INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE PERNAMBUCO
Campus Recife
Pós-Graduação em Matemática Comercial, Contábil, Econômica, Atuarial e Financeira

NELSON CORDEIRO DE OLIVEIRA NETO

TAXA DE JUROS INSTANTÂNEA E A CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA APLICADAS A FUNÇÕES ATUARIAIS DE SOBREVIVÊNCIA

Recife
2025

NELSON CORDEIRO DE OLIVEIRA NETO

TAXA DE JUROS INSTANTÂNEA E A CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA APLICADAS A FUNÇÕES ATUARIAIS DE SOBREVIVÊNCIA

Trabalho de conclusão de curso apresentada a Coordenação de Pós-Graduação em Matemática Comercial, Contábil, Econômica, Atuarial e Financeira do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Pernambuco, como requisito para obtenção do título de Especialista em Matemática Comercial, Contábil, Econômica, Atuarial e Financeira.
Orientador: Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros

Recife

2025

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Danielle Castro da Silva CRB4/1457

O48t
2025 Oliveira Neto, Nelson Cordeiro de

Taxa de juros instantânea e a capitalização contínua aplicadas a funções atuariais de sobrevivência / Nelson Cordeiro de Oliveira Neto. --- Recife: O autor, 2025.
48f. il. Color.

Trabalho de Conclusão (Curso de Especialização em Matemática Comercial, Contábil, Econômica, Atuarial e Financeira) – Instituto Federal de Pernambuco, Recife, 2025.

Inclui Referências.

Orientador: Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros.

1. Modelos atuariais de sobrevivência. 2. Funções cumulativas. 3. Força de mortalidade Recife. 4. Tábuas de vida. 5. Força de juros. I. Título. II. Barros, Kleber Napoleão Nunes de Oliveira (Orientador). III. Instituto Federal de Pernambuco.

CDD 332 (21ed.)

TAXA DE JUROS INSTANTÂNEA E A CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA APLICADAS A FUNÇÕES ATUARIAIS DE SOBREVIVÊNCIA

Trabalho aprovado. Recife, 02 de dezembro de 2025.

Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros
UFRPE – Campus Recife

Prof. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito
IFPE – Campus Recife

Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho
UFRPE – Campus Recife

Recife

2025

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Kleber Napoleão Nunes de Oliveira Barros, pela inestimável orientação, paciência e por compartilhar seu conhecimento, que foi fundamental para a concretização deste trabalho. Aos ilustres Professores. Dr. Cícero Carlos Ramos de Brito e Prof. Dr. Moacyr Cunha Filho por aceitarem o convite para compor a Banca Examinadora. Agradeço imensamente a disponibilidade, o tempo dedicado à leitura e, especialmente, pelas valiosas contribuições e questionamentos que enriquecerão este trabalho. Ao programa de pós graduação em Matemática Comercial, Contábil, Econômica, Atuarial e Financeira pela infraestrutura e ambiente acadêmico que possibilitaram minha formação e o desenvolvimento desta pesquisa. Aos colegas de turma, pela troca de experiências e pelo apoio mútuo, essenciais para superar os desafios da graduação. Aos meus pais, e a toda a minha família, pelo amor, paciência e por serem meu porto seguro. Aos meus amigos, pelo companheirismo e pelos momentos de leveza. A minha eterna gratidão a todos.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar o regime financeiro de capitalização contínua e aplicá-lo às principais funções clássicas de sobrevivência (De Moivre, Gompertz-Makeham, Exponencial e Weibull). Para tanto vai desenvolver a teoria subjacente a partir de pesquisa bibliográfica, partindo de conceitos introdutórios como juros simples, juros compostos, taxas proporcionais, taxas equivalentes, taxas de juros nominais e efetivas, construindo os fundamentos matemáticos necessários para estabelecer os conceitos de taxa de juros instantânea ou contínua e o correspondente regime de capitalização contínuo. Serão apresentadas noções básicas e gerais desses modelos para, em seguida, explorar as características mais específicas de cada um e relacioná-las ao regime de capitalização contínua. Destaca-se que os modelos abordados sugerem descrições teóricas que tentam descrever comportamentos, quer sejam a mortalidade de uma população quer seja uma função cumulativa.

palavras-chave: modelos atuariais de sobrevivência; tábuas de vida; força de juros; força de mortalidade; funções cumulativas.

ABSTRACT

This paper presents the continuous compounding financial regime and applies it to the principal classical survival functions (de Moivre, Gompertz–Makeham, exponential, and Weibull). To this end, it develops the underlying theory through a bibliographic review, starting from introductory concepts like simple interest, compound interest, proportional rates, equivalent rates, nominal and effective interest rates, to build the mathematical foundations for instantaneous, or continuous, interest rates and the corresponding continuous compounding regime. It first presents basic and general notions of these models, followed by an exploration of their specific characteristics and their relation to continuous compounding. Notably, the models addressed offer theoretical descriptions of behaviors, such as population mortality or cumulative functions.

Keywords: actuarial survival models; life tables; force of interest; force of mortality; cumulative functions.

LISTA DE GRÁFICOS, TABELAS E QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Capitalização contínua é um sistema de capitalização em que o principal investido é capitalizado instantaneamente. Diferentemente dos sistemas de capitalização tradicionais, nos quais a capitalização ocorre em períodos discretos de tempo (anual, quadrimestral, mensal, diário etc.), o sistema de capitalização contínua flui, como o próprio nome diz, de maneira contínua e instantânea.

Conforme Samanez (2007):

> Na prática, muitas situações exigem o uso da capitalização contínua. As empresas recebem e fazem pagamentos muitas vezes durante um dia, padrão esse que está mais próximo da suposição de fluxos contínuos uniformemente distribuídos do que de fluxos discretos de fim de período (Samanez, 2007).

A capitalização contínua constitui, portanto, uma forma alternativa de capitalização em finanças adequada a diversos produtos. Sobre isso, o autor destaca:

> A capitalização contínua é uma ferramenta muito usada em finanças na avaliação de opções, derivativos, projetos de investimento, geração de lucros da empresa, desgaste de equipamentos e outras situações em que os fluxos monetários se encontram distribuídos uniformemente no tempo (Samanez, 2007).

Este trabalho estruturou-se a partir dos seguintes objetivos:

1.1 Objetivo geral:

- apresentar o regime de capitalização contínua aplicado aos modelos de sobrevivência estabelecendo uma ponte entre a Matemática Financeira e atuarial.

1.2 Objetivos específicos:

- Apresentar conceitos básicos de Matemática Financeira indispensáveis para construção do modelo de capitalização contínua;
- Definir e relacionar taxa de juros instantânea (força de juros) com força de mortalidade;
- Obter a partir de derivação o modelo de capitalização contínua uniforme e variável;
- Introduzir e apresentar as características gerais dos modelos de sobrevivências;
- Analisar e associar a aplicação da capitalização contínua aos modelos clássicos de sobrevivência (De Moivre, Exponencial, Gompertz- Makehem e Weibull);
- Construir uma tábua de vida fictícia e estimar a taxa instantânea discreta;
- Calcular e comparar os montantes acumulados;
- Avaliar as vantagens e limitações da abordagem de capitalização contínua em relação a outras formas de capitalização no contexto financeiro e atuarial.

Este estudo é uma pesquisa bibliográfica e teórica aplicada e desenvolveu-se a partir de literatura especializada na área de Matemática Financeira, Atuarial e Estatística. Toda a abordagem foi subdividida em seções.

Na seção 1 abordaremos os fundamentos básicos da teoria, conceitos indispensáveis como taxas de juros, regimes de capitalização simples e composto e seus modelos matemáticos, taxas proporcionais e equivalentes.

Na seção 2 serão apresentadas as taxas de juros nominal e efetiva fundamentais ao entendimento das seções seguintes.

Na seção 3 serão apresentados a taxa de juros instantânea e a capitalização contínua.

Na seção 4 serão apresentadas as leis de sobrevivência e seus modelos obtidos a partir do sistema de capitalização contínuo. Ainda nesta seção são feitas simulações numéricas, comparações e resultados e, por fim, apresentados conceitos atuariais e construídas as tábuas de vida, que constarão nos apêndices.

2 CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

Toda a Matemática Financeira poderia se resumir ao estudo do valor do dinheiro no tempo. Deslocar quantias no tempo equivale a capitalizá-las ou descontá-las (atualizá-las), o que muda é a maneira como isso é feito. O nosso estudo abordará algumas dessas maneiras a partir de contextos mais simples até outros mais avançados. Inicialmente, para o entendimento das seções seguintes são essenciais a exposições dos conceitos que apresentaremos nesta seção. O leitor mais familiarizado com o tema poderá transpor esta parte.

2.1 Noções básicas

Consideremos os seguintes conceitos e notações no contexto de Matemática Financeira e atuarial:

- **Principal** (A_0) **ou valor presente** (VP) é o valor investido ou aplicado.
- **Juros** (J) são a remuneração recebida (ou paga) pelo empréstimo do dinheiro durante certo período.
- **Período de aplicação** (n) corresponde a quantidade de intervalos de tempo.
- **Unidade de tempo** é a unidade adotada (ano, mês, dia etc.).
- **Taxa de Juros (i)** corresponde ao percentual cobrado pelo empréstimo sobre o Principal por unidade de tempo considerado.
- **Montante** $A(t)$ **ou Valor Futuro** (VF) é o valor do Principal acrescido de Juros.
- **Tábuas de vida** Conforme Machado (2023, p. 31) trata-se de “uma tabela utilizada para realizar cálculos de seguros de vida e planos de previdência (pública ou privada), além de servir para calcular a probabilidade de vida e/ou morte de um indivíduo, levando em consideração principalmente a idade”. É constituída de colunas cujos rótulos indicam conceitos, informações ou funções importantes para análise e cálculo atuarial, tais como: idade, probabilidade de morte para cada idade, número de pessoas vivas para cada idade, etc.

  O quadro a seguir apresenta alguns indicadores importantes presentes nessas tábuas.

Quadro 1 - Indicadores Tábuas da vida

Notação atuarial	Interpretação
x	Um indivíduo de idade x
l_x	Número de indivíduos sobreviventes na idade x
d_x	Número de óbitos na idade x
$S(x)$	Probabilidade de sobrevivência em pelo menos t anos
u_x	Força de mortalidade

2.2 Juros Simples e composto

Considere um principal $\boldsymbol{A_0}$ aplicado a uma taxa $\boldsymbol{i}$ por um período $\boldsymbol{t}$ de tempo. Temos duas situações possíveis:

- Os juros incidem sempre sobre o principal. Nesse caso, temos o **regime de simples de capitalização**.

  Seja um principal $\boldsymbol{A_0}$, aplicado a uma taxa de 5% juros ao mês**.**

  Assim, temos que:

$$\boldsymbol{A(t) = A_0 + A_0 \times i \times t}$$

ou

$$\boldsymbol{A(t) = A_0(1 + it)}$$

Em que A_0 é o valor principal ou valor presente e $A(t)$ o montante ou valor futuro.

- A partir do segundo período, os juros incidem sobre o montante obtido no período anterior. Nesse caso, temos o **regime de composto de capitalização**.

  Para melhor entendimento, considere o exemplo:

Aplicação 1. Considere um principal $\boldsymbol{A_0}$ aplicado a uma taxa de 5% juros ao mês e observe o raciocínio abaixo que permite calcular o valor futuro ao final dos três primeiros períodos mensais.

- Ao final do 1º mês: $\boldsymbol{A(1) = 1 + 1 \times 0,05 = 1(1 + 0,05) = 1,05}$
- Ao final do 2º mês: $\boldsymbol{A(2) = 1,05 + 1,05 \times 0,5 = 1,05(1 + 0,05) = (1,05)^2}$
- Ao final do 3º mês: $\boldsymbol{A(3) = (1,05)^2 + (1,05)^2 \times 0,05 = (1,05)^2(1 + 0,05) = (1,05)^3}$

O padrão observado sugere que o montante aplicado sobre um principal ao final do $\boldsymbol{t - \acute{e}simo}$ mês considerando a taxa mensal 0,5% é $\boldsymbol{A(t) = (1,05)^t}$ e, de maneira geral:

O montante $\boldsymbol{A(t)}$ de um principal $\boldsymbol{A_0}$ aplicado a uma taxa a juros compostos $\boldsymbol{i}$, por um período de tempo $\boldsymbol{t}$, com $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{t}$ apresentando a mesma unidade de tempo é:

$$\boldsymbol{A(t) = A_0(1+i)^t}$$

Em que o fator $(1+i)^t$ é chamado **fator de capitalização** ou **fator de acumulação** do Principal $\boldsymbol{A_0}$.

Podemos também, reescrever:

$$A_0 = A(t) \cdot \frac{1}{(1+i)^t}$$

$$\leftrightarrow A_0(t) = A \cdot (1+i)^{-t}$$

Em que o fator $\frac{1}{(1+i)^t}$ é chamado **fator de atualização** ou **fator de desconto** do Principal.

2.3 Taxas de juros

Conforme definido anteriormente, taxa de juros corresponde ao custo do dinheiro no tempo. Historicamente a taxa de juros era expressa a partir de frações (o quarto, o quinto), em algumas sociedades usava-se o símbolo pc para frações centesimais e apenas no século XVI e XVII que passou a ser usado o símbolo per cento % (BOYER, 2006). Ao longo do desenvolvimento da Matemática Financeira surgiram diversas taxas de juros, nesta seção apresentaremos seus principais tipos: proporcional, equivalente, nominal, efetiva e instantânea tanto no contexto financeiro como atuarial.

2.4 Taxas de juros proporcionais

No regime de juros simples, taxas de juros são proporcionais, ou seja, são taxas que aplicadas sobre um mesmo valor presente produzem o mesmo valor futuro em períodos também proporcionais. Por exemplo, uma taxa de 3% ao mês representa o mesmo que 18% ao semestre, ou 36% ao ano.

Podemos obter uma relação entre taxas a partir de uma relação proporcional direta:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Onde:

i_1: percentual correspondente à periodicidade 1 (diária, mensal, anual, etc.);

i_2: percentual correspondente à periodicidade 2 (diária, mensal, anual, etc.);

n_1: periodicidade 1;

n_2: periodicidade 2;

2.5 Taxa de juros equivalente

No regime de juros compostos, taxas de juros equivalentes são taxas que aplicadas sobre um mesmo valor presente produzem o mesmo valor futuro durante o mesmo período de tempo.

Seja $A(t)$ o valor futuro obtido a partir da aplicação de um principal A_0 a uma taxa i com período de acumulação n, durante n períodos.

$$A(t) = A_0 \cdot (1 + i_n)^n$$

E, analogamente

$$A(t) = A_0(1 + i_m)^m$$

Para uma taxa de juros i_m durante m períodos.

Conforme a definição acima, temos:

$$(1 + i_n)^n = (1 + i_m)^m$$

Onde:

i_n: taxa de juros com periodicidade de uma unidade de n.

n: total de períodos.

i_m: taxa de juros com periodicidade de uma unidade de m.

m: total de períodos.

Aplicação 2: Determine a taxa mensal equivalente a uma taxa semestral de 3%

Devemos calcular a taxa mensal que, quando aplicada durante seis meses, produz o mesmo montante final que uma taxa semestral de 3%.

Assim,

$$(1 + i_m)^6 = (1 + 0{,}03)^1$$

Logo,

$$i_m = 0{,}4938\%$$

Aplicação 3: Determinar a taxa bimestral equivalente à taxa trimestral de 5%. Devemos encontrar a taxa bimestral i_b que, ao ser aplicada em um trimestre, produz o mesmo efeito financeiro que a taxa trimestral aplicada em igual período.

Assim,

$$(1 + i_b)^{\frac{3}{2}} = (1 + 0{,}05)^1$$

Logo,

$$i_b = 3{,}3061\%$$

2.6 Taxa de juros nominal

Vimos, na seção 1, que taxa de juros corresponde ao percentual cobrado pelo empréstimo sobre o principal por unidade de tempo (ano, mês, dia, etc.). A taxa de juros nominal, por sua vez, corresponde geralmente a taxa anual com períodos de capitalização diferente daquela a qual foi referida, no caso, o ano. Ela é a taxa de juros dos contratos de produtos bancários. Pode-se ter, por exemplo uma taxa anual com capitalização bimestral, mensal ou diária. Indicamos uma taxa de juros de 36% ao ano com capitalização mensal por 36% a.a.(c.m.).

2.7 Taxa de juros efetiva

A taxa de juros efetiva corresponde taxa com mesmo período de capitalização referente aquele a qual foi referida. Por exemplo, taxa anual com capitalização anual, taxa mensal com capitalização mensal. Indica-se uma taxa de juros efetiva de 36% ao mês com capitalização mensal por 36% a.m.(c.m.) mês, ou simplesmente e, mais comumente, taxa efetiva de 36% ao mês.

2.8 Relação entre taxa nominal e taxa efetiva

A taxa de juros nominal é uma taxa de referência, ela corresponde à soma total das taxas referentes aos períodos de capitalização. Ela é a taxa de juros dos contratos de produtos bancários. Por exemplo, uma taxa nominal de 24% ao ano, com capitalização mensal, corresponde a uma capitalização de 2% ao mês, considerada efetiva dentro do período. Isso leva a considerar:

$$i_{efetiva\ mensal} = \frac{i_n}{n}$$

Onde:

i_n: taxa nominal;

n: quantidade de períodos de capitalização no intervalo de um (1) ano.

Para obter a taxa efetiva anual equivalente, utilizamos expressão taxa de juros equivalentes:

$$(1 + i_a)^1 = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n$$

Assim:

$$i_a = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

Aplicação 4: Determine a taxa efetiva equivalente a uma taxa nominal de 36% ao ano capitalizados mensalmente.

A taxa efetiva equivalente pode ser obtida por

$$i_a = \left(1 + \frac{0{,}36}{12}\right)^{12} - 1$$

Assim,

$$i_a \approx 42{,}57\%$$

Uma taxa nominal de 36% ao ano, com capitalização mensal, equivale a uma taxa efetiva anual de 42,57%.

Veremos como se comporta a taxa efetiva anual caso o período de capitalização da taxa nominal diminua progressivamente, a partir do anual, semestral, quadrimestral, trimestral, bimestral, mensal até a diária a partir de um exemplo:

Aplicação 5. A partir de uma taxa de juros nominal de 72% ano, determine a taxa anual efetiva considerando períodos de capitalização:

a) Anual
b) Semestral
c) Quadrimestral
d) Trimestral
e) Bimestral
f) Mensal
g) diária

Solução:

a) Capitalização anual: $i = \left(1 + \frac{0,72}{1}\right)^1 - 1 = 0,72\ a.a.$

b) Capitalização semestral: $i = \left(1 + \frac{0,72}{2}\right)^2 - 1 = 0,8496\ a.a.$

c) Capitalização quadrimestral: $i = \left(1 + \frac{0,72}{3}\right)^3 - 1 = 0,9066\ a.a.$

d) Capitalização trimestral: $i = \left(1 + \frac{0,72}{4}\right)^4 - 1 = 0,9387\ a.a.$

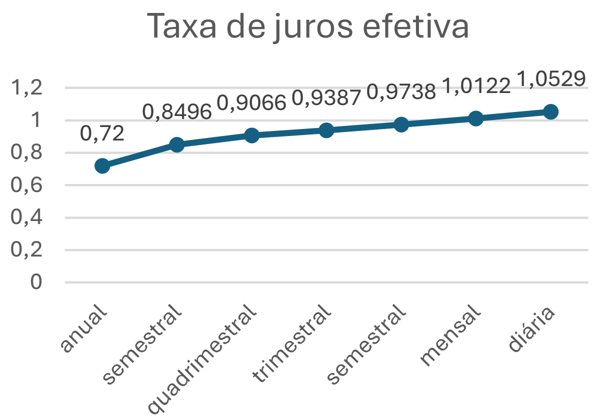
e) Capitalização semestral: $i = \left(1 + \frac{0,72}{6}\right)^6 - 1 = 0,9738\ a.a.$

f) Capitalização mensal: $i = \left(1 + \frac{0,72}{12}\right)^{12} - 1 = 1,0122\ a.a.$

g) Capitalização diária: $i = \left(1 + \frac{0,72}{360}\right)^{360} - 1 = 1,0529\ a.a.$

A observação do comportamento da taxa anual efetiva sugere convergência, conforme a figura a seguir:

Gráfico 1 - Taxa de juros efetiva



Fonte: Elaboração própria.

2.9 Taxa de juros instantânea

Vimos na seção anterior o comportamento da taxa efetiva anual admitindo os períodos de capitalização da taxa nominal cada vez menores, a partir da anual, semestral, e assim sucessivamente, até diária, o que implica em particionar a unidade temporal (ano) em quantidades de períodos de capitalização cada vez maiores, podendo pensar esse fracionamento infinitas vezes até a capitalização contínua.

Tomando a expressão $i_a = \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} i_a = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1\right],$$

Daí:

$$\lim_{n\to\infty} i_a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - \lim_{n\to\infty} 1$$

Assim,

$$i_a = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n - 1$$

Como $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, temos que $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{i_n}{n}\right)^n = e^{i_n}$ e,

$$\boxed{i_a = e^{i_n} - 1}$$

Por convenção, usaremos δ no lugar de i_n para indicar que a taxa em questão possui capitalização contínua.

$$i_a = e^{\delta} - 1$$

Logo,

$$e^{\delta} = 1 + i_a$$

Aplicando logaritmo, vem

$$\delta = \ln(i_a + 1)$$

Onde δ é chamado de **taxa instantânea de juros ou força de juros**.

Aplicação 6: Aplicar a taxa de juros instantânea ao exemplo da seção anterior, consiste em determinar a taxa anual efetiva considerando uma taxa de juros nominal de 72% ano com capitalização contínua, isto é:

$$i_a = e^{0{,}72} - 1 = 1{,}0544\ a.a.$$

Alternativamente, também poderíamos encontrar a mesma conclusão utilizando a definição de derivada. Segue que:

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{A(t+h)}{A(t)} - 1\right)$$

Onde, a expressão $\frac{A(t+h)}{A(t)} - 1$ define a taxa de crescimento relativo para o intervalo $h \to 0$.

Mas

$$A(t+h) = A_0(1+i_a)^{t+h} \text{ e } A(t) = A_0(1+i_a)^t$$

Então,

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{A_0(1+i_a)^{t+h}}{A_0(1+i_a)^t} - 1\right)$$

Assim,

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(1 + i_a)^h - 1}{h} \right)$$

A expressão acima obtida é, por definição, a derivada de $(1 + i_a)^h$, ou seja:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}(1 + i_a)^h$$

no ponto $h = 0$.

Assim,

$$\delta(t) = \ln(1 + i_a)$$

Ainda podemos considerar a taxa de variação de $v(t)$ a cada instante em relação ao próprio $v(t)$, ou seja, $\frac{v\prime(t)}{v(t)}$.

Assim,

$$\delta(t) = \frac{v'(t)}{v(t)}$$

Mas

$$\frac{d}{dt} \ln v(t) = \frac{v'(t)}{v(t)}$$

Então,

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln v(t)$$

Substituindo $v(t) = (1 + i_a)^t$ acima,

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \ln(1 + i_a)^t$$

e

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}(t(\ln(1 + i_a))$$

Portanto,

$$\delta(t) = \ln(1 + i_a)$$

A taxa de juros instantânea, também denominada força de juros, expressa a intensidade com que um principal é capitalizado de forma contínua ao longo do tempo. Essa concepção é análoga à **taxa instantânea de mortalidade** dos modelos de sobrevivência, nos quais a probabilidade de um indivíduo permanecer vivo diminui com o passar do tempo (ou, de forma equivalente, a probabilidade de não permanecer vivo aumenta com o passar do tempo), sendo tal decréscimo representada por μ, também chamado de **força de mortalidade**, conforme veremos mais adiante.

Devido a sua aplicabilidade em tábuas de vida discretas é útil obter uma aproximação prática para a **força de mortalidade (μ_x)** que se distribui de maneira uniforme entre intervalos de idade x e $x + 1$, dada pela expressão:

$$\mu_x \approx \ln\left(\frac{l_x}{l_{x+1}}\right)$$

Obtida a partir da definição contínua da força de mortalidade como a derivada do logaritmo da função de sobrevivência. Nos casos em que a tábua de vida apresenta valores apenas em idades inteiras, considera-se que a taxa de mortalidade é distribuída de forma uniforme entre os intervalos de idade, permitindo a aproximação do declínio relativo de sobreviventes entre as idades x e $x + 1$ pelo logaritmo da razão $\frac{l_x}{l_{x+1}}$.

Assim,

$$\mu_x \approx \frac{d}{dt}\ln l_x \approx \frac{\ln l_{x+1} - l_n}{(x + 1) - x} \approx \ln\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right)$$

Mas $\mu_x < 0$, então:

$$\mu_x = -\ln\left(\frac{l_{x+1}}{l_x}\right) = \ln\left(\frac{l_x}{l_{x+1}}\right)$$

Tal abordagem é amplamente utilizada em contextos atuariais, uma vez que facilita a transição de modelos discretos de mortalidade para representações contínuas, especialmente em cálculos de reservas matemáticas, prêmios puros e equivalências atuariais que requerem a integração com a força de juros (Bowers *et al.*, 1997).

Quanto as aplicações, a força de juros (δ), ou taxa instantânea de capitalização, possui diversas utilidades em contextos financeiros. Ela é amplamente empregada na precificação de instrumentos financeiros com capitalização contínua, tais como títulos de dívida e derivativos, sendo uma ferramenta fundamental nos modelos quantitativos de precificação, como o modelo Black-Scholes. Além disso, a força de juros é empregada na modelagem de fluxos de caixa contínuos, comum em setores como infraestrutura e utilities, onde receitas e custos ocorrem de forma contínua no tempo (Kellison, 2009).

No campo atuarial, a força de juros é aplicada no cálculo de reservas matemáticas de produtos que envolvem pagamentos contínuos, como anuidades vitalícias, e na integração com a força de mortalidade (μ) para a avaliação de benefícios contingentes à vida ou morte. A força de mortalidade (μ), por sua vez, é fundamental para a construção de tábuas de mortalidade contínuas, que são utilizadas na precificação de seguros de vida, cálculo de prêmios puros de risco e determinação de reservas matemáticas em produtos de longo prazo (Bowers *et al.*, 1997).

3. CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

O objetivo nesta seção é obter uma expressão geral para o Regime de Capitalização Contínua com força de juros variável no tempo e o caso particular para essa taxa constante.

3.1 Dedução analítica

Da definição de força de juros, apresentada na seção anterior, segue que:

$$\frac{dA}{dt} = \delta(t) \cdot A(t)$$

logo,

$$\frac{1}{A(t)} \cdot \frac{dA}{dt} = \delta(t)$$

$$\frac{d}{dt}[\ln A(t)] = \delta(t)$$

Integrando,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}[\ln A(t)] = \int_0^t \delta(s)\, ds$$

$$\ln A(t) - \ln A_0 = \int_0^t \delta(s)\, ds$$

$$\ln A(t) = \int_0^t \delta(s)\, ds + \ln A_0$$

$$A(t) = e^{\ln A_0 + \int_0^t \delta(s) ds}$$

Portanto, temos:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\int_0^t \delta(s) ds}$$

3.2 Dedução alternativa via aproximações sucessivas

Ainda poderemos chegar a mesma conclusão partindo de incrementos infinitesimais, como segue:

Suponha que o intervalo de acumulação seja particionado em n pequenos intervalos iguais de comprimento Δt_i, tal que

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ \cdots \ < t_n = t$$

e,

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

Com $i = 1, 2, \ldots ,\ n$ e $\Delta t_i \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$.

Como a força de juros varia com o tempo $\delta(t)$, consideraremos que durante o pequeno intervalo Δt_i ela seja constante e denotada por $\delta(t_i)$.

Assim, no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ o fator de acumulação é dado por:

$$1 + \delta(t_i)\Delta t_i$$

Como em juros compostos o crescimento se acumula multiplicando fatores, o montante após n intervalos é dado por:

$$A(t) \approx A_0 \prod_{i=1}^{n} (1 + \delta(t_i)\, \Delta t_i)$$

Para $n \to \infty$ e $\Delta t_i \to 0$ usamos a aproximação

$$\ln(1 + x) \approx x$$

Para $x \to 0$,

Dessa forma temos:

$$\ln A(t) \approx \ln A_0 + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + \delta(t_i)\Delta t_i) \approx \ln A_0 + \sum_{i=1}^{n} \delta(t_i)\Delta t_i$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(t_i)\Delta t_i = \int_0^t \delta(s)\, ds$$

Então,

$$\ln A(t) = A_0 + \int_0^t \delta(s)\, ds$$

Portanto, aplicando a exponencial,

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\int_0^t \delta(s)\, ds}$$

3.3 Caso particular: força de juros constante

Para $\delta(s)$ constante, ou seja, $\delta(s) = \delta$

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\int_0^t \delta\, ds}$$

Assim,

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\delta t}$$

Essa é a expressão clássica da capitalização contínua com taxa constante.

3.4 Aplicações práticas em Matemática Financeira

O regime de capitalização contínua, embora menos usual do que a capitalização composta em períodos discretos (mensais, anuais etc.), possui grande importância teórica e prática em diversas áreas da matemática financeira e da economia:

1. Precificação de títulos e derivativos: A fórmula (2) é fundamental na modelagem de preços de ativos financeiros no mercado de capitais, especialmente em modelos de precificação de derivativos (como o modelo de Black-Scholes). Nesses casos, os fluxos de caixa futuros são descontados a valor presente por meio da capitalização contínua.
2. Cálculo de valor presente líquido (VPL): Em análise de investimentos, o regime

contínuo permite calcular o valor presente de pagamentos que ocorrem de forma ininterrupta, como em fluxos de caixa contínuos (aluguéis, royalties, consumo de energia etc.).

3. Modelos atuariais e de seguro: A capitalização contínua é empregada em cálculos atuariais, especialmente na determinação do valor presente de anuidades pagas continuamente, como pensões ou benefícios vitalícios.

4. Economia e crescimento populacional/financeiro: Em problemas de crescimento exponencial, como população, inflação ou aplicações em biologia e economia, a capitalização contínua aparece como modelo natural quando a taxa de crescimento é proporcional ao nível atual da variável.

4. MODELOS DE SOBREVIVÊNCIA E CAPITALIZAÇÃO CONTÍNUA

Nesta seção apresentaremos os modelos de sobrevivência e faremos conexões com a capitalização contínua.

Machado (2023, p. 25) define função de sobrevivência como “a probabilidade de sobrevivência de um acontecimento ocorrer até um certo tempo t, ou seja, a função define qual é a probabilidade de uma observação não falhar até um tempo predeterminado t”.

4.1 Funções de Sobrevivência

Funções de sobrevivência são modelos matemáticos que permitem determinar a probabilidade de sobrevivência de um indivíduo (ou grupo de indivíduos) através da análise estatística e emprego de parâmetros ou indicadores que influenciam essa probabilidade e, especialmente idade e expectativa de vida. Serão analisadas algumas dessas funções:

4.2 Lei de De Moivre

É um modelo que determina a probabilidade de um indivíduo sobreviver pelo menos a idade x, considerando a expectativa de vida $\omega = 100$ e partindo da idade 0.

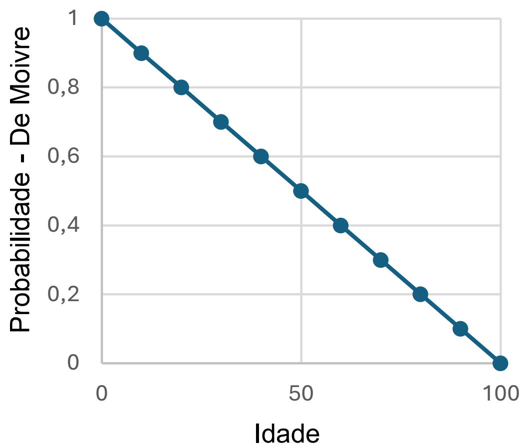
$$S_0(x) = 1 - \frac{x}{\omega}$$

Onde:

- Indivíduo na idade $x = 0$, $S(0) = 1$, ou seja, a probabilidade de sobrevivência do recém-nascido é 1;
- Indivíduo na idade $x = \omega$, $S(\omega) = 0$, ou seja, a probabilidade de não sobreviver ao atingir a idade ω, ou mesmo ultrapassá-la, é 0.

O modelo clássico da Lei de De Moivre é decrescente linearmente e representa o decaimento dessa probabilidade ao longo do tempo, conforme se observa o gráfico:

Gráfico 2 - Lei de sobrevivência de De Moivre



Fonte: Elaboração própria.

O modelo de De Moivre é bastante didático, intuitivo e representa o primeiro esforço de modelar matematicamente uma função de sobrevivência. Apresenta algumas limitações típica do modelo linear que supõe decrescimento linear uniforme o que dificilmente ocorreria na vida real, além do que segundo esse modelo ninguém ultrapassaria a idade ω e não considera fatores de risco.

Baseado nessa lei de mortalidade, podemos construir uma função de capitalização de capital A_0, assim temos que a força de mortalidade (juros) associada vale:

$$\delta(x) = \frac{S'_0(x)}{S_0(x)} = -\frac{d}{dx}\ln S_0(x)$$

Logo,

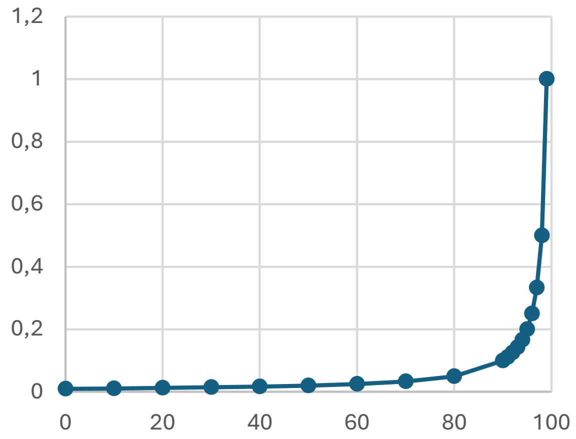
$$\delta(x) = -\frac{d}{dx}\ln\left(1 - \frac{x}{\omega}\right)$$

Assim,

$$\delta(x) = \frac{1}{\omega - x}$$

Para $\omega = 100$, o gráfico da taxa (força) de juros está representado na próxima página e cuja tabela pode ser consultado no apêndice A.

Gráfico 3 - Força de juros



Fonte: Elaboração própria.

Dessa forma, vem:

$$\delta(t) = \frac{1}{\omega - t} \Rightarrow \int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t \frac{1}{\omega - s} ds = -\ln(\omega - t) + \ln(\omega)$$

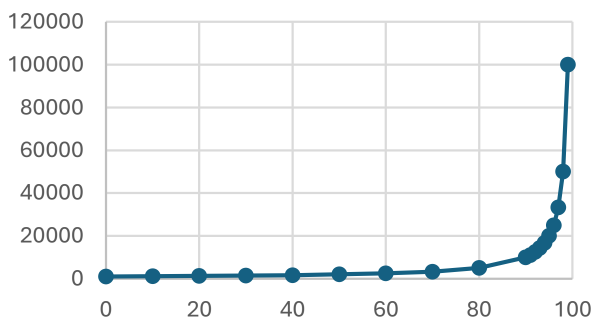
$$= \ln\left(\frac{\omega}{\omega - t}\right)$$

Substituindo na forma geral, obtemos:

$$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega - t}\right)$$

Que é o modelo de capitalização contínua associado a função de sobrevivência de De Moivre e cujo gráfico em função da idade x está representado abaixo:

Gráfico 4 - Montante acumulado A(t)- De Moivre



Fonte: Elaboração própria.

4.3 Modelo exponencial

É uma função que mede a probabilidade de sobrevivência de um objeto de estudo (máquina, pilha ou mesmo o ser humano) até a ocorrência de um evento (falha ou morte) seguindo um decrescimento exponencial.

No contexto atuarial, a função de sobrevivência exponencial é dada por:

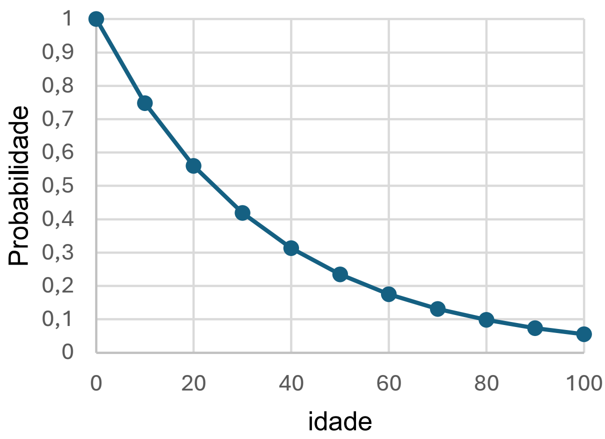
$$S_0(x) = e^{-\mu x}$$

Onde:

μ: taxa de mortalidade associada.

Seu gráfico está representado abaixo, para $\mu = 0{,}02$

Gráfico 5 - Lei de sobrevivência exponencial



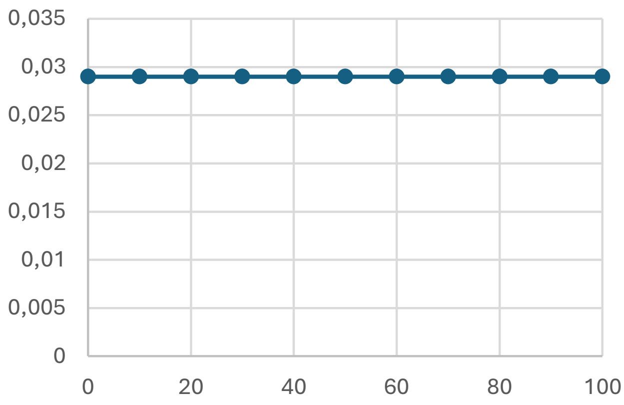
Fonte: Elaboração própria.

Baseado nessa lei de sobrevivência, é possível construir uma função de capitalização de capital A_0, assim temos que a força de mortalidade (juros) associada vale:

$$\delta(x) = -\frac{d}{dx}(-\mu x) = \mu$$

Para $\mu_x = 0{,}029$, o gráfico da taxa (força) de juros está representado a seguir e tabela pode ser consultado no apêndice B.

Gráfico 6 -Força de juros



Fonte: Elaboração própria.

Integrando,

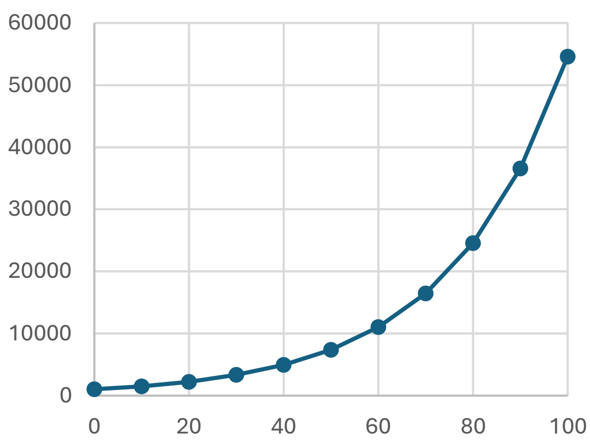
$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t \mu\, ds \Rightarrow \int_0^t \delta(s)\, ds = \mu \cdot t$$

Substituindo na forma geral, obtém-se:

$$A(t) = A_0 \cdot e^{\mu t}$$

Que é o modelo clássico de capitalização contínua. Nele a força de juros é fixa. Ela é bastante útil e apresenta-se mais realista, no entanto, para situações a longo prazo nas quais as taxas variam, esse modelo se apresenta limitado. Seu gráfico a seguir está calibrado para $\mu = 0{,}004$:

Gráfico 7 - Montante acumulado A(t) - Exponencial



Fonte: Elaboração própria.

4.4 Modelo de Gompertz-Makeham

O modelo de Gompertz-Makeham é uma forma aprimorada do modelo exponencial pelo acréscimo de fatores de risco.

A função de sobrevivência é dada por:

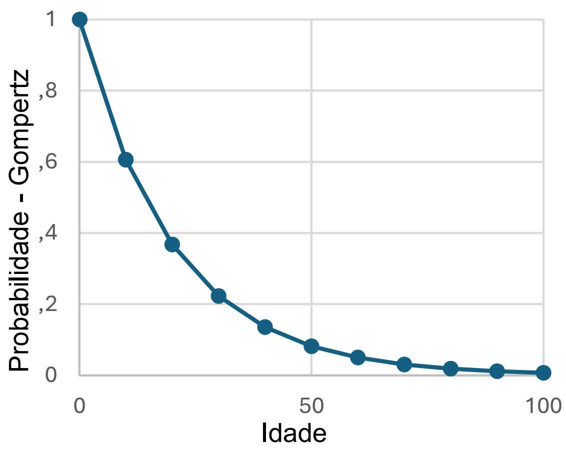
$$S_0(x) = exp\left[-Ax - \frac{B(c^x - 1)}{\ln c}\right]$$

é chamado de função de risco acumulado e a expressão vem da própria definição do modelo, que é composto pelos parâmetros:

- $A =$ Constante de Makeham: representa o risco de fatores externos não relacionados à idade (acidentes, riscos ambientais etc.) Esse risco vai se acumulando linearmente com o tempo, assim temos: Ax.
- $B =$ Constante de Gompertz: representa o risco de fatores relacionados à idade (envelhecimento, deterioração etc.). representa uma escala de força do acúmulo exponencial.
- $c^x - 1; =$ indica o quanto o risco aumentou em relação ao tempo inicial $(x = 0)$.
- $\ln c =$ ajuste da escala de crescimento.

Seu gráfico está representado a seguir:

Gráfico 8 - Lei de sobrevivência exponencial



Fonte: Elaboração própria.

O modelo de Gompertz-Makeham introduz um modelo mais realista que considera fatores que influenciam a probabilidade de sobrevivência mais próximos da realidade. Por outro lado, exige uma calibração cuidadosa dos seus parâmetros o que a torna mais complexa.

Baseado nessa lei de sobrevivência, podemos construir uma função de capitalização de capital A_0, assim temos que a força de mortalidade (juros) associada vale:

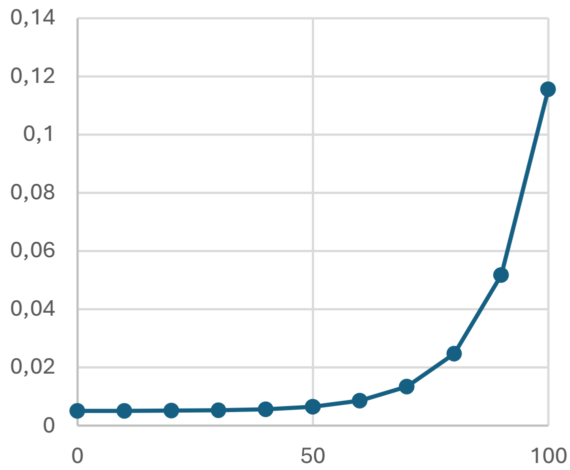
$$\delta(x) = -\frac{d}{dx}\left[-Ax - \frac{B(c^x - 1)}{\ln c}\right]$$

Derivando,

$$\delta(x) = A + Bc^x$$

Para $A = 0{,}005$, $B = 0{,}00002$ e $c = 1{,}09$ o gráfico da taxa (força) de juros está representado a seguir e cuja tabela pode ser consultada no apêndice C.

Gráfico 9 - Força de juros



Fonte: Elaboração própria.

Integrando o resultado anterior,

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t [A + Bc^x]$$

$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t A\, ds + \int_0^t Bc^s ds$$

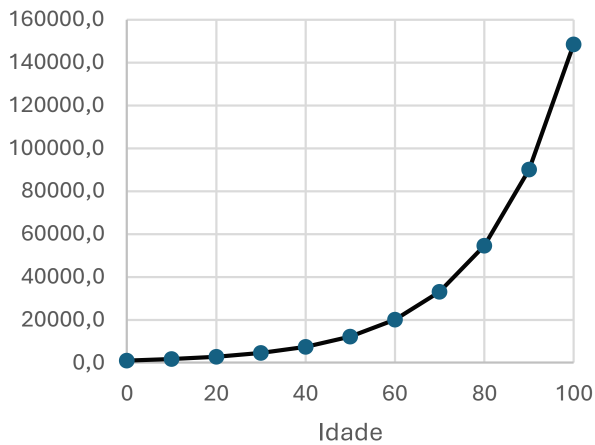
$$\int_0^t \delta(s)\, ds = At + \frac{B}{\ln c}(c^t - 1)$$

Substituindo na forma geral na forma geral em **(1)**, obtemos:

$$A(t) = A_0 \cdot exp\left[At + \frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right]$$

Que é o modelo de capitalização contínua associado ao modelo de Gompertz-Makeham e cujo gráfico está representado abaixo para parâmetros calibrados em $A = 0{,}005$, $B = -1{,}5$ e $c = 1{,}09$.

Gráfico 10 - Montante acumulado A(t) **-** Gompertz-Makeham



Fonte: Elaboração própria.

4.5 Modelo de Weibull

O modelo de sobrevivência de Weibull é um modelo sofisticado muito utilizado em engenharia de confiabilidade e análise de sobrevivência para determinar o tempo de vida médio de um objeto de estudo.

A função do modelo de sobrevivência de Weibull é dada por:

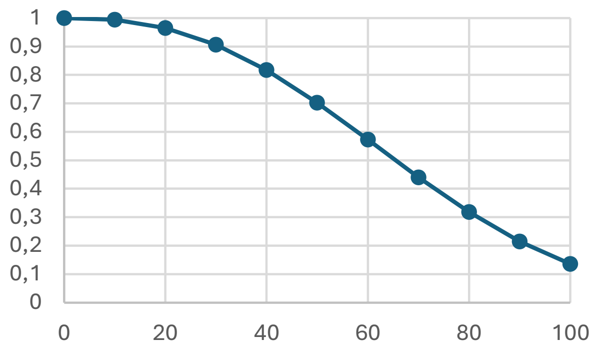
$$S_0(x) = exp\left(-\frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)$$

Onde:

k = parâmetro de escala: ajusta a velocidade com que a taxa de mortalidade cresce ao longo do tempo.

n = parâmetro de forma: Controla a **forma** do comportamento da mortalidade ao longo do tempo.

Gráfico 11 - Lei de sobrevivência- Weibull



Fonte: Elaboração própria.

O modelo de Weibull é amplamente utilizado em confiabilidade, sobrevivência e atuária por sua flexibilidade em representar riscos crescentes, decrescentes ou constante sendo útil para estimar falhas de produtos ou padrões de mortalidade em fases médias da vida. No entanto, apresenta limitações importantes: não captura múltiplos picos de risco nem mudanças externas ao longo do tempo, sua estimativa pode ser sensível a amostras pequenas, e tende a subestimar a mortalidade em idades avançadas, diferentemente de modelos como Gompertz ou Makeham. Portanto, embora útil e versátil, o Weibull deve ser aplicado com cautela, especialmente em contextos de longevidade humana ou fenômenos complexos.

Para o cálculo do montante A(t) A força de juros associada ao modelo de Weibull, vale:

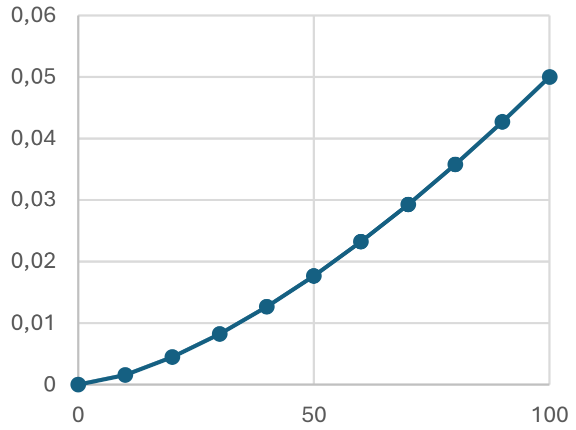
$$\ln S_0(x) = -\frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1}$$

$$\delta(x) = -\frac{d}{dx} \ln S_0(x) = -\frac{d}{dx}\left(-\frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)$$

$$\delta(x) = k \cdot x^n$$

Para $k = 0{,}00005$ e $n = 1{,}5$, o gráfico da taxa (força) de juros está representado abaixo e sua tabela pode ser consultado no apêndice D.

Gráfico 12 - Força de juros



Fonte: elaboração própria

Integrando,

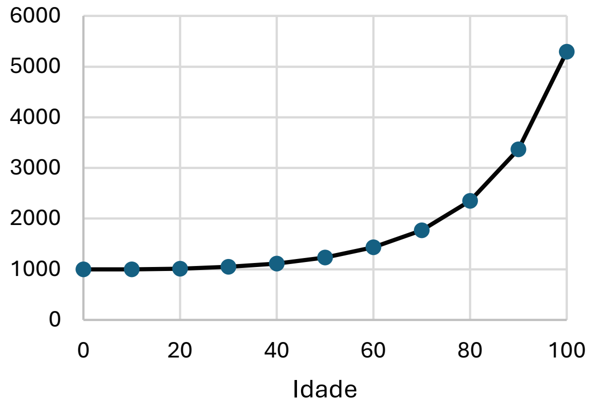
$$\int_0^t \delta(s)\, ds = \int_0^t k \cdot s^n\, ds \Rightarrow \int_0^t \delta(s)\, ds = \frac{k}{n+1} \cdot t^{n+1}$$

Substituindo na forma geral na forma geral em **(1)**, obtemos:

$$A(t) = A_0 \cdot exp\left(\frac{k}{n+1} \cdot t^{n+1}\right)$$

Que é o modelo de capitalização contínua associado ao modelo de Weibull e cujo gráfico está apresentado abaixo para os parâmetros $k = 0{,}00005$ e $n = 1{,}5$.

Gráfico 13- Montante acumulado A(t) - Weibull



Fonte: Elaboração própria.

4.6 Quadro resumo das funções de sobrevivência, força de juros e montante acumulado

Os quadros a seguir apresentam de forma sintética as funções de sobrevivência, suas respectivas forças de mortalidade (força de juros), os modelos de capitalização contínua associados e os gráficos correspondentes.

Quadro 2 - Quadro-resumo das funções de sobrevivência, força de juros e montante acumulado para diferentes modelos

Modelo	$\delta(t)$	$S_0(x)$	$A(t)$
De Moivre	$\frac{1}{\omega - t}$	$1 - \frac{x}{\omega}$	$A_0 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega - t}\right)$
Exponencial	μ constante	$e^{-\mu x}$	$A_0 \cdot e^{\mu t}$
Gompertz	Bc^t	$exp^{-Ax - \frac{B(c^x - 1)}{\ln c}}$	$A_0 \cdot exp\left[At + \frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right]$
Weibull	kt^n	$exp\left(-\frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)$	$A_0 \cdot exp\left(\frac{k}{(n+1)} \cdot t^{n+1}\right)$

4.7 Simulação numérica e resultados

Nesta seção[1], apresentamos a análise numérica das tábuas de vida construídas a partir de diferentes modelos atuariais de mortalidade: De Moivre, Exponencial, Gompertz-Makeham e Weibull. O objetivo é comparar a evolução da sobrevivência e da força de mortalidade ao longo das idades, identificando características particulares de cada modelo.

O modelo de De Moivre (Apêndice 1) assume uma função de sobrevivência linear, $S(x) = (\omega - x)/\omega$ e uma força de mortalidade inversamente proporcional à idade restante, $\mu x = 1/(\omega - x)$. Observa-se que a mortalidade aumenta de forma

[1] Após a construção dos modelos de capitalização contínua a partir das funções de sobrevivência, discutiremos alguns resultados obtidos e explorados a partir da análise numérica. As tábuas atuariais referentes a cada modelo estudado podem ser consultas nos apêndices.

gradual e quase linear com a idade. Por exemplo, aos 50 anos, $\mu_{50} = 0{,}02$; enquanto aos 90 anos atinge apenas 0,1. A sobrevivência decresce de maneira uniforme, refletindo a simplicidade do modelo, que não capta o aumento acelerado da mortalidade em idades mais avançadas observado empiricamente.

Já o modelo exponencial (apêndice 2) a força de mortalidade é constante (μ=0,035), resultando em uma função de sobrevivência exponencial $S(x) = e^{-\mu x}$.

Os valores da tábua indicam uma diminuição mais rápida da população do que no modelo de De Moivre, especialmente nas idades intermediárias. Por exemplo, aos 50 anos, a proporção de sobreviventes é $S(50) \approx 0{,}174$, significativamente menor que a do modelo de De Moivre $(S(50) = 0{,}5)$. Esse modelo é útil em situações de mortalidade uniforme ao longo do tempo, mas não reflete o aumento acentuado da mortalidade em idades avançadas.

O modelo de Gompertz-Makeham (Apêndice 3) combina uma componente constante de mortalidade acidental $(A = 0{,}0005)$ com uma componente exponencial crescente ($B \cdot c^x$), capturando de forma mais realista o aumento da mortalidade com a idade. A tábua mostra que, aos 70 anos, $\mu_{70} = 0{,}0088$, enquanto aos 100 anos atinge 0,111, refletindo o rápido aumento da mortalidade em idades avançadas. A função de sobrevivência decresce de forma não linear, mostrando o efeito combinado da mortalidade acidental e do envelhecimento biológico.

O modelo de Weibull (Apêndice 4) com parâmetros de forma $k = 0{,}00003$ e escala $n = 1{,}5$, apresenta uma mortalidade que cresce de forma polinomial com a idade. Observa-se que a força de mortalidade aumenta gradualmente nas idades iniciais e de forma mais acentuada nas idades mais avançadas, atingindo $\mu_{100} = 0{,}0335$. A função de sobrevivência decresce mais rapidamente do que no modelo de De Moivre, mas de forma menos abrupta que no modelo de Gompertz-Makeham. Esse modelo permite maior flexibilidade para ajustar diferentes padrões de mortalidade.

4.8 Cálculo e comparação dos Montantes acumulados para $A_0 = 1000$

Nesta seção, analisamos o comportamento dos montantes acumulados ao longo do tempo considerando um capital inicial $A_0 = 1000$ e quatro diferentes modelos atuariais: De Moivre, Exponencial, Gompertz-Makeham e Weibull. O objetivo é observar como cada modelo projeta a evolução do capital e destacar as características particulares de cada abordagem.

Tabela 1- Cálculo e comparação dos Montantes acumulados para diferentes modelos

t (anos)	$A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega - t}\right) *$	$A(t) = A_0 \cdot e^{\mu t} **$	$A(t) = A_0 \cdot exp\left[At + \frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right] ***$	$A(t) = A_0 \cdot exp\left(\frac{k}{(n+1)} \cdot t^{n+1}\right) ****$
0	1000	1000	1000,0	1000
10	1111.11	1491,825	1648,8	1001,668
20	1250.00	2225,541	2718,4	1013,423
30	1428.57	3320,117	4482,1	1046,028
40	1666.67	4953,032	7389,9	1112,563
50	2000.00	7389,056	12184,3	1231,624
60	2500.00	11023,18	20089,2	1433,329
70	3333.33	16444,65	33122,4	1771,217
80	5000.00	24532,53	54611,3	2347,459
90	10000.00	36598,23	90041,4	3370,294
100	∞	54598,15	148457,7	5294,49

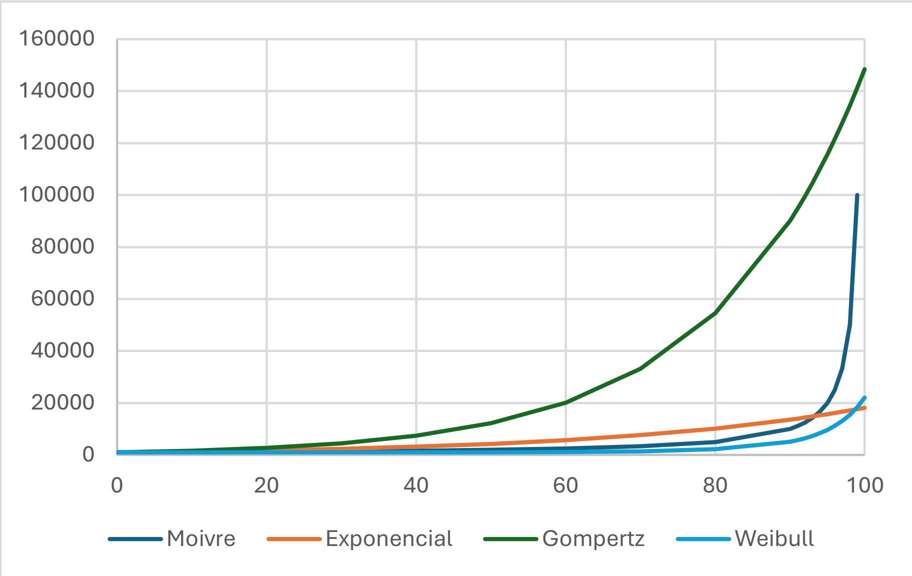
(*) O modelo de De Moivre utiliza o parâmetro $\omega = 100$.

(**) O modelo exponencial utiliza o parâmetro $\mu = 0{,}04$.

(***) O modelo de Gompertz-Makeham utiliza os parâmetros: $A = 0{,}05$, $B = 0{,}000003$ e $c = 1{,}000007$.

(****) O modelo de Weilbull utiliza parâmetros calibrados para reproduzir valores observados resultando em k = 0,000005 e n = 2. O modelo reflete um crescimento acentuado do montante com a idade, mais coerente com o padrão observado empiricamente.

Gráfico 14 - Crescimento de A(t) nos diferentes modelos



Fonte: Elaboração própria

gráfico elaborado com base nos dados da tabela anterior

O modelo de **De Moivre** assume que a função de sobrevivência decresce linearmente até uma idade máxima $\omega = 100$. O montante acumulado é calculado por $A(t) = A_0 \cdot \left(\frac{\omega}{\omega - t}\right)$, resultando em crescimento relativamente moderado nos primeiros anos. No entanto, à medida que o tempo se aproxima da idade máxima, o montante aumenta de forma acentuada, atingindo valores teoricamente infinitos em $t = \omega$. Esse comportamento evidencia uma limitação do modelo para projeções de longo prazo, pois o crescimento torna-se irrealista próximo da idade máxima.

O modelo **Exponencial**, definido por $A(t) = A_0 \cdot e^{\mu t}$ com taxa $\mu = 0{,}0513$, apresenta crescimento contínuo e previsível ao longo do tempo. A tabela mostra que, a partir de aproximadamente 20 anos, os montantes acumulados pelo modelo exponencial já superam significativamente os do modelo De Moivre, mantendo uma progressão suave e consistente. Esse modelo é adequado para estimativas de acumulação de capital quando se considera uma taxa constante, mas tende a superestimar valores em horizontes muito longos se não houver fatores limitantes.

O modelo de **Gompertz-Makeham** combina efeitos de mortalidade com crescimento exponencial, utilizando os parâmetros $A = 0{,}005$; $B = 0{,}0015$ e $c = 1{,}10$, de acordo com a expressão $A(t) = A_0 \cdot exp\left[At + \frac{B}{\ln c}(c^t - 1)\right]$. Este modelo apresenta crescimento extremamente acelerado, produzindo montantes que rapidamente atingem ordens de grandeza da casa de bilhões e até trilhões. O comportamento mostra alta sensibilidade aos parâmetros de mortalidade e evidencia que, sem ajustes, o modelo pode gerar projeções de acumulação de capital pouco realistas em períodos longos.

O modelo **Weibull**, com $k = 0{,}0004$ e $n = 2$, calcula o montante como $A(t) = A_0 \cdot exp\left(\frac{k}{n+1} \cdot t^{n+1}\right)$. Os resultados indicam crescimento gradual nas primeiras décadas, acelerando em idades mais avançadas. Essa característica posiciona o modelo entre De Moivre e Gompertz-Makeham, mostrando um comportamento intermediário que combina estabilidade inicial com aumento significativo em horizontes mais longos.

A análise comparativa evidencia que cada modelo reflete características distintas da acumulação de capital. De Moivre e Weibull apresentam crescimento moderado nas primeiras fases, mas o De Moivre diverge rapidamente próximo da idade máxima, enquanto o Weibull acelera de forma mais gradual. O modelo exponencial oferece previsibilidade com crescimento contínuo, e Gompertz-Makeham, embora realista para mortalidade, tende a gerar montantes excessivamente altos sem limitação. Esses resultados destacam a importância de selecionar o modelo apropriado conforme o horizonte temporal e a finalidade da projeção, considerando a combinação entre crescimento financeiro e comportamento atuarial da população.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho buscou integrar os conceitos de capitalização contínua com os modelos clássicos de sobrevivência, demonstrando que tanto a Matemática Financeira quanto a Atuarial compartilham fundamentos comuns, como a taxa instantânea de crescimento e a força de mortalidade. A partir da análise teórica e das simulações numéricas, verificou-se que cada modelo de sobrevivência oferece uma forma distinta de representar o decaimento da população e, consequentemente, influencia a projeção de montantes acumulados em regimes de capitalização contínua.

Os resultados indicam que modelos mais simples, como o de De Moivre e o Exponencial, apresentam fácil aplicação, mas limitações importantes em horizontes de longo prazo. Já modelos mais sofisticados, como Gompertz-Makeham e Weibull, oferecem maior realismo e flexibilidade, embora exijam maior esforço de calibração.

A principal contribuição deste estudo foi evidenciar a aplicabilidade do regime de capitalização contínua em contextos atuariais, aproximando conceitos financeiros e demográficos. Tal abordagem mostra-se relevante não apenas na precificação de seguros e anuidades, mas também em análises de investimentos e planejamento de longo prazo, onde os fluxos de caixa se aproximam de um comportamento contínuo.

Destaca-se que, embora nenhum modelo seja capaz de reproduzir integralmente a realidade, a escolha adequada do regime e da função de sobrevivência pode oferecer importantes insights para decisões financeiras e atuariais. Trabalhos futuros podem explorar calibrações empíricas com dados reais de populações ou mercados, ampliando o alcance e a utilidade prática dos modelos aqui discutidos.

REFERÊNCIAS

BOWERS, N.L.; GERBER, H.U.; HICKMAN, J.C.; JONES, D.A.; NESBITT, C.J.. **Actuarial Mathematics**, 2ª edição. SOA, 1997.

CORDEIRO FILHO, A. **Cálculo atuarial aplicado**: teoria e aplicações-exercícios resolvidos e propostos. ed. São Paulo: Atlas, 2014.

INVESTOPEDIA. **Continuous Compounding: Definition, Formula, and Example**. Disponível em: https://www.investopedia.com/terms/c/continuouscompounding.asp. Acesso em: 5 ago. 2025.

KELLISON, S. G. **The theory of interest**. Homewood, Illlnols, .RichardD. Irwin, Inc., 1970.

PIRES, D. M.; COSTA, L.H. MARQUES, R.; FERREIRA, L. **Fundamentos da matemática atuarial: vida e pensões**. Curitiba: CRV, 2021.

MACHADO, C. C. **Cálculo estatístico atuarial**. 1. Ed. Curitiba, PR: Intersaberes, 2023.

SAMANEZ, C. P. M. **Matemática financeira.** 5. ed. São Paulo, SP: Pearson, 2010.

FERREIRA, P. P. **Matemática atuarial: riscos de pessoas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: ENS-CPES, 2019.

VILANOVA, W. **Matemática atuarial: cursos de ciências econômicas, contábeis e atuariais**. Liv. Pioneira, Ed. da Universidade, 1969.

APÊNDICE A

A presente tábua foi construída com base no modelo de De Moivre, cuja função de sobrevivência é dada por:

$S(x) = (\omega - x) / \omega$, para $0 \leq x < \omega$

Adotaram-se os seguintes parâmetros para a construção da tábua:

- População inicial (ℓ_0): 100.000 indivíduos
- Idade máxima (ω): 100 anos
- Função de sobrevivência: $S(x) = (\omega - x) / \omega$
- Força de mortalidade: $\mu_x = 1 / (\omega - x)$

A tábua resultante apresenta os seguintes valores estimados para idades múltiplas de 10:

Tabela 2 - Tábua de Vida – Modelo de De Moivre

Idade (x)	ℓ_x	S(x)	μ_x
0	100000	1,000	0,01010
10	90000	0,900	0,001111
20	80000	0,800	0,01250
30	70000	0,700	0,01429
40	60000	0,600	0,01667
50	50000	0,500	0,02000
60	40000	0,400	0,02500
70	30000	0,300	0,03333
80	20000	0,200	0,05000
90	10000	0,100	0,010000
100	0	0,000	—

APÊNDICE B

A tabela a seguir apresenta uma tábua de vida construída com base no modelo exponencial de mortalidade, no qual a força de mortalidade (μ_x) é constante ao longo do tempo. Para esta simulação, foi adotado μ = 0,029 e uma população inicial de ℓ_0 = 100.000 indivíduos. A função de sobrevivência utilizada é: $S(x) = \exp(-\mu x)$.

Tabela 3 - Tábua de Vida – Modelo exponencial de mortalidade

Idade (x)	ℓ_x	S(x)	μ_x
0	100000	1,000000	0,029
10	74826	0,748264	0,029
20	55990	0,559898	0,029
30	41895	0,418952	0,029
40	31348	0,313486	0,029
50	23457	0,234570	0,029
60	17552	0,175520	0,029
70	13134	0,131336	0,029
80	9827	0,098274	0,029
90	7353	0,073535	0,029
100	5502	0,055023	0,029

APÊNDICE C

A tabela a seguir apresenta uma tábua de vida construída com base no modelo de Gompertz-Makeham, com os seguintes parâmetros: A = 0,005 (componente de mortalidade acidental), B = 0,00002 (constante de Gompertz) e c = 1,09 (taxa de crescimento exponencial da mortalidade com a idade). A função força de mortalidade é dada por $\mu_x = A + B \cdot c^x$ e a função de sobrevivência S(x) foi aproximada por integração numérica. Adota-se ℓ_0 = 100.000 indivíduos ao nascimento.

Tabela 4 - Tábua de Vida – Modelo de Gompertz-Makeham

Idade (x)	ℓ_x	S(x)	μ_x
0	100000	1,000000	0,000520
10	60651	0,606512	0,005047
20	36785	0,367857	0,005112
30	22311	0,223110	0,005265
40	13531	0,135319	0,005628
50	8207	0,082073	0,006487
60	4977	0,049778	0,008521
70	3019	0,030191	0,013335
80	1831	0,018311	0,024731
90	1110	0,011106	0,051711
100	673	0,006736	0,115581

APÊNDICE D

A tabela a seguir apresenta uma tábua de vida construída com base no modelo de Weibull, com parâmetros k = 0,00003 (parâmetro de forma) e $n = 1{,}5$ (parâmetro de escala). Os valores são calculados com base na função de sobrevivência $S(x) = exp\left(-\frac{k}{n+1} \cdot x^{n+1}\right)$ e na força de mortalidade μ_x = kt^n. Adota-se ℓ_0 = 100.000 indivíduos ao nascimento.

Tabela 5 - Tábua de Vida – Modelo de Weibull

Idade (x)	ℓ_x	S(x)	μ_x
0	100000	1,000000	0,000000
10	99369	0,993695	0,001581
20	96485	0,964855	0,004472
30	90611	0,906114	0,008216
40	81678	0,816780	0,012649
50	70218	0,702189	0,017678
60	57251	0,572519	0,023238
70	44046	0,440464	0,029283
80	31826	0,318266	0,035777
90	21505	0,215054	0,042691
100	13533	0,135335	0,05