

A CURVA CICLOIDE: UM PASSEIO PELA BRAQUISTÓCRONA E A TAUTÓCRONA USANDO O GEOGEBRA

Lucas dos Santos Monteiro

lsm2@discente.ifpe.edu.br

Anderson Rodrigo Oliveira da Silva

anderson.silva@pesqueira.ifpe.edu.br

Maria Janiely de Siqueira Gomes

janiely.siqueira@ufpe.br

RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo detalhado sobre a curva cicloide, abordando seus aspectos históricos, matemáticos e suas aplicações no ensino de Matemática e Física. O objetivo geral desta pesquisa é investigar o potencial didático da curva cicloide, integrando a História da Matemática e a modelagem computacional no software GeoGebra, para o ensino de suas propriedades geométricas e físicas de forma contextualizada, voltada para estudantes do Ensino Médio e dos anos iniciais da graduação em cursos de Licenciatura em Matemática e Física. A metodologia adotada consistiu em uma revisão bibliográfica, fundamentada em autores como Stewart (2013), Cordeiro (2013) e Silva (2022), associada à construção e simulação dinâmica no software GeoGebra. O desenvolvimento teórico contemplou a dedução das equações paramétricas, o cálculo da área sob a curva e do comprimento do arco, utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral. Na etapa prática, foram exploradas as propriedades da Braquistócrona (curva de tempo mínimo) e da Tautócrona (isocronismo), demonstrando visualmente fenômenos que desafiam a intuição. Os resultados indicam que a integração entre a História da Matemática e as tecnologias digitais facilita a transposição didática de conceitos complexos. Conclui-se que a cicloide, quando mediada pelo GeoGebra, constitui um excelente recurso pedagógico para conectar Geometria, Álgebra e Física, estimulando o raciocínio investigativo na Educação Básica e Superior.

Palavras-chave: Cicloide. GeoGebra. Ensino de Matemática. Braquistócrona. História da Matemática.

ABSTRACT

This work presents a detailed study on the cycloid curve, addressing its historical and mathematical aspects, as well as its applications in Mathematics and Physics teaching. The main objective was to investigate how computational modeling can assist in understanding the geometric and physical properties of this curve, promoting significant learning. The methodology adopted consisted of a bibliographic review, based on authors such as Stewart (2013), Cordeiro (2013), and Silva (2022), associated with dynamic construction and simulation in the GeoGebra software. The theoretical development included the deduction of parametric equations, the calculation of the area under the curve, and the arc length, using tools from Differential and Integral Calculus. In the practical stage, the properties of the Brachistochrone (curve of minimum time) and the Tautochrone (isochronism) were explored, visually demonstrating phenomena that defy intuition. The results indicate that the integration between the History of Mathematics and digital technologies facilitates the didactic transposition of complex concepts. It is concluded that the cycloid, when mediated by GeoGebra, constitutes an excellent pedagogical resource for connecting Geometry, Algebra, and Physics, stimulating investigative reasoning in Basic and Higher Education.

Keywords: Cycloid. GeoGebra. Mathematics Teaching. Brachistochrone. History of Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho de conclusão de curso surge do reconhecimento da relevância histórica e da complexidade geométrica da curva cicloide. Observa-se que a Matemática constitui uma ciência edificada por meio de desafios intelectuais e descobertas significativas, e a cicloide representa um marco nesse contexto. Um dos conceitos mais abstratos para alunos do Ensino Médio é a relação entre o comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$) e a distância linear percorrida por uma roda. Nesse sentido, a cicloide oferece a prova visual definitiva para esse conceito, materializando a transição do movimento circular para o linear. No século XVII, esta curva esteve no centro de intensos debates e investigações acadêmicas que foram cruciais para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, o que a mantém como um tema de interesse contínuo na área de ensino (SILVA; GARCIA, 2021).

O objeto desta pesquisa é a curva cicloide e suas propriedades clássicas. Em particular, a curva se tornou intrigante por suas duas características mais celebradas: a Braquistócrona e a Tautócrona. Conforme destacam Sales e Banyuls (2010), a Braquistócrona é o caminho de menor tempo para o movimento entre dois pontos não verticais, enquanto a Tautócrona revela que objetos soltos de posições diferentes atingem o ponto final no mesmo período de tempo, sob o efeito da gravidade. Apesar de toda a riqueza conceitual e da inegável relevância histórica da cicloide, seu estudo é frequentemente abordado de maneira superficial nos do Ensino Médio e da Graduação em geral, sem a devida exploração visual e experimental que ferramentas como o GeoGebra podem proporcionar.

Essa constatação de uma lacuna didática direciona a pesquisa ao problema de investigar como a contextualização histórica da curva cicloide e o uso de simulações dinâmicas no software GeoGebra podem contribuir para uma compreensão mais profunda e motivadora dos conceitos de equações paramétricas e das ideias introdutórias do Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio. Diante disso, o objetivo geral desta pesquisa é investigar o potencial didático da curva cicloide, integrando a História da Matemática e a modelagem computacional no

software GeoGebra, para o ensino de suas propriedades geométricas e físicas de forma contextualizada, voltada para estudantes do Ensino Médio e dos anos iniciais da graduação em cursos de Licenciatura em Matemática e Física.

Dentro desta perspectiva, busca-se construir a curva no software GeoGebra, simulando o rolamento sem deslizamento de uma circunferência, e demonstrar visualmente as propriedades físicas da Braquistócrona e da Tautócrona como aplicações para o Ensino Médio.

A metodologia adotada para este estudo é de natureza qualitativa e bibliográfica. Segundo Gil (1991), a pesquisa bibliográfica permite ao investigador uma cobertura de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente, sendo elaborada a partir de material já publicado. O trabalho está estruturado em sete seções. A segunda seção apresenta o levantamento histórico da cicloide. A terceira dedica-se à fundamentação matemática. A quarta descreve a construção da curva no GeoGebra. A quinta detalha a metodologia de pesquisa, e a sexta explora as aplicações didáticas e físicas. Por fim, a sétima seção traz as considerações finais.

2. A CURVA CICLOIDE: DESENVOLVIMENTO HISTÓRICO – EPISTEMOLÓGICO

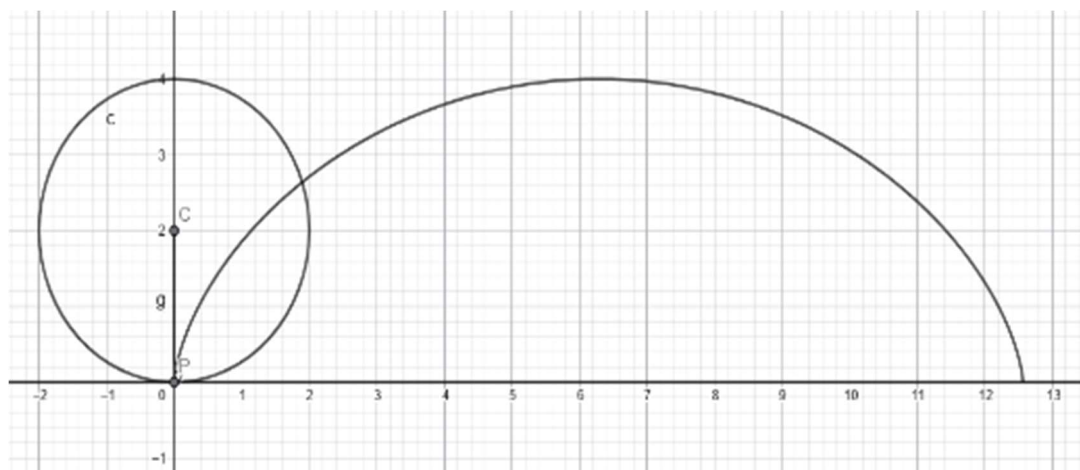
Decerto, buscamos traçar o percurso histórico e epistemológico da curva cicloide, compreendendo as circunstâncias e os desafios intelectuais que permitiram seu desenvolvimento epistemológico. A cicloide não é apenas uma figura geométrica, mas um objeto que mobilizou mentes renomadas do século XVII, servindo como um laboratório fundamental para a propulsão do cálculo infinitesimal e da mecânica clássica (FIRMINO; BORGES; COELHO, 2020).

Conforme apontam Sales e Banyuls (2010), a matemática é uma ciência edificada por meio de desafios, e a cicloide representa um marco nesse contexto, tendo estado no centro de debates que moldaram o pensamento científico moderno. Sob essa ótica, Cordeiro (2013) reforça que o estudo dessa curva possibilita a apresentação da matemática a partir de uma perspectiva histórica e aplicada, conectando definições abstratas a fenômenos reais. Portanto, revisar as contribuições de teóricos como Galileu, Pascal e Huygens torna-se essencial para fundamentar a proposta didática deste trabalho, permitindo uma transposição que une o rigor geométrico ao seu contexto de origem.

2.1 As Primeiras Investigações e o "Batismo" da Curva

O estudo da cicloide fundamenta-se na análise da trajetória gerada por um ponto fixo pertencente a uma circunferência que realiza um movimento de rolamento puro sobre uma guia retilínea. De acordo com Silva (2022), a denominação da curva foi estabelecida por Galileu Galilei, em 1599, derivando do termo grego *kykloides*, que significa "semelhante ao círculo". Esta definição descreve o lugar geométrico de um ponto na circunferência de um círculo gerador que rola sobre uma reta base sem deslizar conforme pode ser visualizado na Figura 1.

Figura 1 – Representação geométrica da geração da curva cicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Embora o século XVII marque o auge de seu estudo, registros apontam que a curva já era alvo de curiosidade em períodos anteriores. Conforme Silva (2022) ressalta que Nicolau de Cusa (1450) a investigou durante suas tentativas de resolver o problema da "quadratura do círculo". Cusa acreditava que, ao estudar o rastro do ponto no círculo, encontraria uma pista para construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado utilizando apenas régua e compasso. Pouco tempo depois, Charles de Bovelles (1501) avançou na descrição da referida curva, fornecendo uma das primeiras representações documentadas do rastro deixado por um ponto em um círculo em movimento.

O papel de Galileu Galilei, entretanto, foi o catalisador para a retomada do interesse científico sistemático. De acordo com Santos (2022) salienta que, motivado por possíveis aplicações na arquitetura de arcos de pontes, Galileu buscou determinar a área sob a cicloide. Diante da ausência de ferramentas do cálculo integral, o cientista adotou um método puramente experimental: recortou modelos da cicloide e de seu círculo gerador em chapas metálicas de densidade uniforme.

Ao comparar os pesos dessas peças em uma balança, constatou que a cicloide pesava aproximadamente três vezes mais que o círculo, inferindo que sua área seria $3\pi r^2$. É importante notar que, embora o resultado estivesse correto, a prova foi puramente física, uma vez que a incapacidade de Galileu em demonstrar este valor matematicamente através da geometria clássica evidenciou as limitações dos métodos baseados em proporções euclidianas. Conforme reforçam Firmino, Borges e Coelho (2020), essa abordagem experimental impulsionou a necessidade de novas ferramentas analíticas, transformando a cicloide no objeto central das disputas intelectuais que viriam a consolidar o cálculo infinitesimal.

2.2 A "Helena da Geometria": Disputas e Primeiras Formalizações

Após as investigações iniciais de Galileu, a cicloide tornou-se o centro de um dos períodos mais conturbados da história da matemática, o que lhe rendeu a alcunha de "Helena da Geometria", uma analogia à Helena de Troia, sugerindo que a curva era tão bela quanto geradora de discórdias e conflitos entre os estudiosos da época (Silva, 2022). O cerne das disputas residia na busca por uma demonstração matemática rigorosa para a área sob o arco e para o traçado das tangentes à curva, sendo este último um problema que também mobilizou discípulos de Galileu, como Vincenzo Viviani (SILVA; GARCIA, 2021).

Nesse processo de busca pelo rigor, é imperativo destacar que as primeiras demonstrações, como as de Roberval e Torricelli, não utilizaram o cálculo diferencial e integral moderno, mas sim o Método dos Indivisíveis de Cavalieri (OLIVEIRA JUNIOR, 2021). Conforme explica o autor, essa técnica permitia o cálculo de áreas e volumes através da soma de infinitas fatias ou segmentos paralelos, servindo como um elo fundamental entre a geometria clássica e o cálculo infinitesimal.

A demonstração clássica de Roberval (c. 1634) utiliza esse método de forma engenhosa através da construção de uma curva auxiliar, denominada "curva companheira" (ou senóide). O raciocínio geométrico pode ser descrito nos seguintes passos: Roberval considerou apenas meio arco da cicloide, inscrevendo-o em um retângulo cuja base é a metade do comprimento da circunferência (πr) e a altura é o diâmetro ($2r$). A "curva companheira" divide esse retângulo diagonalmente em duas partes de áreas iguais. Pelo princípio de simetria, a área sob essa curva auxiliar é exatamente a metade da área do retângulo (πr^2). Aplicando o Princípio de Cavalieri, Roberval demonstrou que a área compreendida *entre* a cicloide e a curva companheira é equivalente à área do semicírculo gerador ($\frac{1}{2}\pi r^2$). Ao somar a área sob a companheira com a área do semicírculo, concluiu-se que a área total sob a cicloide é $3\pi r^2$, validando matematicamente a inferência física de Galileu.

As demonstrações formais para a área da cicloide surgiram de forma independente e quase simultânea por volta de 1634. Gilles de Roberval conseguiu provar analiticamente o que Galileu havia apenas inferido por meios físicos, confirmando que a área sob um arco de cicloide é exatamente o triplo da área do círculo gerador (OLIVEIRA JUNIOR, 2021). No entanto, o hábito de Roberval de manter as suas descobertas em segredo para as utilizar em desafios acadêmicos permitiu que outros matemáticos, como Evangelista Torricelli, chegassem ao mesmo resultado de forma independente (OLIVEIRA JUNIOR, 2021).

A publicação desse resultado por Torricelli, em 1644, gerou uma acusação de plágio por parte de Roberval, evidenciando o clima de competição que permeava a comunidade científica europeia. Esse conflito, que consolidou a cicloide como o "pomo da discórdia" acadêmico, foi alimentado por uma cultura de segredo que, segundo Silva (2022), acabou por atrasar a validação coletiva do conhecimento em prol do prestígio da autoria e da hegemonia de novos métodos matemáticos (Santos, 2022).

Posteriormente, Blaise Pascal, que se referia à curva como 'La Roulette' devido à natureza do seu movimento de rolamento, ampliou ainda mais o horizonte dessas investigações. Ele não se limitou ao estudo da área, avançando para problemas de maior complexidade como a determinação de centros de gravidade e o cálculo de volumes de sólidos de revolução

(CASTRO, 2014). Conforme aponta a literatura recente, Pascal lançou um concurso público em 1658, cujo objetivo era premiar quem apresentasse as soluções mais precisas para o cálculo desses volumes e centros de massa, o que atraiu a atenção de mentes como Christopher Wren e Christiaan Huygens (CASTRO, 2014). Essa mudança de foco para a volumetria e a estática demonstrou que a cicloide possuía propriedades matemáticas muito mais ricas do que as curvas cônicas tradicionais, atuando como o principal combustível para o desenvolvimento das técnicas que viriam a ser formalizadas no cálculo diferencial e integral moderno.

2.3 Propriedades Físicas e Cinemáticas: Tautocronia e Braquistócrona

O movimento da cicloide de um objeto de especulação geométrica para uma ferramenta central da física teórica consolidou-se com a descoberta de suas propriedades cinemáticas fundamentais. De acordo com Silva (2022), esta curva define-se pelo movimento de um ponto vinculado a uma circunferência que rola sobre uma reta, posicionando-se como protagonista no estudo das trajetórias dinâmicas e do comportamento de corpos sob a ação da gravidade. Neste contexto, a primeira dessas propriedades, a tautocronia, foi formalizada por Christiaan Huygens em 1659. Conforme explicam Firmino, Borges e Coelho (2020), o termo designa a característica de que o tempo de queda de um corpo que desliza sem atrito ao longo de um arco de cicloide invertido é independente da sua posição inicial.

Embora Galileu tenha descoberto o isocronismo do pêndulo circular, as suas conclusões estavam parcialmente incorretas para grandes amplitudes. Em contraste, a cicloide revela-se como a única curva onde o período de oscilação é rigorosamente constante, independentemente da altura de onde o objeto é solto. Essa propriedade diferencia o conhecimento empírico de Galileu do rigor geométrico de Huygens (SILVA; GARCIA, 2021).

Somado a esse conceito, a cicloide resolve o problema da braquistócrona, proposto por Johann Bernoulli em 1696. O desafio consistia em determinar qual curva permitiria a um corpo deslocar-se entre dois pontos no menor tempo possível. Para Santos (2022) enfatiza que a solução para a braquistócrona não é intuitiva; embora a linha reta represente a menor distância geométrica entre dois pontos, a aceleração ganha pela partícula ao descer a curvatura inicial da cicloide compensa o trajeto mais longo em comparação com a hipotenusa de um triângulo retângulo. Este problema atuou como um divisor de águas na história da ciência, separando a geometria estática da análise dinâmica.

Historicamente, a resolução deste desafio, que contou com a participação de mentes como Isaac Newton e Gottfried Leibniz, marcou o nascimento do Cálculo Variacional. Diferente dos métodos comuns de máximos e mínimos de funções simples, a resolução exigiu a análise de funcionais, ou seja, funções de funções. De acordo com Firmino, Borges e Coelho (2020), a cicloide foi o objeto que forçou os matemáticos a pensarem em como minimizar uma integral, fundamentando as bases teóricas desta nova área da matemática. Nesse contexto, segundo Silva (2022), a braquistócrona representou o ponto de viragem onde a cicloide deixou de ser o centro das disputas da geometria clássica para se tornar a precursora da física matemática moderna, encerrando o percurso histórico necessário para as parametrizações que serão detalhadas a seguir.

2.3.1 A Braquistócrona (A Curva do Tempo Mínimo)

O termo *Braquistócrona* origina-se do grego *brachistos* (o mais curto) e *chronos* (tempo). O problema, proposto por Johann Bernoulli em 1696, desafiava a comunidade científica a encontrar a trajetória pela qual uma partícula, sujeita apenas à gravidade, deslizaria de um ponto *A* a um ponto *B* no menor tempo possível. De acordo com Firmino, Borges e Coelho (2020), este desafio foi um marco na história da matemática, pois exigiu o desenvolvimento de novos métodos que deram origem ao Cálculo Variacional.

No contexto do Ensino Médio, este problema é ideal para confrontar o senso comum. A intuição geométrica dos alunos tende a sugerir a linha reta, pois esta representa a menor *distância* entre dois pontos. No entanto, a análise física demonstra que a reta não oferece o menor *tempo*. Conforme explica Silva (2022), a geometria da cicloide invertida permite que a partícula converta energia potencial em cinética de forma extremamente eficiente. Santos (2022) reforça que, embora seja contraintuitivo que um trajeto mais longo resulte num tempo menor, a aceleração ganha na descida íngreme da cicloide compensa a distância extra, superando qualquer outra trajetória, inclusive a retilínea.

2.3.2 A Tautócrona (A Curva do Mesmo Tempo)

A segunda propriedade, descoberta por Christiaan Huygens em 1659, é a Tautócrona (*tauto* = mesmo). Ela afirma que o tempo necessário para um objeto deslizar até o ponto mais baixo de uma cicloide invertida é independente da altura inicial de onde foi solto. Segundo Cordeiro (2013), Huygens utilizou essa descoberta para aperfeiçoar relógios de pêndulo (pêndulos cicloidais), buscando um período de oscilação constante (isocronismo) que não dependesse da amplitude do balanço.

Essa característica revela um fenômeno contraintuitivo: independentemente de uma esfera estar no topo e a outra próxima ao final, ambas atingem o ponto de mínimo exatamente no mesmo instante. Conforme fundamentado por Silva (2022), essa propriedade demonstra que a maior distância percorrida por um objeto solto de um ponto mais alto é compensada por uma aceleração proporcionalmente maior devido à declividade da curva. Dessa forma, a cicloide revela-se como a única curva onde o período de oscilação é rigorosamente constante, diferenciando o rigor geométrico de Huygens do conhecimento empírico de Galileu (SILVA; GARCIA, 2021).

3 CONSTRUÇÃO E PROCESSO DE PARAMETRIZAÇÃO DA CURVA CICLOIDE

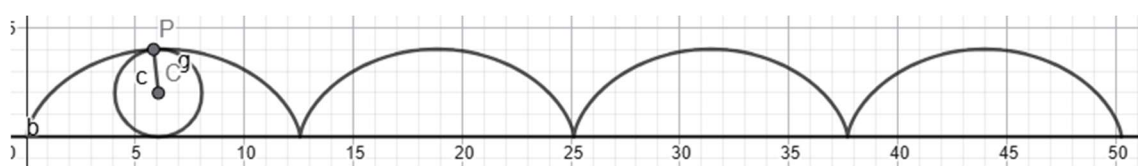
A transição da geometria clássica para a análise moderna da cicloide fundamenta-se na construção de um modelo paramétrico. Conforme reflete Cidrim (2022), a parametrização não deve ser encarada meramente como um artifício de cálculo, mas como uma estratégia metodológica essencial para descrever curvas geradas por movimentos compostos, as quais seriam impossíveis ou extremamente complexas de serem representadas por uma função cartesiana simples do tipo $y = f(x)$. Nesse contexto, a cicloide define-se como o lugar geométrico descrito por um ponto fixo *P* na borda de um círculo de raio *r*, denominado círculo gerador, enquanto este rola sem deslizar ao longo de uma reta fixa.

3.1 Dedução Geométrica e Analítica das Equações

Para formalizar matematicamente este movimento, adota-se o sistema de coordenadas cartesianas, posicionando a reta fixa sobre o eixo das abscissas (eixo x) e considerando que, no instante inicial $t = 0$, o ponto P coincide com a origem $(0,0)$. A variável fundamental para a descrição deste fenômeno não é o tempo ou a distância horizontal isolada, mas sim o ângulo de rotação θ (medido em radianos), que atua como o parâmetro de ligação entre a translação e a rotação.

Segundo a descrição técnica de Amorim (2018), o princípio físico do "rolamento sem deslizamento" impõe uma condição geométrica rigorosa: a distância linear percorrida pelo centro do círculo deve ser estritamente igual ao comprimento do arco de circunferência que entrou em contato com o solo.

Figura 2 – Relação entre o arco de rolamento e o deslocamento linear na cicloide.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Segundo Stewart (2013, p. 579) demonstra que, se o círculo girou um ângulo θ , o comprimento do arco correspondente é dado por $s = r\theta$. Consequentemente, a coordenada horizontal do centro C do círculo deslocou-se exatamente essa distância a partir da origem. Como o centro mantém-se sempre a uma altura constante equivalente ao raio, as coordenadas do centro em função do parâmetro são definidas por:

$$C(\theta) = (r\theta, r)$$

A determinação das coordenadas do ponto $P(x, y)$ exige a análise vetorial do movimento. Observa-se que a posição de P pode ser descrita subtraindo-se ou somando-se as projeções do raio rotacionado às coordenadas do centro.

Análise da Coordenada Horizontal (x):

Geometricamente, o ponto P encontra-se "atrás" ou "à frente" da linha vertical que passa pelo centro C , dependendo do quadrante da rotação. Conforme detalha Amorim (2018), a distância horizontal entre o ponto P e a linha central é dada pelo cateto oposto ao ângulo θ no triângulo retângulo formado pelo raio, ou seja, $r \cdot \sin(\theta)$. Como o movimento de translação avança para a direita (sentido positivo de x), e a rotação inicial projeta o ponto P para a esquerda em relação ao centro, a coordenada final é a diferença entre o deslocamento do centro e essa projeção:

$$\begin{aligned} x &= x_C - r \cdot \sin(\theta) \\ x &= r\theta - r \cdot \sin(\theta) \end{aligned}$$

Fatorando o raio r , obtém-se a primeira equação paramétrica:

$$x = r(\theta - \sin(\theta)) \quad (1)$$

Análise da Coordenada Vertical (y):

Para a ordenada, a análise foca na altura do ponto em relação ao solo. O centro C está a uma altura fixa r . A posição vertical de P em relação ao centro é dada pelo cateto adjacente ao ângulo θ , ou seja, $r \cdot \cos(\theta)$

Conforme Stewart (2013) explica que a altura final y é a altura do centro subtraída dessa componente vertical do raio. Assim:

$$\begin{aligned} y &= y_c - r \cdot \cos(\theta) \\ y &= r - r \cdot \cos(\theta) \end{aligned}$$

Fatorando novamente o termo comum, chega-se à segunda equação:

$$y = r(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

Essas equações (1) e (2) constituem a parametrização completa da cicloide. A esse respeito Cidrim (2022) ressalta que a beleza desta modelagem reside na sua capacidade de prever o comportamento cíclico da curva: sempre que θ é um múltiplo inteiro de 2π , o termo $(1 - \cos\theta)$ anula-se, fazendo com que $y = 0$, o que corresponde aos pontos de cúspide onde a curva toca o eixo x e inverte a concavidade.

3.2 Propriedades Métricas e a Aplicação do Cálculo Integral

A parametrização estabelecida permite que propriedades fundamentais da cicloide, como a área sob a curva e o comprimento do seu arco, sejam determinadas com o rigor analítico do cálculo integral. Conforme discute Cidrim (2022), a transição da representação geométrica para a integral definida é um passo metodológico crucial que permite validar visualmente o que a álgebra propõe.

3.2.1 Determinação da Área sob um Arco de Cicloide

O cálculo da área A de uma região limitada por uma curva paramétrica requer a adaptação da integral definida convencional. Utilizando a fundamentação de Stewart (2013), a área sob um arco da cicloide, para o intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, é definida pela integral da altura y em relação ao deslocamento horizontal x :

$$A = \int_a^b y, dx$$

Para realizar a integração em termos do parâmetro θ , utiliza-se a regra da substituição, onde $y = r(1 - \cos\theta)$ e o diferencial dx é obtido pela derivada de x em relação a θ :

$$dx = r(1 - \cos\theta)d\theta$$

Substituindo esses termos na integral, o desenvolvimento demonstrado por Stewart (2013) revela:

$$A = \int_0^{2\pi} r(1 - \cos\theta) \cdot r(1 - \cos\theta)d\theta$$

$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos\theta)^2 d\theta$$

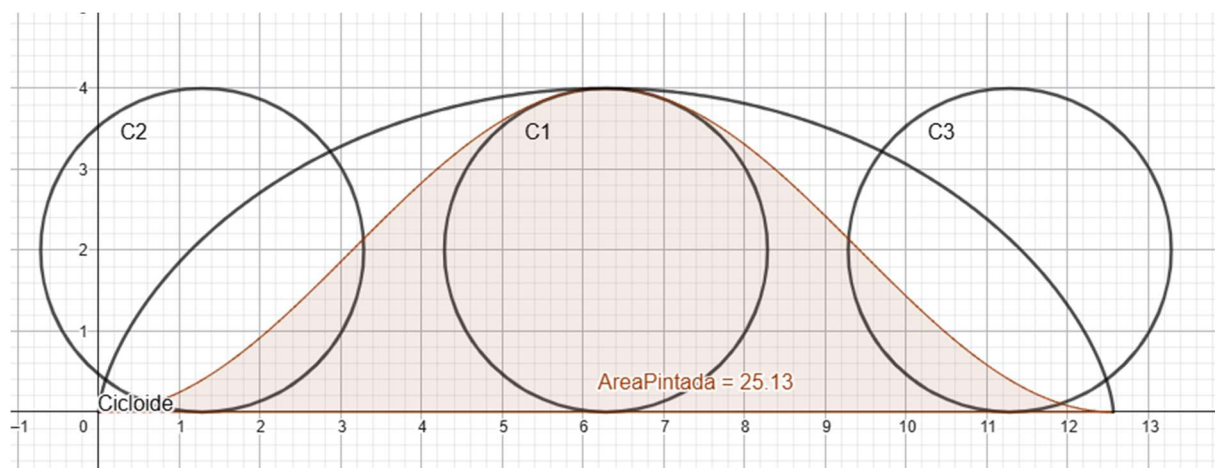
$$A = r^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$$

Ao aplicar a identidade trigonométrica $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$ e realizar a integração de cada termo, obtém-se o resultado notável:

$$A = 3\pi r^2 \quad (3)$$

De acordo com Amorim (2018), este resultado prova analiticamente que a área sob um arco completo da cicloide corresponde exatamente ao triplo da área do círculo gerador, um fato que, embora demonstrado via cálculo, ganha contornos de experimentação prática quando simulado no software GeoGebra.

Figura 3 – Demonstração da área sob um arco de cicloide e comparação com o círculo gerador no software GeoGebra.



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

3.2.2 Comprimento do Arco da Cicloide

Outra propriedade de grande relevância é o comprimento total L de um arco da curva. Para curvas definidas parametricamente, Sob esta visão Stewart (2013) define o comprimento como a integral da norma do vetor velocidade:

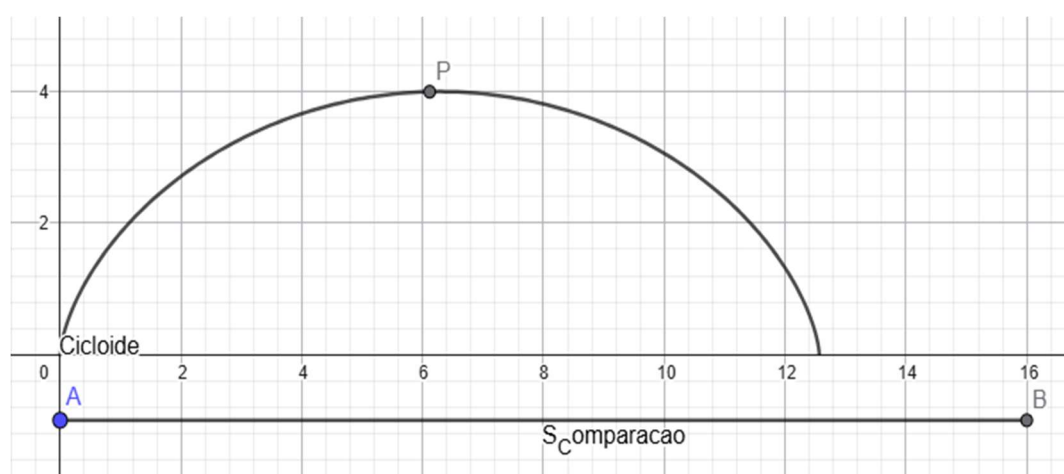
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Substituindo as derivadas $\frac{dx}{d\theta} = r(1 - \cos\theta)$ e $\frac{dy}{d\theta} = r \cdot \sin\theta$, e aplicando a identidade fundamental da trigonometria ($\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$), a expressão simplifica-se para uma integral que resulta em:

$$L = 8r \quad (4)$$

Este valor inteiro e simples (8 vezes o raio) demonstra a elegância matemática da cicloide. Como ressalta Cidrim (2022), a obtenção de resultados tão exatos por meio do cálculo integral serve de motivação pedagógica, unindo o rigor analítico à beleza geométrica da curva.

Figura 4 – Representação da retificação do arco da cicloide para $r = 2$. O segmento retilíneo inferior ilustra o comprimento total da curva ($L = 8r = 16$).



Fonte: Elaborado pelo autor (2026).

4 Modelagem Computacional da Cicloide no GeoGebra

A modelagem computacional da cicloide foi realizada com o auxílio do software **GeoGebra Classic**, ferramenta que, segundo Firmino, Borges e Coelho (2019), propicia uma integração entre álgebra e geometria que facilita a compreensão de curvas paramétricas complexas.

A fim de que o presente trabalho possa também auxiliar como um Objeto Digital de Aprendizagem (ODA), o leitor poderá:

- Acessar o aplicativo **GeoGebra Classic** instalado no computador ou dispositivo móvel; ou
- Utilizar a versão online disponível no endereço eletrônico: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt_PT

Recomenda-se a utilização da visualização “**Geometria**” ou “**Gráfico**”, que permite a inserção simultânea de objetos algébricos e construções geométricas dinâmicas.

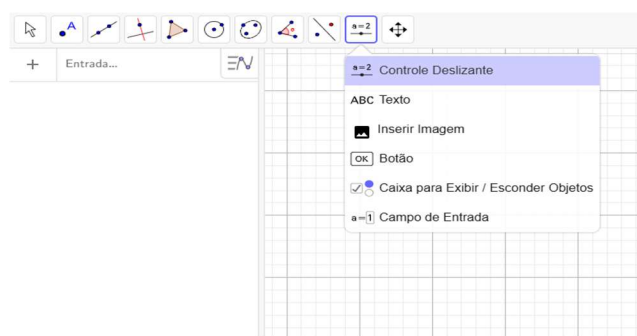
O objetivo desta etapa consiste em transpor a dedução analítica apresentada no Capítulo 3 para um ambiente de geometria dinâmica, evidenciando a correspondência entre parametrização matemática e representação geométrica.

4.1 Criação do Parâmetro Angular

A construção inicia-se com a definição de um controle deslizante representando o parâmetro angular da cicloide, denotado por a , equivalente ao ângulo θ utilizado na dedução teórica.

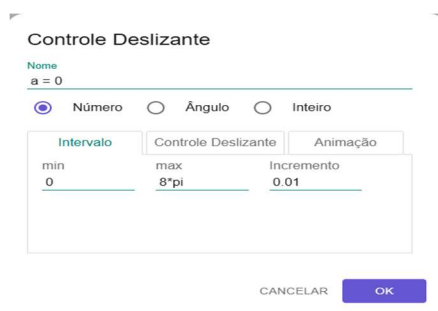
No GeoGebra, seleciona-se a ferramenta **Controle Deslizante** e define-se:

Figura 5 – Seleção da ferramenta "Controle Deslizante" na barra de ferramentas do GeoGebra.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Figura 6 – Janela de configuração do parâmetro a ($a, 0 \leq a \leq 8\pi$ e 0.01).



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

- Nome: a
- Intervalo: $0 \leq a \leq 8\pi$
- Incremento: 0,01

O parâmetro a constitui a variável fundamental da modelagem, pois governa simultaneamente:

- a rotação do círculo gerador;

- o deslocamento horizontal do seu centro;
- a posição do ponto gerador da curva.

O intervalo máximo 8π permite a visualização de quatro arcos completos da cicloide, uma vez que cada arco corresponde a uma variação angular de 2π .

4.2 Definição do Raio do Círculo Gerador

Em seguida, define-se o raio do círculo por meio do comando:

$$r = 2$$

O valor de r pode ser alterado conforme o interesse da análise, pois todas as propriedades métricas da cicloide como altura máxima, comprimento do arco e área sob a curva dependem diretamente desse parâmetro.

Figura 7 – Definição da variável de raio $r = 2$ na Janela de Álgebra.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

4.3 Implementação da Condição de Rolamento Sem Deslizamento

Com base na relação geométrica estabelecida no Capítulo 3, sabe-se que o rolamento sem deslizamento impõe que a distância linear percorrida pelo centro do círculo seja igual ao comprimento do arco correspondente, isto é:

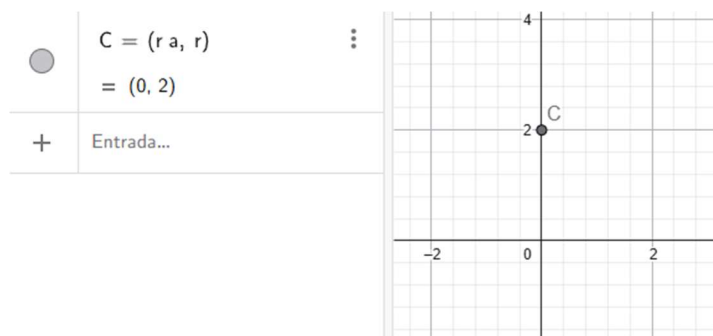
$$s = r\theta$$

No ambiente do GeoGebra, essa condição é implementada por meio da definição do ponto centro:

$$C = (ra, r)$$

Dessa forma:

Figura 8 – Entrada algébrica e localização do centro C no plano cartesiano.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

- A coordenada horizontal do centro é $x_C = ra$, representando o deslocamento linear.
- A coordenada vertical é constante e igual a r , pois o círculo permanece apoiado sobre o eixo horizontal.

Essa etapa assegura a fidelidade física do modelo ao princípio do rolamento puro.

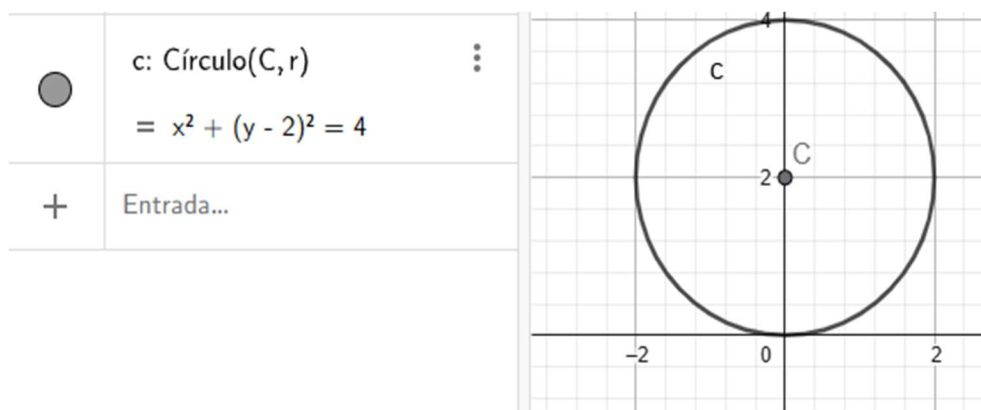
4.4 Construção do Círculo Gerador

A partir do ponto C , constrói-se o círculo por meio do comando:

$$\text{Círculo}(C, r)$$

Essa construção materializa o elemento geométrico responsável pela geração da cicloide, estabelecendo a base visual do movimento composto.

Figura 9 – Representação geométrica da circunferência c com centro em C e raio r .



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

4.5 Implementação das Equações Paramétricas

O ponto gerador da cicloide é então definido diretamente pelas equações paramétricas deduzidas no Capítulo 3:

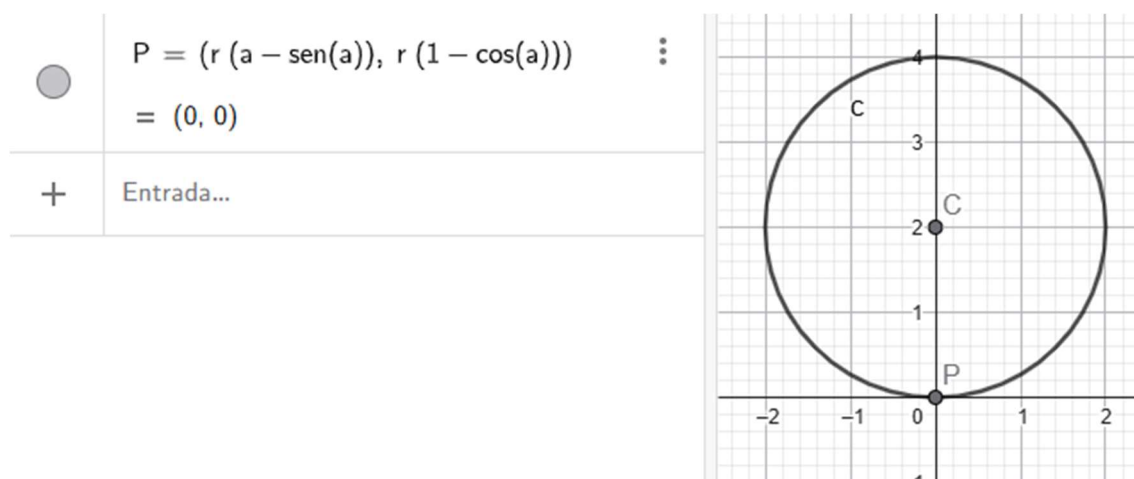
$$x = r(a - \sin a)$$

$$y = r(1 - \cos a)$$

No GeoGebra, essas expressões são inseridas por meio desse comando:

$$P = (r*(a - \sin(a)), r*(1 - \cos(a)))$$

Figura 10 – Inserção das coordenadas paramétricas do ponto P vinculadas ao deslizador a .



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

À medida que o parâmetro a varia, o ponto P descreve a trajetória cicloidial, evidenciando computacionalmente a validade da modelagem analítica. A coordenada horizontal resulta da diferença entre o deslocamento do centro e a projeção horizontal do raio rotacionado. A coordenada vertical corresponde à diferença entre a altura do centro e a projeção vertical do mesmo raio. Assim, observa-se claramente a decomposição vetorial do movimento de rotação e translação.

4.6 Elementos Auxiliares para Organização Visual

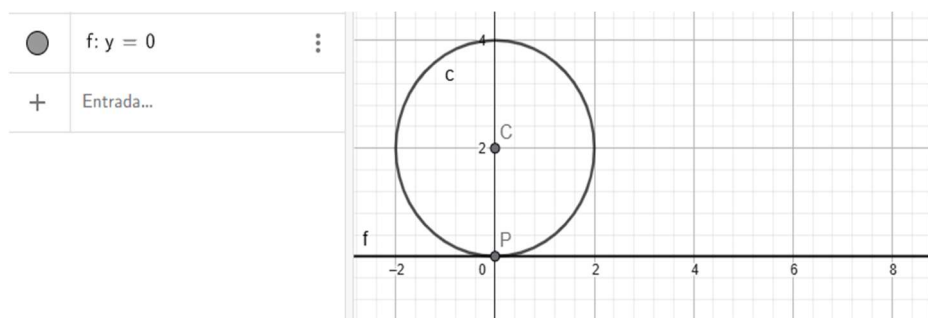
Com o objetivo de tornar a construção mais clara e didaticamente organizada, podem ser adicionados elementos geométricos auxiliares que não alteram a modelagem matemática, mas aprimoram sua visualização.

4.6.1 Construção da Reta de Apoio

Para representar explicitamente a superfície sobre a qual o círculo realiza o rolamento, pode-se inserir a reta horizontal por meio do comando:

$$y = 0$$

Figura 11 – Criação da reta $f: y = 0$ representando o solo do movimento.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

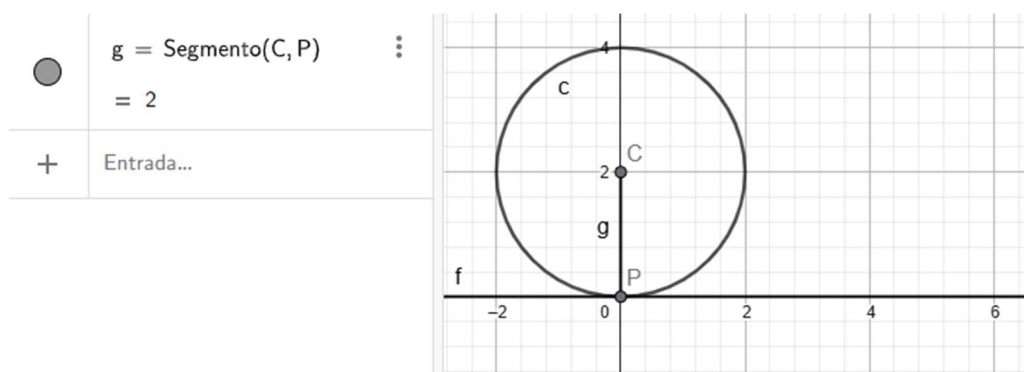
Essa reta corresponde ao eixo das abscissas e simboliza o solo sobre o qual ocorre o movimento. Sua inclusão reforça visualmente a interpretação física do fenômeno.

4.6.2 Construção do Raio em Movimento

Para evidenciar a decomposição vetorial responsável pela geração da cicloide, pode-se construir o segmento que liga o centro do círculo ao ponto gerador da curva. Para isso, utiliza-se o comando:

$$\text{Segmento}(C, P)$$

Figura 12 – Segmento g conectando o centro C ao ponto P para evidenciar a rotação.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Esse segmento representa o raio rotacionado e permite observar, de forma dinâmica, como suas projeções horizontal e vertical estão diretamente relacionadas às funções trigonométricas presentes nas equações paramétricas. A presença desse elemento facilita a compreensão da origem dos termos $\sin a$ e $\cos a$ na parametrização.

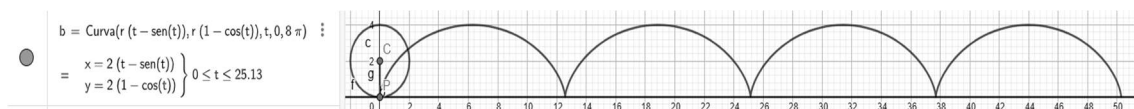
4.7 Representação Formal da Curva Sem Utilização de Rastro

Embora seja possível ativar o recurso de rastro do ponto P para visualizar a trajetória descrita, esse método pode gerar sobreposição excessiva de traços, dificultando a análise precisa da curva.

Para obter uma representação matemática limpa e independente, recomenda-se utilizar o comando:

$$\text{Curva}(r * (t - \text{sen}(t)), r * (1 - \text{cos}(t)), t, 0, 8\pi)$$

Figura 13 – Utilização do comando *Curva* para traçar os quatro arcos no intervalo $[0, 8\pi]$.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

Esse procedimento constrói diretamente o lugar geométrico correspondente a um arco completo da cicloide, no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$.

Como:

$$8\pi = 4 \cdot 2\pi ,$$

o intervalo adotado permite a visualização sequencial de quatro períodos da curva, evidenciando seu caráter periódico ao longo do eixo horizontal.

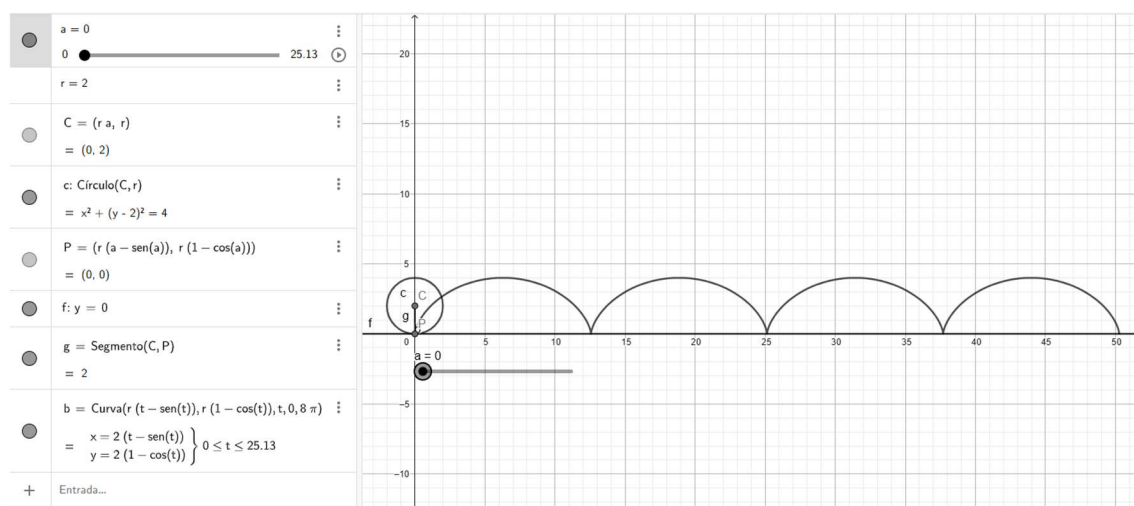
Diferentemente do rastro, essa abordagem produz um objeto algébrico formal, permitindo:

- melhor definição gráfica;
- possibilidade de análises métricas posteriores;
- integração com cálculos de área e comprimento.

Assim, a curva deixa de ser apenas resultado visual do movimento.

4.8 Resultado da Modelagem Computacional

Figura 14 – Visão consolidada da construção, integrando a Janela de Álgebra e a Janela de Visualização.



Fonte: Elaborada pelo autor (2026).

A modelagem confirma visualmente a correspondência entre a parametrização deduzida no Capítulo 3 e sua representação geométrica. Observa-se que, à medida que o parâmetro angular varia, o centro do círculo desloca-se linearmente ao longo do eixo horizontal, enquanto o ponto gerador descreve sucessivos arcos cicloidais.

A escolha do intervalo 8π permite a visualização de quatro arcos completos da curva, evidenciando seu comportamento periódico. Cada arco corresponde a uma variação angular de 2π , momento em que o ponto retorna ao eixo das abscissas, formando as cúspides características da cicloide.

4.9 Acesso à Construção Interativa

A construção dinâmica utilizada neste trabalho encontra-se disponível para acesso e manipulação no ambiente online do GeoGebra, por meio do link:

Figura 15 – Acesso digital ao ODA.



Disponível em: <https://www.geogebra.org/classic/fruyuuvsv>

O acesso permite ao leitor interagir com os parâmetros e observar em tempo real a geração da curva cicloide.

5 Metodologia

A presente pesquisa caracteriza-se como um estudo de natureza qualitativa e de cunho bibliográfico (GIL, 1991). De acordo com o autor, este tipo de delineamento é elaborado a partir de material já publicado, o que permite o exame de um tema sob novos enfoques ou abordagens. No presente trabalho, tal técnica encontra-se articulada com a modelagem computacional. A escolha por essa abordagem mista justifica-se pela necessidade de investigar a curva cicloide sob duas perspectivas complementares: a fundamentação teórica rigorosa e a verificação empírica através da tecnologia.

O percurso metodológico foi estruturado para conectar a gênese histórica da curva e sua construção matemática formal com a prática de visualização digital. Tal perspectiva metodológica encontra respaldo em pesquisas recentes de Educação Matemática, como as de Cidrim (2022) e Amorim (2018), que defendem a modelagem em *softwares* de geometria dinâmica como um ambiente propício para a investigação científica, permitindo transformar conceitos abstratos do Cálculo em objetos visuais manipuláveis.

5.1 Procedimentos de Pesquisa

O levantamento bibliográfico foi realizado em bases de dados acadêmicas (como Google Acadêmico e Periódicos CAPES) e bibliotecas virtuais. Para a seleção dos materiais, foram utilizados descritores específicos e combinações de palavras-chave, tais como: "história da matemática", "curva cicloide", "parametrização de curvas cicloides" e "utilização do GeoGebra para cicloide".

Priorizou-se a seleção de produções recentes (preferencialmente dos últimos 5 a 10 anos) para garantir a atualização do tema e o diálogo com as demandas contemporâneas do ensino. O trabalho foi organizado em três fases distintas, fundamentadas nos seguintes referenciais:

5.1.1 Levantamento Histórico e Conceitual (Fase 1)

Para a construção da narrativa histórica sobre a cicloide e a evolução das curvas mecânicas, a pesquisa baseou-se em produções acadêmicas que revisitam esses conceitos sob uma ótica pedagógica. Foram fundamentais as contribuições de Silva e Garcia (2021) e Santos (2022), que forneceram o contexto sobre a descoberta e as propriedades iniciais da curva. Complementarmente, utilizou-se o trabalho de Firmino, Borges e Coelho (2020) para aprofundar a discussão sobre os aspectos históricos e epistemológicos que envolvem a cicloide na formação matemática.

5.1.2 Fundamentação Matemática e Parametrização (Fase 2)

Nesta etapa, buscou-se o rigor analítico para a dedução das equações paramétricas e o estudo das propriedades métricas. A base primária para o Cálculo Diferencial e Integral foi a obra de Stewart (2013). No entanto, para a abordagem didática e a construção do raciocínio matemático por trás da parametrização, a pesquisa apoiou-se nos estudos de Cidrim (2022) e Amorim (2018), que discutem formas de tornar esses conceitos acessíveis.

5.1.3 Modelagem Computacional e Aplicações (Fase 3)

A validação prática dos conceitos teóricos foi realizada através da modelagem computacional. Esta etapa permitiu a visualização do rolamento sem deslizamento, correlacionando as equações de Stewart com a representação gráfica dinâmica. Para estruturar essa análise e discutir aplicações físicas como a Braquistócrona, utilizou-se o suporte de Cordeiro (2013), que contextualiza os problemas físicos clássicos relacionados com o tempo mínimo de descida e com o isocronismo das oscilações, e a proposta metodológica de Silva (2022), que fundamenta o uso do GeoGebra como ferramenta de exploração didática.

5.4 Tratamento e Análise de Dados

A análise dos dados seguiu uma abordagem qualitativa interpretativa apoiada em Gil (1991), que define este processo como a atribuição de significados às descobertas em relação ao contexto do estudo, baseada na triangulação entre a teoria matemática, o contexto histórico e a simulação computacional. Não se utilizou tratamento estatístico, pois o foco da pesquisa é a compreensão conceitual e não a mensuração numérica.

O procedimento analítico consistiu em confrontar os resultados algébricos obtidos via cálculo integral baseados em Stewart (2013) com os comportamentos gráficos observados na tela do computador. Considerou-se o modelo validado quando a construção no GeoGebra baseada em Silva (2022) reproduziu fielmente as propriedades métricas e cinemáticas descritas na literatura histórica de Cordeiro (2013) e Santos (2022), confirmando o potencial da ferramenta para facilitar a mediação do conhecimento e a visualização de conceitos abstratos.

Definido o percurso metodológico e as ferramentas de validação, a pesquisa avança para a aplicação prática desses conceitos. A metodologia aqui descrita, que entrelaça a revisão histórica com a experimentação digital, servirá de alicerce para a exploração das propriedades físicas mais célebres da cicloide: a Braquistócrona e a Tautócrona. O objetivo é demonstrar no capítulo a seguir como a modelagem computacional pode facilitar a compreensão desses fenômenos complexos.

6 APLICAÇÕES DIDÁTICAS E EXPLORAÇÃO MATEMÁTICA

A construção da cicloide no GeoGebra, detalhada no capítulo anterior, não se encerra na visualização estática da curva. Ela constitui-se como um objeto de aprendizagem dinâmico que permite a exploração de conceitos matemáticos fundamentais e a verificação de propriedades físicas complexas.

Conforme destaca Silva (2022), a utilização de softwares de geometria dinâmica possibilita que o estudante transite entre a representação algébrica e a geométrica, transformando o computador em um laboratório de investigação matemática. Neste ambiente, as equações deixam de ser abstrações e tornam-se comportamentos visuais observáveis.

6.1 Exploração das Propriedades Geométricas e Trigonométricas

A construção da cicloide permite a exploração de conceitos fundamentais para a Educação Básica, visto que sua estrutura geométrica fundamenta-se em temas do currículo do Ensino Médio, tais como a trigonometria do triângulo retângulo, as funções circulares, o conceito de radianos e a simetria de translação e rotação. Nesse contexto, Silva (2022)

argumenta que a modelagem em ambientes de geometria dinâmica permite que o aluno visualize a conexão entre esses temas, que muitas vezes são ensinados de forma desarticulada.

Dessa forma, o modelo construído no software atua como um facilitador didático, permitindo que o estudante visualize a aplicação prática desses conteúdos em um contexto de modelagem. Ainda segundo Silva (2022), essa abordagem tecnológica favorece a percepção de que as fórmulas trigonométricas são descrições de movimentos reais, e não apenas abstrações teóricas. A seguir, apresentam-se três abordagens matemáticas essenciais que podem ser trabalhadas em sala de aula a partir do modelo construído.

6.1.1 Periodicidade e a Relação com o Círculo Gerador

Ao manipular o parâmetro angular na construção, o aluno visualiza a repetição dos arcos da cicloide. O professor pode instigar os estudantes a observarem quantos giros completos o círculo realiza para desenhar um arco completo.

A construção demonstra visualmente que cada arco corresponde a exatamente uma volta completa (2π radianos) do círculo gerador. Isso solidifica o conceito de periodicidade das funções trigonométricas, um dos pilares do currículo de matemática do Ensino Médio, mostrando que após um ciclo de 360° , o padrão de movimento se repete, gerando uma nova cópia da curva idêntica à anterior.

6.1.2 Verificação das Proporções Métricas

Utilizando a ferramenta de medição ou os controles deslizantes do raio r , é possível verificar experimentalmente as dimensões da curva, validando as fórmulas geométricas deduzidas teoricamente.

O modelo permite constatar que a altura máxima de cada arco é sempre igual ao diâmetro do círculo ($2r$). Da mesma forma, ao medir a distância horizontal entre o início e o fim de um arco, o aluno encontra o valor de $2\pi r$. Essa validação empírica reforça a confiança do estudante nas relações métricas, transformando fórmulas abstratas em medidas concretas observáveis na tela. Dessa forma, o software atua na transposição de conceitos da geometria plana para uma base experimental.

6.1.3 Relação entre Rotação e Translação

Um dos conceitos mais abstratos para alunos do Ensino Médio é a relação entre o comprimento da circunferência ($C = 2\pi r$) e a distância linear percorrida por uma roda. A cicloide oferece a prova visual definitiva para esse conceito.

Ao "desenrolar" uma volta completa do círculo sobre o eixo horizontal, a base do arco gerado corresponde exatamente ao perímetro do círculo retificado. Segundo Silva (2022), essa visualização permite desmistificar a fórmula do comprimento da circunferência: o aluno compreende que o número irracional π não é apenas uma constante teórica, mas uma proporção física que conecta o movimento angular (rotação) ao movimento linear (translação). Essa abordagem facilita o ensino de grandezas e medidas, permitindo que o estudante compreenda a origem geométrica de fórmulas frequentemente decoradas de forma mecânica.

7 Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo investigar a curva cicloide sob uma perspectiva que integrasse a evolução histórica, o rigor matemático e a modelagem computacional, visando oferecer subsídios para o ensino de Matemática na Educação Básica e na formação inicial de professores. Ao percorrer esse trajeto, foi possível constatar que a cicloide não é apenas uma

"bela Helena da Geometria", como historicamente conhecida, mas um objeto de conhecimento rico e multidisciplinar.

A revisão histórica (Capítulo 2) demonstrou que o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral esteve intrinsecamente ligado aos problemas mecânicos propostos por matemáticos como Galileu, Roberval e os Johann Bernoulli. Essa contextualização revelou-se fundamental para humanizar o ensino, mostrando aos estudantes que os conceitos matemáticos surgem da necessidade de resolver problemas reais, como a busca pela trajetória que minimiza o tempo de viagem entre dois pontos (Braquistócrona) e a necessidade de construir relógios de pêndulo que mantivessem a precisão independente da amplitude da oscilação (Tautócrona), e não de abstrações isoladas.

No que tange à fundamentação matemática (Capítulo 3), a dedução das equações paramétricas e o cálculo de áreas e comprimentos, baseados em Stewart (2013), confirmaram a elegância da análise clássica. Contudo, o desenvolvimento deste trabalho evidenciou que a abordagem puramente algébrica pode ser uma barreira para a aprendizagem dos estudantes. É nesse ponto que a tecnologia se mostrou indispensável.

A construção dinâmica no GeoGebra (Capítulo 4) e suas aplicações didáticas (Capítulo 6) representam os resultados práticos alcançados por meio da fundamentação teórica e da metodologia adotadas neste estudo. A modelagem computacional permitiu transformar equações estáticas em fenômenos visuais, resultando na validação experimental das propriedades da Braquistócrona e da Tautócrona. A simulação do "rolamento sem deslizamento" comprovou que softwares de geometria dinâmica atuam como laboratórios virtuais, facilitando a visualização da transição entre o movimento circular e o linear. Conforme discutido por Silva (2022) e Cordeiro (2013), essa abordagem visual facilita a transposição didática, permitindo que alunos do Ensino Médio compreendam conceitos que, tradicionalmente, ficariam restritos ao ensino superior.

Em vista dos argumentos apresentados, que a inserção da cicloide no currículo, mediada pela tecnologia, promove um aprendizado significativo ao favorecer o desenvolvimento do pensamento lógico e da argumentação científica dos estudantes. A "Helena da Geometria" continua, séculos após sua descoberta, a desafiar a intuição e a encantar estudantes, provando que a união entre História, Matemática e Tecnologia é o caminho mais promissor para uma educação matemática crítica e investigativa. Como desdobramentos futuros, sugere-se a aplicação das simulações desenvolvidas neste trabalho em salas de aula do Ensino Médio, visando coletar dados empíricos sobre a recepção dos alunos, além de expandir o estudo para outras curvas paramétricas que possuam relevância histórica e física.

REFERENCIAS

- AMORIM, Fernando Ferreira. **Curvas Cicloidalas: Parametrização, Propriedades e Aplicações**. 2018. 79 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2018.
- CASTRO, Leonardo Miranda de. **O Cálculo Variacional e as Curvas Cicloidalas**. 2014. 85 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Exatas, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.
- CIDRIM, Deives da Silva. **Curvas Planas Parametrizadas: uma reflexão metodológica de suas aplicações**. 2022. 95 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2022.
- CORDEIRO, Ana Carolina Ferreira. **O que é a Curva Cicloide: Ideias Centrais no Ensino da Matemática**. 2013. 88 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2013.
- FIRMINO, Elias Gabriel; BORGES, Igor de Assis; COELHO, Lucinda Maria de Fátima Rodrigues. CICLOIDE: uma abordagem sobre as propriedades tautócrona e braquistócrona. **RELIMAT - Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática**, Franca, v. 4, n. 1, p. 115-131, 2020. Disponível em: <http://periodicos.unifacf.com.br/RELIMAT/article/view/1886>. Acesso em: 9 fev. 2026.
- GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1991.
- SALES, Josep; BANYULS, Francesc. **Curvas peligrosas: elipses, hipérbolas y otras maravillas geométricas**. Barcelona: RBA Coleccionables, 2010.
- SANTOS, Luan Leite dos. **A Cicloide: Breve Histórico e Estudo da Braquistócrona**. 2022. 45 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia) – Centro Multidisciplinar de Pau dos Ferros, Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Pau dos Ferros, 2022.
- SILVA, Jefferson Marinho da. **Uma abordagem da cicloide: "a Helena da Geometria"**. 2022. 35 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Campus Maceió, Instituto Federal de Alagoas, Maceió, 2022.
- SILVA, Nathan Rodrigues da; GARCIA, Antônio Ronaldo G. **Parametrização da curva cicloide e suas aplicações**. 2021. 31 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência e Tecnologia) – Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2021.
- STEWART, James. **Cálculo, volume 2**. Tradução de EZ2Translate. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.