

O ESTUDO DA RETA NO PLANO COMPLEXO

THE STUDY OF THE LINE IN THE COMPLEX PLANE

Ana Beatriz Santos Vilela

absv@discente.ifpe.edu.br

Leonardo Moura de Amorim

amorim.leomoura@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo investigar o estudo da reta no plano complexo, ressaltando de que maneira os conceitos da Geometria Analítica, tradicionalmente explorados no plano cartesiano, podem ser ressignificados e aplicados aos números complexos, por meio de uma pesquisa bibliográfica exploratória, desenvolvida sob uma perspectiva qualitativa. Primeiramente, será feita uma pequena abordagem histórica e, em seguida, serão consideradas a definição e as propriedades elementares dos números complexos, dando ênfase às suas representações algébrica e geométrica, a fim de desenvolver os fundamentos teóricos essenciais para a compreensão da reta no plano complexo, analisando suas equações, propriedades e implicações matemáticas, com o objetivo de ampliar o entendimento das relações entre a Álgebra e a Geometria, sem a finalidade de exibir ou explorar aplicações específicas. Vale ainda destacar que o trabalho prioriza um tratamento algébrico, sem deixar de considerar, quando necessário, interpretações geométricas.

Palavras-chave: Geometria Analítica. Números Complexos. Plano Complexo. Reta.

ABSTRACT

This work aims to investigate the study of the straight line in the complex plane, highlighting how the concepts of Analytic Geometry, traditionally explored in the Cartesian plane, can be reinterpreted and applied to complex numbers, through an exploratory bibliographic research, developed from a qualitative perspective. First, a brief historical overview will be provided, followed by a consideration of the definition and elementary properties of complex numbers, emphasizing their algebraic and geometric representations, in order to develop the essential theoretical foundations for understanding the straight line in the complex plane. This analysis will examine its equations, properties, and mathematical implications, aiming to broaden the understanding of the relationships between Algebra and Geometry, without intending to exhibit or explore specific applications. It is also worth noting that the work prioritizes an algebraic approach, while still considering geometric interpretations when necessary.

Keywords: Analytic Geometry. Complex Numbers. Complex Plane. Line.

INTRODUÇÃO

A Geometria Analítica Plana e os números complexos são, em geral, tratados separadamente nos livros de Matemática. A Geometria Analítica Plana estuda as figuras geométricas por meio da Álgebra, enquanto os números complexos são uma ampliação dos conjuntos numéricos.

O surgimento dos números complexos se deu pela necessidade de resolver problemas envolvendo raízes de números negativos. Diante das equações do 2º grau cujo discriminante era negativo, admitia-se que o problema não tinha solução. Essa necessidade também foi observada após o estudo das equações cúbicas, uma vez que o conjunto dos números reais não seria suficiente para contemplar todas as possíveis soluções.

Historicamente, os matemáticos costumavam se desafiar para resolver problemas matemáticos. Diante disso, Niccoló Tartaglia (1499-1557) foi desafiado por Fiore a resolver trinta questões sobre equações cúbicas. Enquanto Fiore não conseguiu resolver todas as questões no tempo determinado, Tartaglia obteve êxito em todas, pois dominava um método para resolver equações do tipo $x^3 = px + q$, com p e q reais positivos.

Cardano (1501-1576) ficou impressionado com o sucesso de Tartaglia e ficou curioso para saber qual a fórmula utilizada para resolver tais equações.

Em 1545, Cardano publicou um livro chamado *Ars Magna* com resoluções de equações do terceiro e do quarto graus.

Em 1572, Rafael Bombelli (1526-1572) fez uma análise sobre esses números imaginários, em seu livro *Algebra*. Cerca de 65 anos depois, René Descartes (1596-1650) escreveu em seu livro *La Geometrie* que uma equação pode ter tantas raízes quanto o seu grau se considerarmos as raízes imaginárias.

Até então, esses números não eram aceitos e foram reconhecidos após Frederich Gauss (1777-1855) desenvolver a representação algébrica dos números complexos, adotando o símbolo i previamente introduzido por Euler (1707-1783).

Esses números são bastante importantes para a Matemática e estão envolvidos em vários temas, como, por exemplo, funções trigonométricas, rotação, entre outras aplicações relevantes.

Na seção 1, é relatada uma breve história sobre o surgimento e a consolidação dos números complexos, destacando a necessidade de utilizar esses números na resolução de equações que não admitem solução no conjunto dos números reais.

Na seção 2, são descritas a definição e as propriedades dos números complexos em sua forma algébrica e as operações fundamentais.

Na seção 3, é estabelecido uma articulação da Geometria Analítica Plana e os números complexos para o estudo da reta no plano complexo. As diferentes formas de representar a equação de uma reta são apresentadas no plano complexo, seguidas das devidas demonstrações. Além disso, são descritas as condições de paralelismo, perpendicularidade e concorrência entre retas. Também são discutidos

conceitos como pé da perpendicular, distância entre ponto e reta, lugar geométrico e reta mediatriz no plano complexo.

1 BREVE HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O surgimento dos números complexos está relacionado à necessidade de resolver raízes de números negativos. Apesar de serem associados à resolução de equações do 2º grau que possuem o discriminante negativo, sua existência se deu pela necessidade de resolver equações cúbicas.

Ao defrontar-se com equações do 2º grau cujo discriminante resultava em um número negativo, admitia-se que o problema não tinha solução, sendo assim, impossível de resolver. Esse entendimento começou a ser modificado com o estudo das equações do 3º grau, visto que o conjunto dos números reais não seriam suficientes para contemplar todas as possíveis soluções. Essa limitação obrigou os matemáticos a buscarem novas alternativas, explorar novos caminhos e ampliar o conceito de número.

O primeiro exemplo de um problema envolvendo raiz quadrada de um número negativo foi na *Estereometria* de Heron, matemático grego do período Alexandrio, publicada aproximadamente em 75 d. C., em um cálculo relacionado ao desenho de uma pirâmide, onde surge uma expressão com raiz quadrada de um número negativo.

Mais à frente, em 275 d. C., na *Arithmética* de Diophanto, acontece outro problema envolvendo a raiz quadrada de um número negativo, relacionado ao seguinte problema: “Um triângulo tem área igual a 7 e seu perímetro é de 21 unidades. Encontre o perímetro dos lados”.

Por meados de 1510, o professor de matemática em Bologna, chamado Scipione Del Ferro (1465-1526), descobriu um método para resolver equações do tipo $x^3 + px = q$, onde p e q são números reais positivos. Ele morreu e não divulgou o seu método de resolução, revelando apenas para Antonio Maria Fiore e Annibale della Nave.

Na época, era comum haver desafios públicos entre matemáticos, onde cada participante propunha problemas para o outro resolver. Nessa situação, Fiore decidiu desafiar Nicoló Tartaglia, um estudioso que estava começando a se destacar nos meios culturais, a resolver trinta questões envolvendo equações cúbicas.

Contudo, Fiore não obteve o resultado esperado. Enquanto Tartaglia conseguiu resolver todas as questões no tempo em que fora estipulado, Fiore não obteve êxito nas questões que lhe foram propostas. Isso se deu porque Tartaglia não dominava apenas aquele método específico de solução dessas equações, mas também tinha conhecimento de como resolver equações do tipo $x^3 = px + q$, com p e q reais positivos.

Tartaglia conquistou reconhecimento por sua vitória nesse desafio e essa notícia chegou até os ouvidos de Girolamo Cardano que ficou curioso em saber qual fórmula havia sido utilizada. Assim, Cardano convidou Tartaglia para ir até à sua casa na intenção de conhecer o método de resolução das equações cúbicas e garantiu que não iria divulgar. Tartaglia não concordou em expor, mas Cardano insistiu tanto que,

em 1539, Tartaglia revelou a ele a tão esperada fórmula da resolução das equações cúbicas.

Após conhecer o método, Cardano ainda encontrou uma demonstração que provava como resolver qualquer equação cúbica. E também motivou o seu discípulo Ludovico Luigi Ferrari (1522-1564) a estudar as equações de quarto grau, onde o mesmo desenvolveu um método para elas semelhante ao das equações cúbicas.

Em 1542, em uma viagem para Bologna, Cardano e Ferrari, tiveram acesso aos escritos de Del Ferro, onde revelava a regra que Tartaglia havia relatado. Com isso, Cardano não cumpriu sua palavra de manter o método em sigilo e, em 1545, ele publicou em seu livro *Ars Magna*, a resolução das equações de terceiro e quarto grau, dando ênfase a participação ativa de Tartaglia e Ferrari no desenvolvimento dos respectivos métodos de resolução.

Desse modo, a fórmula que Cardano apresentou em sua obra para a resolução das equações cúbicas é

$$x = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}} \quad (1.1)$$

Esse método não foi o suficiente. Ao operar com raízes quadradas de números negativos, Cardano se deparou com resultados inesperados e demonstrou resistência em aceitá-los, visto que os números complexos eram pouco aceitos naquela época.

Em 1572, Rafael Bombelli, em seu livro *Algebra*, dedicou várias páginas dele para uma análise desses números imaginários, dando continuidade ao estudo dos números complexos. Cerca de 65 anos depois, René Descartes, em seu livro *La Geometrie*, nomeou essas raízes como números imaginários, afirmando que as equações tem tantas raízes quanto o seu grau, se admitir as raízes imaginárias.

Apesar da sua utilidade para resolver as equações, os complexos não eram vistos como novos números que foram descobertos e sim como um recurso algébrico útil para facilitar tais resoluções. Nesse trabalho, ele apresentou a denominação desses números afirmando que nem as raízes positivas e nem as raízes negativas são reais; às vezes podem ser imaginárias. Dessa forma, o número $\sqrt{-1}$ é chamado de número imaginário até hoje.

Com o passar do tempo, esses números foram sendo aceitos. Leonhard Euler (1707-1783) foi quem apresentou o símbolo i para representar $\sqrt{-1}$. Apesar de seus estudos sobre os novos números, Euler considerava esses números como elementos fictícios, existindo apenas na imaginação como afirmava em seu livro *Raízes Imaginárias de uma Equação*, com as seguintes palavras:

Como todos os números concebíveis são ou maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídas entre os números possíveis (números reais). E esta circunstância conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de imaginários, pois existem somente na imaginação.

Por outro lado, na obra *Teoria dos Resíduos Quadráticos*, Carl Frederic Gauss (1777-1855) escreveu o seguinte:

Fazia muito tempo que as quantidades imaginárias estavam baseadas na ficção, não sendo plenamente aceitas na Matemática e vistas como uma coisa a ser tolerada; elas estavam longe de ter o mesmo status que as quantidades reais. Agora não há mais justificativa para tal discriminação, uma vez que a metafísica dos números imaginários está plenamente esclarecida, e que se provou que eles têm um significado tão real quanto os números negativos.

Gauss foi importantíssimo ao desenvolver a representação geométrica dos números complexos, adotando o símbolo i que foi introduzido por Euler. A partir daí, ao invés de os números complexos serem escritos como $a + b\sqrt{-1}$, passaram a ser escritos como $a + bi$, com a e b números reais e $i^2 = -1$. E, em meados de 1850, esses números foram aceitos e são utilizados até hoje.

2 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES ELEMENTARES DOS NÚMEROS COMPLEXOS

De modo geral, quando se trata dos números reais ($\mathbb{R}$), considera-se que eles são uma reta numérica qualquer (figura geométrica) disposta horizontalmente. Diante disso, define-se um comprimento padrão que será a unidade, marca-se um ponto que corresponde ao zero como referência. Além disso, são determinadas duas operações distintas (multiplicação e adição) envolvendo dois pontos da reta das quais resultará em um terceiro ponto. Esses pontos são chamados de números e é notável que as operações definidas satisfazem propriedades fundamentais, como a comutatividade, a associatividade, a distributividade, etc.

O questionamento que surge após essa discussão é: seria possível definir operações com propriedades fundamentais para os pontos de um plano? E, sendo mais específico, ao considerar a reta real como o eixo horizontal do plano cartesiano, existe alguma maneira de generalizar as operações com os pontos na reta real associando-as aos pontos do plano? A resposta é sim e, a partir daí, caracteriza-se o conjunto dos números complexos.

No plano cartesiano, define-se o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dos pares ordenados (a, b) de números reais e define-se as seguintes operações:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d); (a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (2.1)$$

onde $+$ e $\cdot$ indicam a adição e a multiplicação usuais dos números reais.

São válidas as seguintes propriedades:

- i. **Comutativa:** $(a, b) \oplus (c, d) = (c, d) \oplus (a, b)$ e $(a, b) \otimes (c, d) = (c, d) \otimes (a, b)$.

ii. **Associativa:** $(a, b) \oplus ((c, d) \oplus (e, f)) = ((a, b) \oplus (c, d)) \oplus (e, f)$ e $(a, b) \otimes ((c, d) \otimes (e, f)) = ((a, b) \otimes (c, d)) \otimes (e, f)$.

iii. **Distributiva:** $(a, b) \otimes ((c, d) \oplus (e, f)) = ((a, b) \otimes (c, d)) \oplus ((a, b) \otimes (e, f))$.

iv. **Elemento Neutro:** $(a, b) \oplus (0, 0) = (a, b)$ e $(a, b) \otimes (1, 0) = (a, b)$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, ou seja, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são, respectivamente, os elementos neutros de $\oplus$ e $\otimes$.

E, considerando a operação $\otimes$, é válido a *lei do cancelamento*: $(a, b) \otimes (c, d) = (0, 0)$ se, e somente se, $(a, b) = (0, 0)$ ou $(c, d) = (0, 0)$.

Admitindo a reta real como sendo o eixo das abscissas no plano, cada número real x corresponde ao ponto $(x, 0)$. Em seguida, é necessário verificar se os resultados das operações $\oplus$ e $\otimes$ são iguais aos das operações usuais da adição e multiplicação de números reais, ou seja, devemos mostrar que

$$(x, 0) \oplus (y, 0) = (x + y, 0) \text{ e } (x, 0) \otimes (y, 0) = (xy, 0) \quad (2.2)$$

Verifica-se, de forma imediata, a veracidade das duas igualdades.

Logo, podemos admitir que $\mathbb{R}$ com as suas operações usuais de adição e multiplicação é um subconjunto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com as operações $\oplus$ e $\otimes$ já definidas anteriormente, e assim, chamar os pontos do plano de números, e, de forma mais precisa, chamar de números complexos, cujo conjunto será indicado por $\mathbb{C}$.

Para representar os números complexos e suas operações de um modo mais conveniente, vamos representar o elemento $(0, 1)$ por i e o chamaremos de *unidade imaginária*.

Daí, é possível concluir que:

$$i^2 = (0, 1) \otimes (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1. \quad (2.3)$$

E, ainda:

$$(a, b) = (a, 0) \oplus (0, b) = (a, 0) \oplus ((b, 0) \otimes (0, 1)) = a + bi. \quad (2.4)$$

A partir de agora, utilizaremos $+$ e $\cdot$ para representar as operações $\oplus$ e $\otimes$ e $a + bi$ para representar o complexo (a, b) . Daí, segue que

$$a + bi = 0 \Leftrightarrow (a, b) = (0, 0) \Leftrightarrow a = b = 0$$

Perceba que, diante do que foi exposto, equações como, por exemplo, $x^2 + 1 = 0$, têm o número i por raiz no conjunto dos números complexos. Tal fato é a parte essencial da importância dos números complexos.

Uma maneira de explicar o motivo pelo qual pode-se expressar $(a, b) \in \mathbb{C}$ como $a + bi$ é que é possível utilizar as mesmas operações, adição e multiplicação, que são utilizadas com os números reais, acrescida do fato que $i^2 = -1$. Desse modo,

ao utilizar qualquer uma das representações, o resultado será o mesmo, desde que as definições das operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{C}$ sejam utilizadas adequadamente.

Somando $(a, b) + (c, d)$ obtemos, por definição, $(a + c, b + d)$. Em contrapartida, realizando os cálculos como são feitos usualmente com os números reais, o resultado obtido é $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Como $(a + c, b + d)$ e $(a + c) + (b + d)i$, podemos afirmar que os dois resultados coincidem por definição.

O mesmo acontece com a multiplicação. Ao multiplicar $(a, b) \cdot (c, d)$ obtemos $(ac - bd, ad + bc)$. Mas, se operarmos novamente como fazemos com os números reais, obtemos:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Os valores novamente se coincidem, pois

$$(ac - bd, ad + bc) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Diante do exposto, é possível afirmar que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Consideremos os complexos z, w , onde $z = a + bi$ e $w = c + di$. Ao introduzir a operação de subtração, o resultado será o seguinte

$$z - w = (a + bi) - (c + di),$$

ou seja,

$$z - w = (a - c) + (b - d)i. \quad (2.5)$$

Assim sendo, $(a - c) + (b - d)i$ é o resultado da **diferença** $z - w$.

Na divisão, consideremos $z, w \in \mathbb{C}$, com $w \neq 0$, operando como quando fazemos racionalizações com números reais, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{a + bi}{c + di} \\ &= \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} \\ &= \frac{ac - adi + bci - bdi^2}{c^2 - \cancel{cdi} + \cancel{cdi} + d^2i^2} \\ &= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} \\ \frac{z}{w} &= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i \end{aligned} \quad (2.6)$$

Logo, $\frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$ é o **quociente** entre z e w , $w \neq 0$.

Ao analisar o caso particular do número 1 dividido por um número complexo não nulo, conclui-se que todo $z \neq 0$ possui inverso em relação à multiplicação.

Seja $z = a + bi \neq 0$ e utilizando a notação z^{-1} para indicar o inverso, segue que:

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{a+bi} \\ &= \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} \\ &= \frac{a-bi}{a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2i^2} \\ &= \frac{a-bi}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \end{aligned}$$

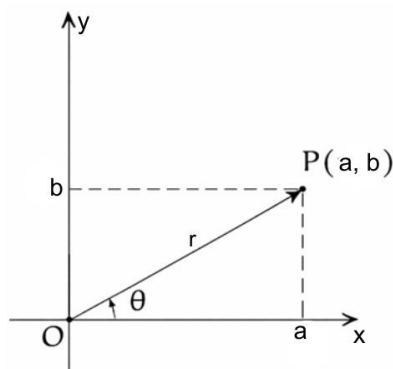
Com o objetivo de facilitar cálculos posteriores, para $z = a + bi \in \mathbb{C}$, adota-se a seguinte notação: o número complexo $\bar{z} = a - bi$ é denominado **conjugado** de $z = a + bi$.

Note que, ao multiplicar z por $\bar{z}$, o resultado será o número real $a^2 + b^2$:

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi)(a - bi) \\ &= a^2 - \cancel{abi} + \cancel{abi} - b^2i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Esse resultado será fundamental para a definição do módulo de um número complexo. Seja o complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, definimos o módulo de z , indicado por $|z|$, como sendo o módulo de um vetor que representa a distância do ponto $P(a, b)$, denominado afixo de z , à origem.

Figura 1- Representação do módulo de z no plano de Argand Gauss



Fonte adaptada: Muniz Neto (2012)

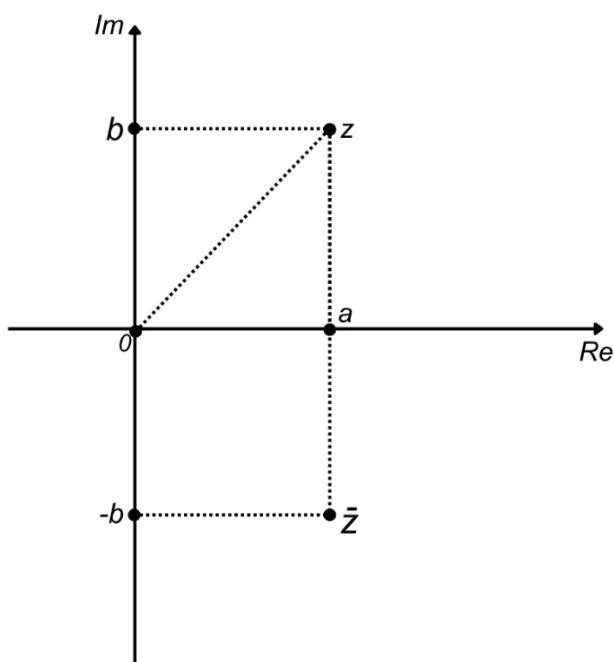
Portanto, $|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$

Ao relacionar os pontos do plano cartesiano com o conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$), adquirimos a representação de $\mathbb{C}$ que é conhecida como o plano complexo ou o Plano de Argand Gauss.

O eixo vertical denomina-se eixo imaginário e é formado pelos números complexos da forma bi , tal que $b \in \mathbb{R}$. Tais números são chamados de imaginários puros. Já o eixo horizontal, é chamado de eixo real e é formado pelos números complexos reais.

Ainda em relação ao plano complexo, podemos afirmar que os complexos $z = a + bi = (a, b)$ e $\bar{z} = a - bi$ são simétricos em relação ao eixo real. O número real a é denominado a parte real e b é a parte imaginária de z , e representados como $a = \text{Re}(z)$, $b = \text{Im}(z)$.

Figura 2 - Representação de z e $\bar{z}$ no plano de Argand Gauss



Fonte: Muniz Neto (2012)

A partir daí, temos:

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \frac{(a + bi) + (a - bi)}{2} = \frac{a + \cancel{bi} + a - \cancel{bi}}{2} = \frac{2a}{2} = a = \operatorname{Re}(z)$$

$$e \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{(a + bi) - (a - bi)}{2} = \frac{\cancel{a} + bi - \cancel{a} + bi}{2} = \frac{2bi}{2} = bi = \operatorname{Im}(z)$$

Considerando os complexos não nulos $z = a + bi$ e $w = c + di$, são válidas as seguintes propriedades:

i. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}$

Demonstração:

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

ii. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ e $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \bar{z} + \bar{w} &= (a - bi) + (c - di) \\ &= (a + c) - (b + d)i \\ &= \overline{z + w} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(a - bi)(c - di)i} \\ &= (ac - bd) - (ad + bc)i \\ &= (a - bi)(c - di)i \\ &= \bar{z} \cdot \bar{w} \end{aligned}$$

iii. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n, n \in \mathbb{N}$

Demonstração:

Vamos demonstrar usando o PIF (Princípio da Indução Finita):

a) Para $n = 1$, temos: $\overline{z^1} = \bar{z} = (\bar{z})^1$. Logo, é verdadeira para $n = 1$.

b) *Hipótese*: a propriedade é válida para $n, n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Tese: a propriedade será válida para $n + 1$. Isto é:

$$\overline{z^{n+1}} = (\bar{z})^{n+1}$$

Pela propriedade (ii) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ e $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$, temos:

$$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \cdot z} = \overline{z^n} \cdot \bar{z}$$

Da hipótese: $\overline{z^n} \cdot \bar{z} = (\bar{z})^n \cdot \bar{z} = (\bar{z})^{n+1}$

iv. $|z| = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \frac{1}{z}$

Demonstração:

Sendo $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = (a + bi)(a - bi) = a^2 - abi + abi - b^2i^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$ e considerando $\bar{z} = \frac{1}{z}$, temos que:

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot \frac{1}{a + bi} = \frac{a + bi}{a + bi} = 1 = |z|^2$$

3 A RETA NO PLANO COMPLEXO

A Geometria Analítica e os números complexos compõem o currículo básico da Educação Básica e são abordados no Ensino Médio separadamente. Considerando que os números complexos surgiram da necessidade de ampliar o conjunto de soluções de uma equação, vejamos de que maneira seria possível estudar objetos geométricos, em especial, a reta, articulados ao campo dos números complexos.

Proposição 1. No Plano Complexo, a equação da reta é $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$, onde

$$\alpha \in \mathbb{C}^*, \beta \in \mathbb{R} \text{ e } z = x + iy \in \mathbb{C}$$

Demonstração:

Sabemos que a equação da reta no plano cartesiano é definida por $Ax + By + C = 0$, com A, B e $C \in \mathbb{R}$, e $A^2 + B^2 \neq 0$. Definindo $z = x + iy$, temos que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ e } y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Com isso, podemos afirmar que:

$$A\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) - Bi\left(\frac{z - \bar{z}}{2}\right) + C = 0 \text{ ou, equivalentemente, } \bar{z}\left(\frac{A + Bi}{2}\right) + z\left(\frac{A - Bi}{2}\right) + C = 0$$

Consideremos $\alpha = \frac{A - Bi}{2} \in \mathbb{C}^*$ e $\beta = C \in \mathbb{R}$, segue daí que a equação da reta no plano complexo é $\bar{\alpha}\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$. Se $\alpha = \bar{\alpha}$, então $B = 0$ e temos uma reta vertical. Se $\alpha \neq \bar{\alpha}$, então o seu coeficiente angular será definido como

$$m = -\frac{A}{B} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\frac{\alpha - \bar{\alpha}}{i}} = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} i \quad (3.1)$$

Proposição 2. Consideremos as retas r_1 e r_2 , de equações $\bar{\alpha}_1\bar{z} + \alpha_1z + \beta_1 = 0$ e $\bar{\alpha}_2\bar{z} + \alpha_2z + \beta_2 = 0$, respectivamente. Então:

- paralelas se, e somente se, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$

Demonstração:

Temos que $r_1 // r_2$ se, e somente se, $m_1 = m_2$. Portanto, $\frac{\alpha_1 + \bar{\alpha}_1}{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1} i = \frac{\alpha_2 + \bar{\alpha}_2}{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2} i$, assim

$$\alpha_2 \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 \bar{\alpha}_2 \text{ e obtemos } \frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} = \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}.$$

- perpendiculares se, e somente se, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$

Demonstração:

$r_1 \perp r_2$ se e somente se $m_1 \cdot m_2 = -1$. Ou seja, $\alpha_2 \bar{\alpha}_1 + \alpha_1 \bar{\alpha}_2 = 0$, ou $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} + \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2} = 0$.

- concorrentes se, e somente se, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$

Demonstração:

$r_1 \times r_2$ se e somente se $m_1 \neq m_2$, ou seja, $\frac{\bar{\alpha}_1}{\alpha_1} \neq \frac{\bar{\alpha}_2}{\alpha_2}$.

Vale destacar que os resultados a respeito dos coeficientes angulares correspondem às propriedades de inclinação estudadas na Geometria Analítica Plana. A razão $m_r = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$ é chamada de coeficiente angular complexo da reta r de equação $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta = 0$.

3.1 EQUAÇÃO DA RETA DETERMINADA POR DOIS PONTOS

Sejam $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$ números complexos distintos. A equação da reta determinada pelos pontos $P_1(z_1)$ e $P_2(z_2)$ é

$$\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

onde $z = a + bi$ é um número complexo qualquer, diferente de z_1 e de z_2 , pertencente a reta determinada por $P_1(z_1)$ e $P_2(z_2)$.

Demonstração:

Considerando os pontos $P_1(a_1, b_1)$ e $P_2(a_2, b_2)$, a equação da reta que passa por esses pontos no plano cartesiano é dada por

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Utilizando os números complexos, obtém-se:

$$\begin{vmatrix} \frac{z_1 + \bar{z}_1}{2} & \frac{z_1 - \bar{z}_1}{2i} & 1 \\ \frac{z_2 + \bar{z}_2}{2} & \frac{z_2 - \bar{z}_2}{2i} & 1 \\ \frac{z + \bar{z}}{2} & \frac{z - \bar{z}}{2} & 1 \end{vmatrix}, \text{ se, e somente se, } \frac{1}{4i} \begin{vmatrix} z_1 + \bar{z}_1 & z_1 - \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 + \bar{z}_2 & z_2 - \bar{z}_2 & 1 \\ z + \bar{z} & z - \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Daí, obtém-se } \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0, \text{ como esperado.}$$

É possível demonstrar que:

- Os pontos $P_1(z_1), P_2(z_2), P_3(z_3)$ são colineares se e somente se $\begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$.
- O coeficiente angular complexo de uma reta determinada pelos pontos de coordenadas z_1 e z_2 é $m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$.

$$\text{De fato, a equação é } \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z} + z \bar{z}_1 - z \bar{z}_2 - z_1 \bar{z} - z_2 \bar{z}_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \bar{z}(z_2 - z_1) + z(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) + z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1$$

Usando a definição de coeficiente angular complexo, obtemos $m = \frac{z_2 - z_1}{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}$.

3.2 EQUAÇÃO DA RETA DETERMINADA POR UM PONTO E UMA DIREÇÃO

Proposição 1. Seja $r: \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ uma reta e seja $P_0(z_0)$ um ponto do plano complexo. A equação da reta paralela à r que passa por P_0 é $z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Demonstração:

Usando as coordenadas cartesianas, a reta paralela à r que passa por $P_0(x_0, y_0)$ tem equação $y - y_0 = i \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}}(x - x_0)$.

Usando os números complexos, a equação toma a forma

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = i \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{\alpha - \bar{\alpha}} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right) \quad (3.1.1)$$

equivalente a $(\alpha - \bar{\alpha})(z - z_0 - \bar{z} + \bar{z}_0) = (\alpha + \bar{\alpha})(z + \bar{z} - z_0 - \bar{z}_0)$, ou $\alpha(z - z_0) = -\bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Daí, obtemos $z - z_0 = -\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

Proposição 2. Seja $r: \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0$ uma reta e seja $P_0(z_0)$ um ponto do plano complexo. A reta que passa por P_0 e é perpendicular à r tem equação

$$z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0).$$

Demonstração:

Usando coordenadas cartesianas, a reta que passa por P_0 e é perpendicular à r tem equação $y - y_0 = -\frac{1}{i} \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}}(x - x_0)$.

$$\text{Daí, obtemos } \frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{z_0 - \bar{z}_0}{2i} = i \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{\alpha + \bar{\alpha}} \left(\frac{z + \bar{z}}{2} - \frac{z_0 + \bar{z}_0}{2} \right).$$

Isto é $(\alpha - \bar{\alpha})(z - z_0 - \bar{z} + \bar{z}_0) = -(\alpha - \bar{\alpha})(z - z_0 + \bar{z} - \bar{z}_0)$ ou $(z - z_0)(\alpha + \bar{\alpha} + \alpha - \bar{\alpha}) = (\bar{z} - \bar{z}_0)(-\alpha + \bar{\alpha} + \alpha + \bar{\alpha})$.

Obtemos $\alpha(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$ e $z - z_0 = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0)$.

3.3 PÉ DA PERPENDICULAR DE UM PONTO ATÉ UMA RETA

Proposição: Seja o ponto $P_0(z_0)$ um ponto do plano complexo, e seja $s: \alpha\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$ uma reta. O pé da perpendicular partindo de P_0 até s tem coordenadas $z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}$.

Demonstração: O ponto z é a solução do sistema $\begin{cases} \bar{\alpha}z + \alpha z + \beta = 0 \\ \alpha(z - z_0) = \bar{\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) \end{cases}$

A primeira equação nos dá $\bar{z} = \frac{-\alpha z - \beta}{\bar{\alpha}}$. Substituindo na segunda equação, temos $\alpha z - \alpha z_0 = -\alpha z - \beta - \bar{\alpha} \bar{z}_0$.

Consequentemente $z = \frac{\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha}$ como afirmado anteriormente.

3.4 DISTÂNCIA DE PONTO À RETA

Proposição: A distância do ponto $P_0(z_0)$ à reta $s: \alpha\bar{z} + \alpha z + \beta = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ é igual a $D = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}}$.

Demonstração:

Para determinar a distância D entre dois números complexos é só determinar a distância entre seus afijos, ou seja, basta determinar a distância entre os pontos z e z_0 . Assim, $D = |z - z_0|$. Usando o resultado anterior, podemos escrever $D = \left| \frac{\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta}{2\alpha} - z_0 \right| = \left| \frac{-\alpha z_0 - \bar{\alpha} \bar{z}_0 - \beta}{2\alpha} \right| = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2|\alpha|} = \frac{|\alpha z_0 + \bar{\alpha} \bar{z}_0 + \beta|}{2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}}$.

3.5 LUGAR GEOMÉTRICO NO PLANO COMPLEXO

Dada uma propriedade, chamamos de Lugar Geométrico (L.G.) o conjunto de pontos do plano complexo que satisfazem essa propriedade.

3.6 EQUAÇÃO DA RETA MEDIATRIZ

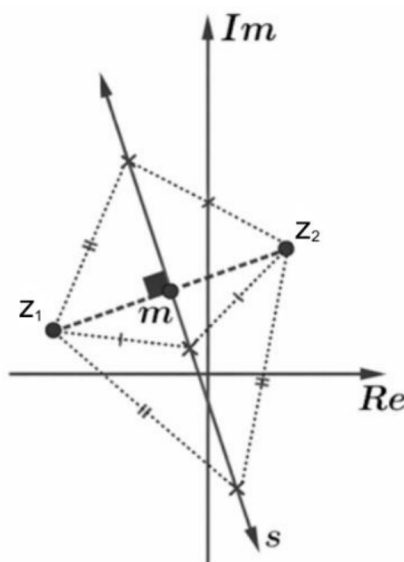
Sejam z_1 e z_2 dois números complexos no Plano de Argand-Gauss, e seja $\rho = x + yi$ os infinitos números complexos que equidistam de z_1 e z_2 . Assim, o L.G. de ρ é uma reta perpendicular ao segmento $\overline{z_1 z_2}$, que passa em seu ponto médio. A ela, damos o nome de *Reta Mediatriz*.

Se M é o número complexo que representa o ponto médio de $\overline{z_1 z_2}$, então

$$M = \frac{\operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2)}{2} + \frac{\operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2)}{2}i.$$

Além disso, se s é a Reta Mediatriz de $\overline{z_1 z_2}$ com $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ e, $\rho = x + yi$ pertence a s , então $s: |\rho - z_1| = |\rho - z_2|$

Figura 3 – Representação da reta mediatriz no plano de Argand Gauss



Fonte: Alex Ricardo (2024)

Demonstração:

Sabemos que a distância entre dois números complexos é o módulo da diferença entre eles. Assim, sendo s o L.G. dos infinitos pontos $\rho = x + yi$, que equidistam de $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, então:

$$s: |\rho - z_1| = |\rho - z_2| \quad (3.6.1)$$

$$s: |(x - a) + (y - b)i| = |(x - c) + (y - d)i|$$

$$s: (x - a)^2 + (y - b)^2 = (x - c)^2 + (y - d)^2$$

$$\begin{aligned}
s: (x - a)^2 - (x - c)^2 &= (y - d)^2 - (y - b)^2 \\
s: (2x - a - c)(c - a) &= (2y - b - d)(b - d) \\
s: 2x(c - a) + (a^2 - c^2) &= 2y(b - d) - (b^2 - d^2) \\
s: x \cdot (2(c - a)) + y \cdot (2(d - b)) &+ (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = 0
\end{aligned}$$

Sendo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, provamos que o L.G. de ρ é uma reta, que é a chamada reta mediatriz do segmento $\overline{z_1 z_2}$, de equação $s: |\rho - z_1| = |\rho - z_2|$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A geometria analítica plana articulada aos números complexos é um tema pouco discutido em livros e artigos. Geralmente, tais assuntos são apresentados de maneira distintas. Além disso, os números complexos não são estudados no Ensino Médio desde a BNCC de 2018 e não é contemplado nas avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM).

O objetivo deste trabalho foi apresentar como o estudo da reta no plano cartesiano, estudado na geometria analítica plana, pode ser ressignificado quando o $\mathbb{R}^2$ é enriquecido com a estrutura complexa, dando origem ao plano complexo $\mathbb{C}$.

Além disso, este trabalho evidencia que é possível estudar dois conteúdos distintos da Matemática de forma integrada, favorecendo uma ampliação do conhecimento e a construção de uma aprendizagem significativa.

Espera-se que esta pesquisa sirva de motivação para que estudantes que se interessem pelos números complexos explorem outras curvas ou transformações no plano complexo em um futuro próximo.

REFERÊNCIAS

ANDREESCU, Titu; ANDRICA, Dorin. Complex numbers from A to ... Z . Romania, Birkhäuser Boston: 2006.

BEZERRA FILHO, José Miguel. Transformação de Mobius no plano complexo. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – PROFMAT – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC, 2018.

HEFEZ, Abramo. VILLELA, Maria Lucia Torres. Polinômios e equações algébricas. 2012. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

IEZZI, Gelson. Fundamentos da matemática elementar, 6; complexos, polinômios, equações. 8. ed. São Paulo: Atual Editora, 2013.

JANUÁRIO, Douglas Alves. Geometria Analítica: estudo de reta e circunferência no plano complexo. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, IFSP, 2018.

LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. A Matemática do Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 1998.

MUNIZ NETO, Antonio Caminha. Tópicos de matemática elementar: polinômios. 1. Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012. V. 6.

PIANOSCHI, Thaisa Alves. Visualização das funções complexas e do Teorema Fundamental da Álgebra. 2013. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática Universitária) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2013.

RICARDO, Alex. et al. Tópicos elementares: números complexos e polinômios. Rio de Janeiro: Ed. dos autores, 2024.

SILVA, Maria Laísa Vasconcelos. Transformações geométricas elementares no plano complexo. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Ciência e Tecnologia, Pesqueira, Pernambuco, 2023.

SO, Victor. Aula 07: Números Complexos – EFOMM 2024. 2024.