INSTITUTO FEDERAL
Pernambuco

LEI DOS COSSENOS, LEI DOS SENOS E HISTÓRIA DA TRIGONOMETRIA: Demonstrações e aplicações

Ícaro Rafael Da Silva Ramalho
icarorafael1010@gmail.com
Airlan Arnaldo Nascimento de Lima
airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

A motivação para a realização do presente trabalho surge a partir da perspectiva segundo a qual o ensino de Matemática pode ser enriquecido através de abordagens que incluam contextos históricos e aplicações. Desta forma, nosso objetivo foi estudar as Leis dos Senos e dos Cossenos, incluindo elementos históricos sobre o desenvolvimento da trigonometria, demonstrações e algumas aplicações. Como fruto de uma pesquisa de natureza bibliográfica, produzimos um texto de caráter elementar, acessível a professores e alunos da Educação Básica e com potencial para incentivar estudos e reflexões sobre conceitos da Trigonometria. Inicialmente, apresentamos sucintamente um estudo histórico sobre a trigonometria, desde seu desenvolvimento nas antigas civilizações, como os babilônios e os egípcios, até seus avanços na Matemática europeia. Em seguida, discutimos uma demonstração da Lei dos Cossenos e, como aplicação, demonstramos a fórmula de Heron. Posteriormente, demonstramos a Lei dos Senos, aplicando-a na resolução de um problema envolvendo distâncias desconhecidas.

Palavras-chave: Trigonometria 1. Lei dos cossenos 2. Lei dos senos 3. Aplicações 4.

Instituto Federal de Pernambuco. Campus Pesqueira. Curso Licenciatura em Matemática. 2025.

1 INTRODUÇÃO

> A trigonometria é um ramo da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Apesar de sua importância, muitas vezes é apresentada de forma simplificada e desconectada de suas aplicações práticas, limitando-se ao cálculo de razões e proporções. (REIS, 2016).

A trigonometria é uma área fundamental da matemática que estuda as relações entre os lados e ângulos de um triângulo. Seu desenvolvimento foi impulsionado por necessidades práticas em diversas áreas do conhecimento, como astronomia, navegação e engenharia. No entanto, seu ensino frequentemente se limita a cálculos abstratos, sem uma abordagem que enfatize suas aplicações concretas e sua relevância histórica (REIS, 2016).

Registros históricos evidenciam que a trigonometria foi inicialmente estudada no contexto da geometria e da astronomia, tornando-se uma disciplina independente apenas no século XIII, com o matemático persa Al-Tusi (1201–1274). Explorar sua evolução histórica possibilita compreender melhor sua importância e os contextos que motivaram seu desenvolvimento.

Entre os principais conceitos da trigonometria, destacam-se as Leis dos Senos e dos Cossenos, ferramentas essenciais para a resolução de triângulos quaisquer. A Lei dos Senos estabelece uma relação entre os lados e ângulos de um triângulo, enquanto a Lei dos Cossenos generaliza o Teorema de Pitágoras, permitindo calcular lados e ângulos em triângulos não retângulos. A compreensão dessas leis é essencial para diversas aplicações científicas e tecnológicas.

Nosso objetivo consiste em estudar as Leis dos Senos e dos Cossenos, incluindo aspectos históricos sobre o desenvolvimento da trigonometria, demonstrações e algumas aplicações. Desta forma, realizamos um estudo de natureza bibliográfica e consideramos perspectivas de diversos autores.

2 ELEMENTOS HISTÓRICOS

2.1 Primeiras manifestações

A trigonometria é uma das áreas fundamentais da matemática, fruto de com uma longa e ampla história, . Suas contribuições vêm de diversas culturas e civilizações ao longo dos séculos. No Egito Antigo[1], algumas evidências indicam que para manter a inclinação na construção das pirâmides, foi utilizada uma ideia semelhante ao que hoje chamamos de cotangente, também presente no problema 56 do Papiro de Ahmes.

[1] Por volta do ano 2325 a.C.

Segundo Boyer (1974), a trigonometria teve suas primeiras manifestações nas civilizações da Mesopotâmia e Egito, por volta de 1900 a.C. Os babilônios usavam um sistema sexagesimal que influenciou o desenvolvimento de ângulos e medidas. Já os egípcios aplicavam conhecimentos geométricos rudimentares na construção de pirâmides e em outras obras de engenharia.

Segundo Reis (2016), é possível encontrar vestígios de formas primitivas da trigonometria na China por volta de 1110 a.C., que eram utilizadas para medir distâncias, comprimentos e profundidades por meio de triângulos retângulos.

Conforme discutiremos na próxima seção, é na Grécia Antiga onde começam as grandes contribuições, incluindo o próprio termo trigonometria, que possui três radicais: *tri* de três, *gonos* de ângulo e *metron* de medir. Os cálculos relacionavam ângulos e lados de um triângulo, e também foram eles que realizaram estudos sobre o comprimento de cordas e as relações entre ângulos (ou arcos) numa circunferência.

2.2 Trigonometria na Grécia Antiga

Um dos primeiros matemáticos gregos, Tales de Mileto (625–546 a.C.), contribuiu significativamente para a trigonometria ao utilizar conceitos geométricos para medir a altura das pirâmides e a distância de navios no mar. Pitágoras (570–495 a.C.), possível pupilo de Tales, é conhecido principalmente pelo seu teorema: o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos. Isso se aplica a todos os triângulos retângulos, e esse teorema foi fundamental para a trigonometria.

> Depois de Pitágoras apareceram na história da matemática alguns matemáticos e filósofos muito importantes como: Platão (428-348 a.C.), Aristóteles (384-322 a.C.) e também Euclides que viveu por volta de 300 a.C. Este último escreveu o mais antigo trabalho matemático grego que ainda sobrevive (em sua maior parte) intacto, Os Elementos. Neste trabalho aparecem as leis de cossenos para ângulos obtusos e agudos, respectivamente enunciadas em linguagem geométrica em vez de trigonométrica. (**Reis**, 2016)

Arquimedes viveu aproximadamente entre 287 a.C. e 212 a.C. Segundo Boyer (1974), Arquimedes ficou conhecido como um dos maiores matemáticos de todos os tempos, sendo também renomado por suas engenhosidades. Ele foi uma figura fundamental no desenvolvimento da matemática, incluindo a trigonometria. Utilizou métodos geométricos que, mais tarde, seriam essenciais no desenvolvimento da trigonometria.

Arquimedes também estudou propriedades de figuras como circunferências, espirais e elipses, o que ajudou a construir uma base para o estudo das funções trigonométricas. Em seu trabalho ”Medida do Círculo”, Arquimedes aproximou o valor de π utilizando polígonos inscritos e circunscritos, cálculos que precisam de uma boa compreensão das propriedades dos ângulos e das figuras. Houve outros trabalhos como o ”Espiral de Arquimedes”e Arquimedes também trabalhou com problemas de tangentes, que envolvem conceitos fundamentais na trigonometria.

Nesta mesma época, também se destacou Apolônio de Perga, que, em uma de suas obras, demonstrou como traçar tangentes em uma cônica. Aristarco de Samos calculou a razão entre Sol-Terra e Sol-Lua observando ângulos. E Eratóstenes calculou a medida da circunferência da Terra observando o ângulo que a luz do Sol fazia em duas cidades e conhecendo a distância entre elas.

> Segundo Eves (1995), a primeira amostra documentada para o estudo da trigonometria deve-se a Hipsícles, pupilo dos povos babilônicos. Ele dividiu o zodíaco em 360 partes. Esta ideia foi aprimorada e generalizada por Hiparco (180 - 125 a.C.), pois poderia ser aplicada para qualquer círculo. Entretanto, esses escritos não chegaram até nós, porque tudo o que se sabe sobre suas realizações científicas provém de fontes indiretas. Mas, acredita-se que na segunda metade do século dois a.C. Hiparco deu um grande passo para a trigonometria. Ele acreditava que a base de contagem 60 era a mais apropriada, assim, atribuiu o nome "arco de 1 grau" para cada parte da circunferência dividida em 360 partes. Ele dividiu cada arco de 1° em 60 partes resultando no arco de 1 minuto. (**Silva**, 2021)

Segundo Boyer (2012), Hiparco de Nicéia foi considerado o pai da trigonometria por ter construído a primeira tabela de senos, chamada de tábua de cordas. Vale salientar que ele foi considerado o melhor astrônomo da época e seus trabalhos deram origem à trigonometria esférica[2].

No século II d.C., viveu Cláudio Ptolomeu, que contribuiu significativamente para a trigonometria. Em seu trabalho, o "Almagesto"(ou Syntaxis Mathematica), ele expandiu a tábua de cordas de Hiparco. Essa tabela ampliada fornece os senos dos ângulos de 0º até 90º, com incremento de 15'. Além disso, através das técnicas utilizadas para calcular os senos, fica evidente que Ptolomeu utilizou processos equivalentes a várias fórmulas aplicadas atualmente na resolução de triângulos esféricos retos[3](EVES, 2004).

2.3 Contribuições do povo Hindu

Com o tempo, o interesse dos gregos pela matemática foi enfraquecendo, enquanto na Índia surgiam muitas obras matemáticas, incluindo aplicações de vários resultados geométricas à arquitetura de templos e altares, conhecidas como Sulvasutras (regras de corda). Também surge uma sequência de obras, os Siddhantas, que, por volta de 400 d.C., teriam sido atribuídas ao deus do sol Surya. Mesmo sendo uma obra voltada para a astronomia, revolucionou a trigonometria pela maneira como relacionava cordas e ângulos centrais (EVES, 2004).

As contribuições dos hindus antigos no campo da trigonometria foram essenciais para desenvolvimento de muitas ideias modernas. Segundo Boyer (2012), os matemáticos indianos, a partir do século V d.C., começaram a introduzir conceitos e métodos

[2]Trigonometria desenvolvida sobre uma superfície esférica.
[3]Triângulo construído sobre uma superfície esférica e tem um dos ângulos internos medindo 90º.

diferentes dos gregos, especialmente com o uso de funções trigonométricas baseadas em um círculo unitário, em vez de tabelas de cordas.

Neste contexto, se destaca Aryabhata (476–550 d.C.), que escreveu o Aryabhatiya. Ele foi pioneiro na introdução da função seno (jya) e de suas tabelas associadas, marcando uma mudança significativa na forma como ângulos e relações trigonométricas eram tratados. Aryabhata também relacionou essas funções a cálculos astronômicos, permitindo previsões mais precisas de eclipses e movimentos planetários. Suas tabelas de senos tinham divisões precisas em intervalos de 3,75 graus, um avanço notável para a época (KATZ, 1998).

Brahmagupta (598–668 d.C.), autor do Brahmasphutasiddhanta, introduziu fórmulas trigonométricas mais complexas, como as relações de soma e diferença de senos. Ele também utilizou a trigonometria esférica em cálculos astronômicos, sendo um dos primeiros a usar essas técnicas na Índia, e generalizou a fórmula de Heron para triângulos equiláteros. De acordo com Boyer (2012), Brahmagupta chegou a um resultado equivalente à lei dos senos, embora fosse, claro, uma reformulação do trabalho de Ptolomeu.

Outro grande matemático hindu foi Bhaskara I (600–680 d.C.), que deu continuidade às ideias de Aryabhata. Bhaskara desenvolveu métodos de interpolação para aprimorar tabelas trigonométricas e derivou uma fórmula aproximada para o seno de um ângulo, demonstrando uma aplicação prática no cálculo de arcos menores (KATZ, 1998).

Segundo Boyer (2012), os matemáticos hindus introduziram o conceito de meia-corda (seno moderno), enquanto os gregos trabalhavam com cordas completas. Essa mudança simplificou os cálculos e abriu caminho para o desenvolvimento das funções trigonométricas modernas. Além disso, o sistema decimal indiano permitiu avanços mais rápidos na precisão dos cálculos.

A trigonometria hindu já incluía conceitos como secantes e cosecantes, preparando o terreno para as expansões trigonométricas desenvolvidas posteriormente pelos árabes e europeus. O legado dos matemáticos hindus na trigonometria é notável, principalmente por suas tabelas precisas, métodos inovadores e aplicações práticas (KATZ, 1998).

2.4 Contribuições dos povos islâmicos

Segundo Boyer (2012), o período de 650 d.C até 750 d.C foi muito importante para a matemática, pois, em grande medida, o mundo ocidental havia perdido o interesse pelas ciências e, se não fosse pelo entusiasmo islâmico, muitos outros trabalhos teriam sido perdidos. Além disso, em termos científicos, pode-se dizer que Bagdá se tornou a nova Alexandria.

O matemático persa Al-Khwarizmi (780–850) escreveu algumas obras astronômicas que, na época, costumavam envolver trigonometria. Na mesma época, houve Thabit ibn-Qurra (826–901), que, graças às suas traduções, diversas obras de Euclides, Arquimedes, Apolônio, Ptolomeu e Eutócio não foram perdidas, além de ter feito algumas contribuições na matemática e na astronomia.

> Assim como na numeração havia competição entre os sistemas de origens grega e indiana, também nos cálculos astronômicos houve a princípio na Arábia dois tipos de trigonometria — a geometria grega das cordas, como é encontrada no Almagesto, e as tabelas hindus de senos, derivadas através dos Sindhind. Aqui também, o conflito terminou com triunfo do sistema hindu, e quase toda a trigonometria árabe finalmente se baseou na função seno. Na verdade, foi também por meio dos árabes, e não diretamente dos hindus, que essa trigonometria do seno chegou à Europa. (Boyer, 2012, p)

Abu'l-Wefa demonstrou teoremas, como as fórmulas para o seno do ângulo duplo e para o seno da metade de um ângulo. Além disso, a lei dos senos para triângulos esféricos é atribuída a ele por Abu Nars Mensur, pois Abu'l-Wefa apresentou uma formulação clara para a lei. Abu'l-Wefa também fez uma nova tabela para senos e tangentes e utilizou todas as seis funções trigonométricas e várias relações entre elas (EVES, 2004).

O astrônomo Nasir al-Din (Eddin) al-Tusi (1201-1274) foi o responsável por estudar a trigonometria separada da astronomia e da geometria. Ele utilizou as seis funções trigonométricas e estabeleceu regras para resolver vários problemas com triângulos planos e esféricos, mas, infelizmente, seu trabalho não teve muita influência na Europa. (WORLDOMETERS, 2023)

2.5 Contribuições europeias

Ao longo da segunda metade da Idade Média, o interesse dos povos árabes e islâmicos pela matemática arrefeceu. Por outro lado, pode-se dizer que os europeus assumiram sua herança intelectual, e apresentaram diversas contribuições. Na trigonometria, alguns matemáticos que produziram resultados notáveis foram: Leonardo Fibonacci, que escreveu algumas obras, entre elas a "Practica Geometriae"; Regiomontanus, que escreveu "De Triangulis Omnimodis", obra que marcou o renascimento da trigonometria; Nicolau Copérnico, astrônomo que mostrou que a Terra gira em torno do Sol; e Georg Joachim Rheticus, que publicou o tratado "Opus Palatinum de Triangulis", considerado o mais elaborado tratado de trigonometria até hoje (BOYER, 2012).

De acordo com Eves (2004), também merecem destaque: François Viète, que resolveu equações cúbicas usando trigonometria; Thomas Finck, conhecido por inventar as palavras "tangente"e "secante"; e Bartholomaeus Pitiscus, que publicou o primeiro livro com a palavra "trigonometria"em seu título. No século XVII, surgiram grandes nomes como Napier, Harriot, Oughtred, Galileu, Kepler, Pascal, Descartes, Fermat, Newton e Leibniz, e a matemática se expandiu, gerando vários novos campos.

Com Leonhard Euler (1707-1783), a trigonometria tomou sua forma atual, com as abreviações sin, cos, tang, sec e cosec, que foram utilizadas por ele na obra Introductio. Ele definiu as funções trigonométricas em termos de séries infinitas e certas relações algébricas, tornando-as mais adequadas aos métodos empregados no Cálculo Diferencial e Integral. Além disso, a identidade de Euler, que une a trigonometria e os números complexos, e outras contribuições importantes, consolidaram a trigonometria como uma ferramenta fundamental na matemática (KATZ, 1998).

Conforme vimos até aqui, a evolução da trigonometria ao longo da história é consequência, por um lado, do avanço do conhecimento matemático e por outro, das suas aplicações em diversos campos, como astronomia, navegação e engenharia. Além disso, essa trajetória evidencia que, de modo semelhante ao que ocorre com as demais áreas da matemática, a trigonometria é resultado de uma complexa construção humana, permeada por contribuições de diferentes povos.

3 LEI DOS COSSENOS

A Lei dos Cossenos afirma que, dado um triângulo qualquer, o quadrado de um lado é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto destes dois lados pelo cosseno do ângulo formado por eles. Ou seja, em um triângulo cujas medidas dos lados são representadas por a, b e c e sendo A a medida do ângulo oposto ao lado a, temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(A) \tag{1}$$

3.1 Demonstração utilizando o Teorema de Pitágoras[4]

Sem perda de generalidade, observe que, caso o triângulo seja retângulo em A, temos $cos(A) = 0$ e a Lei dos Cossenos equivale ao Teorema de Pitágoras. Desta forma, restam apenas duas possibilidades: o triângulo é acutângulo ou é obtusângulo. Vamos considerar estes casos separadamente.

Caso I. o triângulo é acutângulo.

Sejam h a medida da altura $\overline{BH}$ e x a medida do segmento $\overline{AH}$, conforme mostra a figura a seguir.

[4] Baseado em Iezzi (2013)

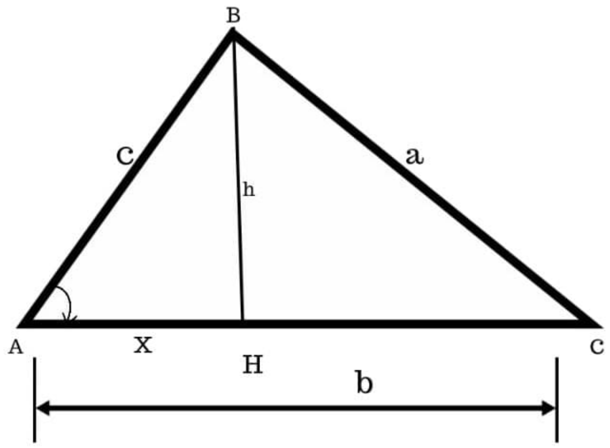

Figura 1 – Fonte: O autor

Como o segmento $\overline{BH}$ é uma altura, temos dois triângulos retângulos: triângulo AHB e o triângulo BHC. Em ambos vale o Teorema de Pitágoras. Assim, no triângulo AHB temos:

$$c^2 = x^2 + h^2 \tag{2}$$

Isolando h^2, podemos escrever

$$c^2 - x^2 = h^2 \tag{3}$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo BHC temos:

$$a^2 = h^2 + (b-x)^2$$
$$a^2 = h^2 + b^2 - 2bx + x^2$$

Isolando h^2 mais uma vez, obtemos

$$h^2 = a^2 - b^2 - x^2 + 2bx \tag{4}$$

Igualando as equações (3) e (4),

$$a^2 - b^2 + 2bx - x^2 = c^2 - x^2$$

A partir daí, isolamos a^2 para obter

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bx \tag{5}$$

A partir do triângulo AHB, temos que $cos(A) = \dfrac{x}{c}$. Daí, $x = c.cos(A)$. Utilizando este resultado na equação (5) obtemos o resultado desejado. Isto é,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(A)$$

Caso II: O ângulo A é obtuso.

Sejam, respectivamente, h e x as medidas da altura $\overline{CH}$ e do segmento $\overline{AH}$, conforme mostra a figura a seguir.

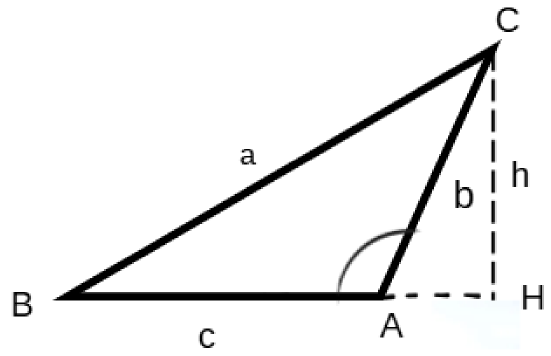

Figura 2 – Fonte: O autor.

Note que os triângulos BCH e AHC são retângulos. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AHC, podemos escrever

$$h^2 = b^2 - x^2. \tag{6}$$

Procedendo de forma análoga no triângulo BCH, temos

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (x+c)^2 \\ h^2 &= a^2 - (x+c)^2 \\ h^2 &= a^2 - c^2 - x^2 - 2cx. \end{aligned} \tag{7}$$

Igualando as equações (6) e (7) e isolando a^2, obtemos

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cx. \tag{8}$$

Seja α a medida do ângulo BAC. Então, $CAH = 180 - \alpha$. Além disso, temos que $cos(\alpha) = -cos(180 - \alpha)$. Estes fatos permitem escrever

$$\begin{aligned} cos(180 - \alpha) &= \frac{x}{b} \\ x &= -b.cos(\alpha). \end{aligned} \tag{9}$$

Finalmente, utilizando (9) em (8), chegamos ao resultado desejado:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(A). \tag{10}$$

De forma análoga, é possível mostrar que:

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac.cos(B) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab.cos(C). \end{aligned} \tag{11}$$

3.2 Demonstração utilizando coordenadas no plano

3.2 Demonstração utilizando coordenadas no plano

Nesta seção, utilizaremos a fórmula da distância euclidiana entre dois pontos no plano para demonstrar a Lei dos Cossenos.

Sem perda de generalidade, vamos considerar um triângulo ABC, obtusângulo em A. Para simplificar os cálculos, é conveniente fixar o vértice A na origem do sistema de coordenadas, o vértice B sobre o eixo x e o vértice C pode ser localizado em uma posição arbitrária no plano. Além disso, traçarmos a altura h a partir de C até o eixo x e denominamos de d a medida da projeção do lado b sobre o eixo x, conforme mostra a figura a seguir

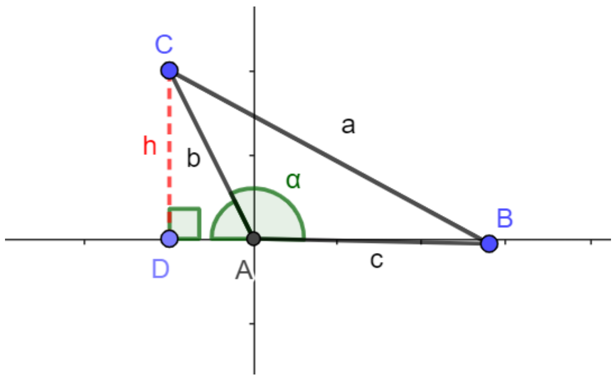

Figura 3 – Fonte: O autor.

Desta forma, temos os pontos $A = (0, 0)$, $B = (c, 0)$ e $C = (-d, h)$. Note que a medida do ângulo CAD é igual a $180° - \alpha$. Lembrando que $sen(180° - \alpha) = sen(\alpha)$, podemos escrever

$$\begin{aligned} sen(\alpha) &= \frac{h}{b} \\ h &= b\, sen(\alpha). \end{aligned} \tag{12}$$

Ainda considerando o triângulo CAD, e recordando que $cos(180° - \alpha) = -cos(\alpha)$, temos que

$$\begin{aligned} -cos(\alpha) &= \frac{d}{b} \\ d &= -b\, cos(\alpha). \end{aligned} \tag{13}$$

Utilizamos (12) e (13), para escrever $C = (b\, cos(\alpha), b\, sen(\alpha))$.

No triângulo ABC, note que a medida do lado oposto ao vértice A é ígual a distância entre os pontos B e C. Portanto,

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(b\, cos(\alpha) - c)^2 + (b\, sen(\alpha) - 0)^2} \\ a^2 &= (b\, cos(\alpha) - c)^2 + (b\, sen(\alpha))^2 \\ a^2 &= b^2\, cos^2(\alpha) - 2bc.\, cos(\alpha) + c^2 + b^2\, sen^2(\alpha) \\ a^2 &= b^2(sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha)) + c^2 - 2bc.cos(\alpha) \end{aligned} \tag{14}$$

Como $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, temos o resultado desejado:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha)$$

3.3 Uma demonstração da fórmula de Heron[5]

3.3 Uma demonstração da fórmula de Heron[6]

Heron de Alexandria foi um matemático grego que viveu no século I conhecido por diversas contribuições à Matemática, incluindo a fórmula que leva seu nome para calcular a área de um triângulo. A Fórmula de Heron permite calcular a área de um triângulo quando se conhece as medidas de seus três lados, sem a necessidade de calcular a altura. Em notação moderna, a fórmula afirma que, para qualquer triângulo ABC com lados medindo a, b e c, sua área S é dada por

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{15}$$

em que s é o semiperímetro do triângulo.

Nesta seção, vamos utilizar a Lei dos Cossenos para demostrar a fórmula de Heron. Como ponto de partida, utilizamos a fórmula que permite calcular a área de um triângulo conhecendo a medida de dois lados e o valor do seno do ângulo formado por eles. Mais precisamente,

$$S = \frac{1}{2}ab\,sen(\alpha), \tag{16}$$

em que a e b representam as medidas de lados do triângulo e α é o ângulo formado entre esses lados. Portanto,

$$\begin{aligned} 2S &= ab\,sen(\alpha) \\ 4S^2 &= a^2b^2sen^2(\alpha) \end{aligned} \tag{17}$$

Ocorre que $sen^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha)$. Assim,

$$4S^2 = a^2b^2(1 - cos^2\alpha) \tag{18}$$

Pela Lei dos Cossenos, temos.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,cos(\alpha),$$

logo,

$$\begin{aligned} cos(\alpha) &= \frac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab} \\ cos^2(\alpha) &= \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2b^2}, \end{aligned}$$

[5]Baseado em Velásquez (2005).
[6]Baseado em Velásquez (2005).

ou seja.

$$
\begin{aligned}
4S^2 &= a^2b^2[1 - \frac{(c^2-a^2-b^2)^2}{4a^2b^2}] \\
4S^2 &= a^2b^2 - \frac{(c^2-a^2-b^2)^2}{4} \\
4S^2 &= \frac{4a^2b^2 - (c^2-a^2-b^2)^2}{4} \\
16S^2 &= 4a^2b^2 - (c^2-a^2-b^2)^2 \\
16S^2 &= [2ab + (c^2-a^2-b^2)][2ab - (c^2-a^2-b^2)] \\
16S^2 &= [c^2 - (a-b)^2][(a-b)^2 - c^2] \\
16S^2 &= [c + (a-b)][c - (a-b)][(a+b)+c][(a+b)-c] \\
16S^2 &= (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)
\end{aligned}
$$

Note que $2s = a+b+c$. Assim, $b+c-a = (a+b+c)-2a$. Ou seja, $b+c-a = 2s-2a = 2(s-a)$. De modo análogo, concluímos que $a+c-b = 2(s-b)$ e $a+b-c = 2(s-c)$. Utilizando estas relações, obtemos o resultado desejado:

$$
\begin{aligned}
16S^2 &= 16s(s-a)(s-b)(s-c) \\
S^2 &= s(s-a)(s-b)(s-c) \\
S &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

4 LEI DOS SENOS

A lei dos senos é bastante utilizada em diversas áreas do conhecimento, pois permite calcular ângulos ou a medida do lado de um triângulo qualquer conhecendo um lado e dois ângulos ou dois lados e um ângulo. Seu enunciado afirma que, em um triângulo qualquer, o quociente entre cada lado e o seno do ângulo oposto, é constante e igual ao diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo. Ou seja

$$
\frac{a}{sen\,()} = \frac{b}{sen\,(\hat{B})} = \frac{c}{sen\,(\hat{C})} = 2r
$$

4.1 Demonstração utilizando Geometria Euclidiana Plana[7]

Seja um triângulo ABC qualquer, inscrito em uma circunferência de raio $r > 0$, tracemos seu diâmetro partindo do vértice B até o ponto B', e construímos o seguimento $\overline{\hat{B}'C}$, conforme vemos na figura a seguir:

[7]Baseado em Iezzi (2013).

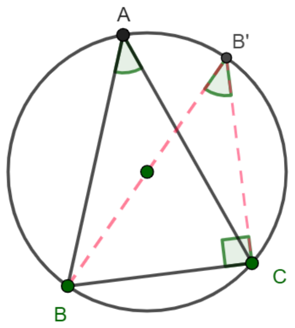

Figura 4 – Fonte: O autor.

Como $\hat{A}$ e $\hat{B}'$ são ângulos inscritos que determinam a mesma corda, então $= \hat{B}'$. A partir do triângulo $B'BC$, podemos calcular o seno de $\hat{B}'$. Daí, temos $sen(\hat{B}') = \dfrac{a}{2r} = sen(\hat{A})$. Isto significa que

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = 2r. \tag{20}$$

Procedendo de forma análoga, podemos construir triângulos convenientes e obter $\dfrac{b}{sen\,(\hat{B})} = 2r$ e $\dfrac{c}{sen\,(\hat{C})} = 2r$. Logo, o resultado está demostrado.

4.2 Uma aplicação da Lei dos Senos

4.2 Uma aplicação da Lei dos Senos

(UFPB - adaptado) A prefeitura de uma certa cidade vai construir sobre um rio que corta essa cidade, uma ponte que deve ser reta e ligar os pontos, A e B, localizados nas margens opostas do Rio para medir a distância entre esses pontos, um topógrafo localizou um terceiro ponto C, distante 200m do ponto A e na mesma margem do rio onde se encontra o ponto A. Usando um teodolito (instrumento de precisão para medir ângulos horizontais e ângulos verticais, muito empregado em trabalhos topográficos), o topógrafo observou que o ângulo BCA e cab mediam respectivamente 30 graus e 105° conforme ilustrados na figura abaixo:

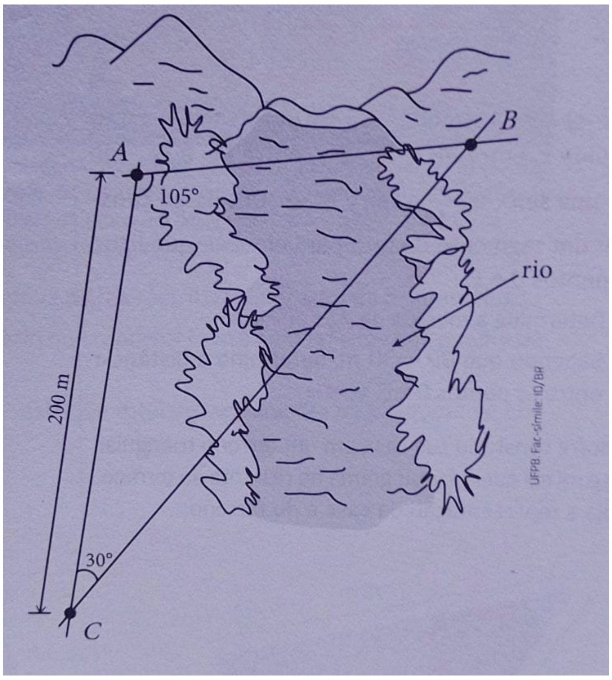

Figura 5 – Fonte: UFPB

Com base nessas informações, qual será o tamanho da ponte?

Este é um exemplo muito comum da aplicação da lei dos senos na engenharia, e para resolvê-lo precisamos lembrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, para que possamos descobrir o ângulo $\hat{B}$ que mede 45º. Agora, aplicando a Lei dos Senos, temos

$$\begin{aligned} \frac{200}{sen(45^\circ)} &= \frac{d}{sen(30^\circ)} \\ \frac{200}{\frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{d}{\frac{1}{2}} \\ d\frac{\sqrt{2}}{2} &= 100 \\ d &= \frac{200}{\sqrt{2}} = 100\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{21}$$

.

..

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo estudar as Leis dos Senos e dos Cossenos, incluindo elementos históricos sobre o desenvolvimento da trigonometria, demonstrações e algumas aplicações.

Percebemos que o desenvolvimento da trigonometria ocorreu ao longo de milênios, de forma gradativa e fortemente influenciado pelas demandas sociais de diferentes povos. Isto evidencia que a inclusão de aplicações e aspectos históricos no ensino da trigonometria na Educação Básica permite que os estudantes compreendam a importância da trigonometria em diversas áreas do conhecimento, como engenharia, astronomia e navegação, estimulando o pensamento crítico e o reconhecimento da matemática como um campo fundamental para o desenvolvimento social, científico e tecnológico.

Para a realização de estudos futuros, sugerimos a investigação sobre metodologias ativas que promovam uma aprendizagem mais dinâmica dos conceitos de trigonometria, considerando o uso de modelagem matemática, softwares interativos e atividades experimentais, inclusive integrando a trigonometria com outros componentes curriculares, como física, geografia e computação.

6 REFERÊNCIAS

Almeida, D. G. **LEI DOS COSSENOS: UMA VISÃO PLURAL E ENRIQUECEDORA PARA O ENSINO MÉDIO**. Dissertação de Mestrado-PROFMAT, Universidade de Brasilia, Brasilia, 2023.

Alves, G. A. **MODELAGEM MATEMÁTICA NO ENSINO DE TRIGONOMETRIA**. Dissertação de mestrado-PROFMAT, Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2017.

Boyer, C. B. **História da Matemática**. 3ª ed., São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

Carmo, M. P; Morgado, A. C; Wagner, E. **Trigonometria Números Complexos**. Rio de Janeiro: GRAFTEX, 1992.

Chavante, E, Eduardo; Prestes, Diego. **quadrante MATEMÁTICA E SUAS TECNOLÓGIAS trigonometria e sequências**. Versão submetida à avaliação, São Paulo: SME aducação, 2020,

Eves, Howard. **Introdução à História da Matemática**; Tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed., Campinas SP: Editora da Unicamp, 2004.

Katz, Victor. **História da Matemática**. 7ª ed. Fundação Calouste Gulbenkian, 1998.

Iezzi, G. **Fundamentos De Matemática Elementar, vol 3**. 9º ed., São Paulo: Atual editora, 2013.

Reis, F. **UMA VISÃO GERAL DA TRIGONOMETRIA: HISTÓRIA, CONCEITOS E APLICAÇÕES**. Dissertação de Mestrado-PROFMAT, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, 2016.

Silva, M. T. V. **TRIGONOMETRIA: UMA DISCUSSÃO HISTÓRICA**. Trabalho de Conclusão de Curso, Instituto Federal de Pernambuco, Pesqueira, 20.

Velásquez, F. A. **Problemas De TRIGONOMETRIA y cómo resolverlos**. 1ºEdición en español, Perú: RACSO EDITORES, 2005.