detalhes sobre a hierarquia e o regime de silêncio imposto na escola, da mesma forma, discutir a solução para a tal crise através da consagrada obra *Os Elementos*, torna o presente trabalho mais centrado no tema. Revisar a história da matemática sob o ponto de vista de Howard Eves foi possível graças ao acesso à biblioteca do Instituto Federal de Pernambuco - Campus Pesqueira onde as obras fundamentais mencionadas foram consultadas e nos permitiu não apenas compreender os fatos, mas também os métodos dedutivos que deram origem ao rigor matemático.

De tal modo, o cruzamento dessas fontes bibliográficas citadas e de diversas outras utilizadas, possibilita um entendimento profundo da evolução dos conceitos, garantindo um forte alicerce para propor uma estratégia didática que siga a origem histórica do conhecimento.

4 DISCUSSÃO DOS DADOS

A análise dos dados obtidos por meio do levantamento bibliográfico nos revela que a descoberta da incomensurabilidade não foi apenas um empecilho matemático, mas um divisor de águas que forçou a ciência grega a deixar de lado a intuição aritmética. Os estudos de Boyer (1996), Eves (2004) e Roque (2012) evidenciam que esse episódio colocou em dúvida uma das premissas fundamentais do pensamento pitagórico: a crença de que toda grandeza poderia ser expressa por meio de razões entre números inteiros. Ao confrontar a ontologia pitagórica com a realidade física da diagonal do quadrado de lado unitário, percebe-se que o impacto traumático desse paradoxo reside na incapacidade de medir a realidade geométrica através de unidades inteiras.

Os resultados obtidos indicam que essa crise não deve ser compreendida apenas como um problema matemático isolado, mas como uma ruptura epistemológica que exigiu novas formas de pensar as relações entre número, medida e grandeza. Enquanto Porfírio descreve uma escola regida pelo silêncio e por uma quase divinização dos números inteiros, a descoberta da incomensurabilidade surge como uma profanação do conhecimento. Um aspecto particularmente relevante é que

a descoberta dos irracionais surgiu do interior do próprio sistema pitagórico. O Teorema de Pitágoras, um dos resultados mais representativos da escola, conduziu à constatação da existência de uma razão que não podia ser expressa por números inteiros. Dessa forma, a crise não foi provocada por um questionamento externo, mas por uma consequência lógica produzida pelos próprios métodos matemáticos pitagóricos, evidenciando que o desenvolvimento da matemática ocorre também pela identificação dos limites de suas próprias teorias.

Nesse contexto, a antifairese mostrou-se um importante instrumento para a compreensão da incomensurabilidade. Ao evidenciar que o processo de subtrações sucessivas entre o lado e a diagonal do quadrado não se encerrava, o método fornecia uma representação geométrica da impossibilidade de encontrar uma unidade comum de medida. Essa estagnação lógica, discutida por Paulo Robe como um obstáculo à evolução da aritmética, encontra o seu ponto de resolução na obra *Os Elementos*.

A análise da teoria das proporções de Eudoxo permitiu identificar um dos principais resultados desta investigação. Diferentemente da tradição pitagórica, que buscava uma unidade comum para comparar grandezas, Eudoxo reformulou o próprio problema ao propor uma definição de proporção baseada na comparação entre múltiplos das grandezas envolvidas. Conforme sistematizado por Euclides no Livro V dos *Elementos*, essa abordagem possibilitou o tratamento rigoroso de grandezas comensuráveis e incomensuráveis dentro de uma mesma estrutura lógica.

Assim, a importância da teoria eudoxiana não reside na eliminação da incomensurabilidade, mas na capacidade de incorporá-la ao sistema matemático sem comprometer seu rigor dedutivo. Esse avanço demonstra que o progresso científico nem sempre ocorre pela supressão de um problema, mas pela construção de novos referenciais conceituais capazes de acomodá-lo, favorecendo um deslocamento progressivo do foco da aritmética para a geometria na matemática grega.

Sob a perspectiva da Educação Matemática, os dados analisados reforçam as contribuições da História da Matemática para o ensino. Os estudos de Miguel e Miorim (2019), D'Ambrosio e Pommer (2018) indicam que a abordagem histórica favorece a compreensão dos conceitos matemáticos como construções humanas desenvolvidas em resposta a problemas concretos. Observa-se, ainda, uma interessante

aproximação entre as dificuldades enfrentadas pelos pitagóricos e aquelas frequentemente encontradas por estudantes ao entrarem em contato com os números irracionais. Em ambos os casos, a existência de grandezas que não podem ser representadas por frações provoca estranhamento e exige uma reorganização conceitual.

Trazer esses novos conhecimentos para a sala de aula pode ser desafiador, pois o estranhamento que os gregos sentiram também se manifesta nos alunos quando se chocam com algo novo. Nesse cenário, a utilização de episódios históricos atua como uma estratégia de humanização do saber. Ao compartilhar as hesitações e os obstáculos enfrentados por nomes como Hipaso e Eudoxo, o docente permite que o aluno reconheça o erro e a dúvida como partes integrantes e legítimas da construção do conhecimento matemático, transformando o estranhamento em curiosidade e, conseqüentemente, em uma aprendizagem investigativa, reflexiva e menos robotizada.

Em suma, a trajetória que parte da quebra de sigilo causada por Hipaso de Metaponto e termina na sistematização de Eudoxo de Cnido revela que o rigor matemático não é uma estrutura inalterável, mas o resultado de crises profundas e superações lógicas onde o erro é apresentado não como falha, mas como ponto de partida da própria evolução matemática.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa cumpriu seu papel inicial ao analisar o contexto histórico, filosófico e matemático da descoberta das grandezas irracionais na Grécia Antiga, destacando o papel da escola pitagórica, a crise da incomensurabilidade e a solução desenvolvida por Eudoxo de Cnido. A partir da pesquisa bibliográfica realizada, ficou evidente que esse episódio representa um dos momentos mais significativos da história da matemática, funcionando como o propulsor necessário para que a ciência se distanciasse da intuição mística em busca de um rigor dedutivo que ainda hoje sustenta a estrutura dos conjuntos numéricos e da geometria clássica.

A investigação permitiu verificar que a concepção pitagórica de número estava profundamente associada à ideia de que o universo era regido estritamente por

inteiros e suas frações. Entretanto, a demonstração da irracionalidade da diagonal do quadrado unitário revelou a existência de relações que escapavam a essa estrutura conceitual, evidenciando as limitações de um paradigma que, até então, parecia suficiente para explicar a ordem matemática do mundo. Como demonstrado, esse colapso surgiu do interior da própria tradição pitagórica: o mesmo raciocínio matemático que consolidou o prestígio da escola conduziu à identificação de um problema insustentável pelos instrumentos disponíveis na época, provando que o avanço do conhecimento científico decorre da revisão crítica de pressupostos anteriormente considerados evidentes.

Nesse processo, destaca-se a contribuição de Eudoxo de Cnido. A originalidade de sua teoria das proporções não consistiu em eliminar a incomensurabilidade, mas em criar uma estrutura conceitual capaz de incorporá-la ao rigor matemático. Ao substituir a busca por uma unidade comum pela comparação entre múltiplos de grandezas, Eudoxo ofereceu uma solução imortalizada nos *Elementos* de Euclides que redefiniu a própria natureza da grandeza matemática, separando de forma lógica o ato de contar do ato de medir.

No campo da Educação Matemática, as evidências levantadas ao longo deste trabalho confirmam a viabilidade da História como um recurso de transposição didática eficaz para o ensino. A reconstrução desse percurso permite apresentar aos estudantes a matemática como uma atividade humana marcada por investigações, debates e reformulações, mitigando o ensino puramente mecânico. Ao levar o embate entre o discreto e o contínuo para a sala de aula, o estudante entende que o rigor não nasceu da perfeição, mas da necessidade de dar nome ao que era considerado incalculável.

Por fim, espera-se que este trabalho contribua para ampliar as discussões sobre a utilização da História da Matemática na formação de professores e no ensino dos números irracionais, permitindo que novas investigações aprofundem as relações com a construção histórica do conceito de número real. Ao revisitar a passagem de Hipaso a Eudoxo, reafirma-se que compreender o passado da matemática constitui a estratégia mais importante para interpretar seus conceitos, seus fundamentos e seus desafios no presente.

6 REFERÊNCIAS

- BICUDO, Irineu (Org.). **Os Elementos: Euclides de Alexandria**. São Paulo: Unesp, 2009.
- BONGIOVANNI, Vincenzo; LEITE, Olimpio Rudinin V.; LAUREANO, José Lucio. As duas maiores contribuições de Eudoxo de Cnido: a teoria das proporções e o método de exaustão. **União: Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, [s. l.], 2005.
- BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed. Lisboa: [s. n.], 1970.
- CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique, 1991.
- CONTADOR, Paulo Robe Martins. **Matemática, uma breve história**. 4. ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2012. v. 1.
- D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.
- EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2017.
- KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. Tradução de Leônidas Gontijo de Carvalho. São Paulo: IBRASA, 1976.
- LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli E. D. **A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas**. 2. ed. Rio de Janeiro: E.P.U., 2018.
- MIGUEL, Antonio; MIORIM, Maria Angela. **História na educação matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.
- POMMER, Wagner Marcelo. Números irracionais na escolaridade básica: as contribuições didático-epistemológicas advindas da história da matemática. **REnCiMa**, São Paulo, v. 9, n. 3, p. 183-199, 2018.
- PORFÍRIO. **Vida de Pitágoras**. Tradução de Semíramis Corsi Silva. In: CADERNOS DE HISTÓRIA, 1982.
- ROQUE, Tatiana. **História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.