

A TRIGONOMETRIA NO TRIÂNGULO INSCRITO NA SUPERFÍCIE ESFÉRICA: uma abordagem de sua aplicabilidade em determinar rotas de voos dos aviões

TRIGONOMETRY IN THE TRIANGLE INSCRIBED IN THE SPHERICAL SURFACE: an approach to its applicability in determining airplane flight routes

Leonardo do Nascimento Lira

lnl1@discente.ifpe.edu.br

Airlan Arnaldo Nascimento de Lima

airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho investiga, sob uma perspectiva teórica, enfatizando aspectos históricos e matemáticos, o uso da trigonometria esférica para calcular distâncias entre pontos na superfície da Terra, com aplicação prática na aviação. A pesquisa parte dos fundamentos da geometria esférica, destacando seu surgimento a partir da geometria euclidiana, especialmente diante dos questionamentos gerados pelo quinto postulado de Euclides. O objetivo geral é analisar como o triângulo esférico pode representar trajetos aéreos com maior precisão. Para isso, foram utilizadas coordenadas geográficas reais de aeroportos brasileiros para o cálculo da distância ortodrômica entre esses dois pontos sobre a esfera. Os resultados mostram que os métodos baseados na geometria esférica oferecem medidas mais precisas em comparação com os da geometria plana, especialmente em rotas de longa distância utilizadas por aeronaves comerciais. Conclui-se que a trigonometria esférica é indispensável para a navegação aérea, contribuindo de forma significativa para o planejamento eficiente de rotas. Além disso, o trabalho reforça a importância de compreender os fundamentos históricos e teóricos da geometria não euclidiana, valorizando seu papel em aplicações que exigem rigor matemático com a realidade física do planeta.

Palavras-chave: Geometria Esférica. Trigonometria Esférica. Distância Entre Dois Pontos. Rotas Aéreas.

ABSTRACT

This work investigates, from a theoretical perspective, the use of spherical trigonometry to calculate distances between points on the Earth's surface, with direct application in aviation. The research begins with the foundations of spherical geometry, highlighting its emergence from Euclidean geometry, especially in light of the questions raised by Euclid's fifth postulate. The central proposal is to analyze how the spherical triangle can represent air routes with greater precision. To this end, real geographic coordinates of Brazilian airports were used to calculate the orthodromic distance between these two points on the sphere. The results show that methods based on spherical geometry offer more accurate measurements compared to those based on plane geometry, especially on long-haul routes used by commercial aircraft. It is concluded that spherical trigonometry is an essential tool for air navigation, significantly contributing to efficient route planning. Furthermore, the work reinforces the importance of understanding the historical and theoretical foundations of non-Euclidean geometry, highlighting its role in applications that require mathematical rigor with the physical reality of the planet.

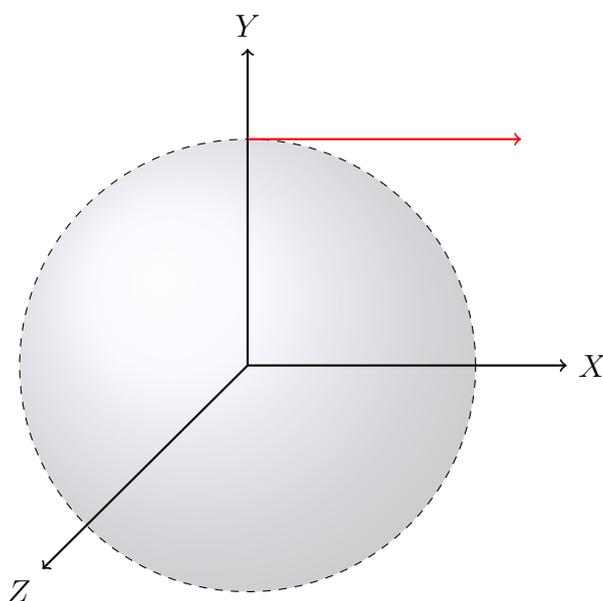
Keywords: Spherical Geometry. Spherical Trigonometry. Distance between two points. Air Routes.

1 INTRODUÇÃO

A matemática, em sua constante evolução, tem sido essencial para resolver problemas complexos, como o cálculo de rotas aéreas, modelagem de fenômenos naturais e tecnológicos do nosso cotidiano. Entre seus diversos ramos, a trigonometria presente nas geometrias destaca-se por sua aplicação em múltiplas áreas do conhecimento, desde a arquitetura até a navegação. Por muitos séculos, era fato consensual que a geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana, era a única ferramenta para descrever e estudar conceitos como ângulo, distância e espaço, mas, quando se trata de trajetórias percorridas sobre a superfície do planeta Terra, como as rotas de aviões, torna-se necessário ultrapassar os limites da geometria euclidiana e recorrer aos conceitos da geometria esférica, que lida com a trigonometria de triângulos formados por arcos de grandes círculos em uma esfera, conforme aponta Silva, H. (2024).

De acordo com a habilidade **EF09MA16** da Base Nacional Comum Curricular (BNCC), aprendemos no ensino fundamental anos finais, especificamente no 9º ano, que a menor distância entre dois pontos no plano é uma linha reta, BRASIL (2018). Mas quando esses conceitos são aplicados na superfície esférica, como a da Terra, considerando que ela tem um formato esférico, nos deparamos com a situação em que essa linha acabaria saindo da superfície terrestre, pelo fato de a Terra ser redonda, e a reta continua em sua direção de origem, como ilustrado na figura 1.

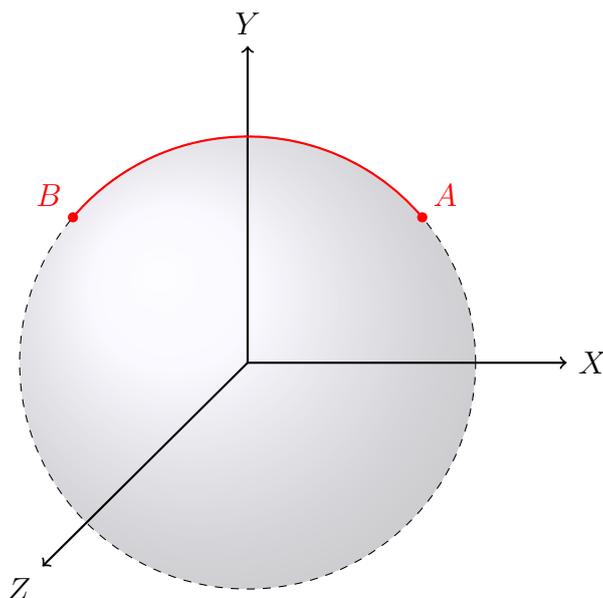
Figura 1: Esfera com uma semirreta partindo da superfície



Fonte: Os autores - Overleaf.

Portanto, as rotas aéreas não seguem, na prática, linhas retas em mapas planos, mas sim curvas que representam o menor caminho entre dois pontos sobre a superfície terrestre, como representado na Figura 2.

Figura 2: Esfera, arco de círculo formado por dois pontos



Fonte: Os autores - Overleaf.

Trajetos utilizados na aviação, conhecidos como distâncias ortodrômicas, que podem ter estimativas com cálculos por meio de relações próprias da geometria esférica, especificamente a trigonometria esférica que aborda a lei dos cossenos aplicada a triângulos esféricos, como também outro exemplo amplamente adotado é o uso da fórmula de Haversine¹. Assim, a trigonometria esférica torna-se uma ferramenta essencial no planejamento e na operação de voos, contribuindo para a segurança, economia e eficiência do transporte aéreo.

Desde o início da graduação, manifestei interesse em compreender como os conceitos matemáticos poderiam ser representados de forma visual, a fim de tornar a aprendizagem mais significativa para os estudantes. Para Campeiro (2024), a matemática, por sua natureza abstrata, muitas vezes gera dificuldades de compreensão, e foi justamente essa percepção que motivou a escolha do tema deste trabalho, buscando aproximar teoria e prática por meio de aplicações reais.

No ensino básico, a trigonometria geralmente é abordada apenas em situações planas, abordando triângulos retângulos e funções trigonométricas associadas à circunferência da geometria euclidiana. No entanto, quando se considera a geometria da superfície terrestre, é necessário ampliar essa abordagem e introduzir elementos da geometria e trigonometria esféricas. Esse aprofundamento permite uma compreensão mais completa de situações reais que envolvem deslocamentos em grandes distâncias, como os realizados por aeronaves. Além de sua aplicação prática na aviação, a trigonometria esférica representa uma importante oportunidade pedagógica para enriquecer o ensino da matemática, ao

¹A fórmula de Haversine oferece uma forma eficaz de estimar a distância entre dois locais sobre uma esfera, utilizando as respectivas latitudes e longitudes. Esse método é especialmente útil em rotas aéreas por considerar a curvatura do planeta

inserir os estudantes em contextos reais nos quais os conceitos ganham significado. Ao apresentar aos estudantes aplicações concretas da matemática, como no cálculo de distâncias entre cidades brasileiras de longo percurso e até mesmo localizadas em diferentes continentes, como, por exemplo, no trajeto entre a América do Norte e a Europa.

Diante da relevância da trigonometria esférica para a compreensão e o cálculo de trajetórias sobre a superfície terrestre, especialmente no contexto da aviação, este trabalho propõe-se a responder: de que forma a trigonometria esférica permite determinar o menor caminho entre dois pontos na superfície da Terra?

O objetivo deste trabalho consiste em compreender o papel da trigonometria esférica na modelagem de trajetórias sobre a superfície terrestre, com ênfase em sua aplicação no contexto da aviação. Busca-se analisar a diferença entre trajetórias representadas em superfícies planas e aquelas descritas em superfícies esféricas, evidenciando a limitação da geometria euclidiana para representar percursos de longas distâncias sobre a Terra, e investigar como a trigonometria esférica contribui para o planejamento de voos.

Para alcançar esses objetivos, este trabalho adota uma abordagem teórica e descritiva, fundamentada em uma revisão bibliográfica da evolução da geometria esférica a partir da plana, e sobre os principais conceitos da trigonometria esférica aplicados à aviação, como também compreender as coordenadas geográficas do nosso Planeta Terra. A investigação não se baseia na coleta de dados empíricos, mas na análise conceitual dos fundamentos matemáticos envolvidos nas rotas aéreas, considerando a Terra como uma esfera para fins de modelagem. Foram exploradas as propriedades dos triângulos esféricos, as leis que regem seus ângulos e lados, bem como a forma como esses elementos são utilizados para traçar percursos mais curtos entre dois pontos na superfície terrestre. Essa abordagem permitiu articular os conhecimentos matemáticos abstratos com situações reais, evidenciando o papel da matemática como ferramenta essencial para a compreensão e a resolução de problemas complexos do cotidiano, como a definição de trajetos mais eficientes na aviação comercial.

Para compreender o tema proposto, este trabalho adota uma abordagem teórica que, inicialmente, apresenta a evolução da geometria esférica a partir das limitações impostas pelo quinto postulando de Euclides, contextualizando o surgimento da geometria não euclidiana. Em seguida, são introduzidos os conceitos fundamentais da geometria esférica e da trigonometria esférica, incluindo a definição e propriedades dos triângulos esféricos, bem como as principais relações trigonométricas que os regem, como a lei dos cossenos esféricos. Por fim, discute-se a aplicação prática desses conhecimentos no campo da aviação, com foco no cálculo de rotas ortodrômicas, mais precisas para longas distâncias, utilizando coordenadas geográficas reais e fórmulas como a lei dos cossenos e a de Haversine, por fim, uma comparação dos métodos de cálculos da distância entre dois pontos da superfície esférica e plana.

2 ORIGENS DA GEOMETRIA EUCLIDIANA

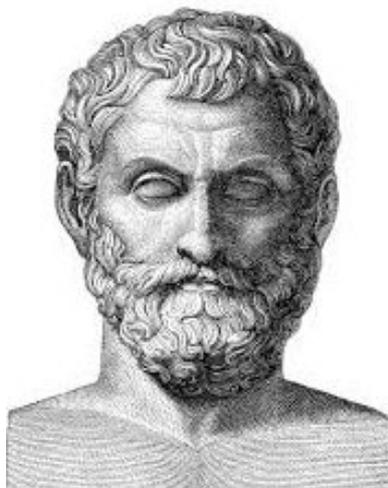
Nesse tópico será abordado de forma sucinta o contexto histórico da geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana. A palavra “Geometria” deriva do grego *geometrein*, que significa “medir a terra”, com *geo* significando terra e *metrein*, medida. Em sua origem, essa área da matemática servia como instrumento prático para resolver necessidades cotidianas das antigas civilizações, como a construção de habitações, divisão de propriedades e organização de plantios, tudo isso exigia uma forma de entender e delimitar o espaço ao seu redor. A história da geometria euclidiana presente nesse trabalho foi baseada no livro *A Janela de Euclides* do autor Leonard Mlodinow (Mlodinow, 2004).

2.1 Algumas Contribuições Históricas

Desde os primeiros momentos da civilização, o ser humano demonstrou uma necessidade natural de observar, organizar e interpretar o mundo ao seu redor. Essas curiosidades foram os alicerces para a criação de estruturas capazes de decifrar padrões presentes no espaço físico. Com isso, avançou-se para os conhecimentos atuais sobre a matemática, especialmente a geometria plana. As civilizações egípcia e babilônica foram pioneiras na aplicação de conceitos geométricos com objetivos práticos, tais como na medição de terrenos, na construção de edificações e na observação astronômica. Para tanto, desenvolveram métodos de medição e cálculos de áreas e volumes de figuras como triângulos e retângulos. Muitos desses métodos utilizavam o que hoje conhecemos como Teorema de Pitágoras (que iremos abordar mais adiante), de forma empírica, sem uma estrutura formal de prova.

Na Grécia Antiga, o florescimento do pensamento filosófico e científico transformou a maneira como as pessoas compreendiam os fenômenos ao seu redor. Enquanto as antigas civilizações utilizavam a matemática de maneira empírica e prática, voltada principalmente para resolver questões práticas do cotidiano, os gregos passaram a ver a geometria não apenas como prática, mas também como um meio de investigar princípios racionais e compreender a estrutura do universo, processo que teve início com pensadores e matemáticos como Tales de Mileto (figura 3).

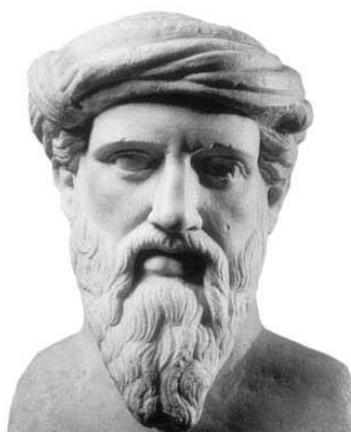
Figura 3: Tales de Mileto (624–546 a.C.)



Fonte: <https://www.estudantedefilosofia.com.br/filosofos/talesdemileto.php>.

Considerado o primeiro a aplicar métodos dedutivos à geometria. Ele teria desenvolvido seu famoso teorema² ao observar a proporcionalidade das sombras projetadas pelo sol, inclusive utilizando esse raciocínio para estimar a altura das pirâmides do Egito. Tales foi também mestre de Pitágoras, que da mesma forma contribuiu no desenvolvimento da matemática, como será abordado a seguir. Na figura 4 temos Pitágoras.

Figura 4: Pitágoras (570–495 a.C.)



Fonte: <https://claudiofilosofo.blogspot.com/2010/06/o-pitagorismo-pitagoras-e-os.html>

Pitágoras, matemático e filósofo da Grécia Antiga, criou uma escola que integrava a matemática, música, astronomia e filosofia. Ele é apresentado como uma figura chave na transformação da matemática em uma ciência abstrata e filosófica, embora o famoso

²O Teorema de Tales afirma que, se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então os ângulos correspondentes são congruentes. Isso significa que os ângulos formados pela interseção das retas paralelas e da transversal têm a mesma medida.

Teorema de Pitágoras³ já fosse conhecido por civilizações anteriores, foi com ele que ganhou uma prova formal e passou a ser tratado como um princípio universal. Pitágoras e sua escola não apenas exploraram relações numéricas, mas também acreditavam que os números eram a essência de toda a realidade, uma visão que unia matemática, música e cosmologia. Sua visão de que os números expressam a essência da realidade marcou uma transformação no fundamento da matemática, que deixou de ser apenas pragmática, como ocorria com os egípcios e babilônios, para se tornar uma disciplina abstrata orientada pela lógica, estabelecendo as bases para o pensamento lógico e dedutivo que mais tarde seria sistematizado por Euclides.

2.2 Geometria Euclidiana

Por volta de 300 a.C., em Alexandria, viveu Euclides (figura 5), um matemático grego que foi o primeiro a organizar todo o conhecimento geométrico que tinha em seu tempo, na sua obra *Os Elementos*.

Figura 5: Euclides (300 a.C.)



Fonte <https://pt.quizur.com/trivia/matematica-sobre-euclides-de-alexandria-04Gb>

Essa obra, *Os Elementos*, composta por 13 livros que formam um sistema matemático que estuda as propriedades e relações de pontos, linhas, ângulos, superfícies e sólidos. Essa obra é famosa por seus axiomas e postulados⁴, serviu como referência matemática por mais de dois milênios.

O conjunto de conhecimentos organizados por Euclides, tornou-se a fundação do que atualmente chamamos de geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana, um modelo matemático que vigorou por séculos como padrão universal de descrição do espaço. Para ele, o ambiente físico era algo fixo e ordenado, com regras bem definidas, algo que combinava perfeitamente com a lógica e a ordem que os gregos tanto valorizavam.

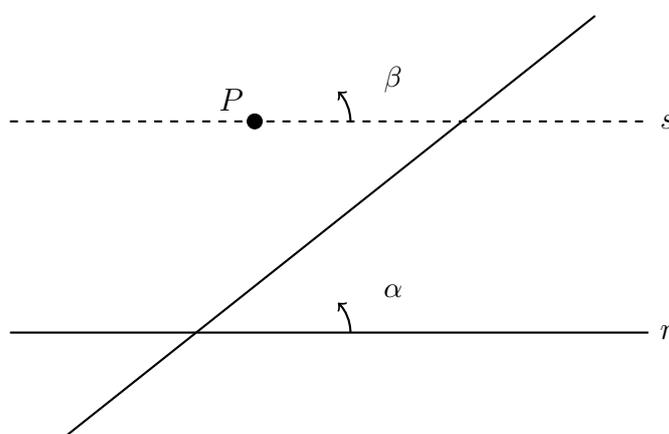
³O Teorema de Pitágoras estabelece que, em qualquer triângulo retângulo, o valor do quadrado do lado oposto ao ângulo de 90° (hipotenusa) é equivalente à soma dos quadrados dos outros dois lados, conhecidos como catetos. Matematicamente, isso é representado por: $c^2 = a^2 + b^2$.

⁴Axiomas são proposições gerais e fundamentais aceitas sem necessidade de prova, enquanto os postulados correspondem a afirmações específicas dentro de um determinado sistema ou teoria.

3 DO QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES À GEOMETRIA ESFÉRICA

Esse tópico diz respeito ao quinto postulado de Euclides, sua escolha se deve ao fato dele ser o arcabouço para compreendermos melhor a transição da geometria plana para a esférica. Um avanço significativo ocorreu quando diversos estudiosos começaram a questionar o quinto postulado de Euclides, conhecido como o postulado das paralelas, que diz: "Caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menor do que dois retos, prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos, Silva, H. (2024, p. 30)". Com base no último autor citado, ele reescreve de modo mais compreensível que, se um ponto estiver fora de uma reta, só é possível traçar uma única paralela a ela. Vejamos a seguir uma ilustração que representa esse quinto postulado de Euclides (figura 6).

Figura 6: Representação do quinto postulado de Euclides



Por um ponto P fora da reta r ,
passa exatamente uma paralela s , tal que $\alpha = \beta$

Fonte: Os autores – Overleaf

Diferentemente dos demais princípios euclidianos, o quinto postulado sempre gerou debates, seja pela sua formulação pouco intuitiva ou pela ausência de comprovação direta. Em superfícies planas, como as representações planas do solo terrestre, ainda era possível aceitá-lo como verdadeiro. No entanto, com os avanços nas ciências e na tecnologia, especialmente nas áreas da cartografia, da navegação, da astronomia e, mais adiante, da aviação, foi ficando cada vez mais claro que a geometria tradicional (Euclidiana) não dava conta de representar adequadamente ambientes curvos ou tridimensionais, Silva, L. (2021).

Conforme Mlodinow (2004), no começo do século XIX, o matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855), chamado de "príncipe da matemática", questionou o postulado das paralelas, não aceitou como verdade absoluta e foi atrás de outras formas de entender o espaço. A figura 7 diz respeito a Gauss.

Figura 7: Carl Friedrich Gauss (1777-1855)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss

Nessa busca, começou a estudar superfícies com curvatura, umas com curvatura positiva, outras negativa, olhando para as propriedades delas sem depender do espaço tridimensional à volta. Há também evidências, segundo Silva, W. (2015), de que Gauss esteve entre os pioneiros a trabalhar com a geometria não euclidiana, que iniciou por volta dos 15 anos de idade.

Em sua pesquisa sobre superfícies com curvaturas variadas, ele formulou o Teorema Egregium⁵. Essa descoberta foi primordial, abrindo caminho para que outros matemáticos, como Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1792-1856), János Bolyai (1802-1860) e Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), desenvolvessem as geometrias não euclidianas. Essa mudança acabou influenciando profundamente tanto a matemática quanto a física, mudando nossa forma de pensar sobre o espaço, Mlodinow (2004).

3.1 Geometria Esférica

A partir desse questionamento do postulado das paralelas, surgiram novas geometrias, em que o quinto postulado de Euclides não tinha aplicação, como a hiperbólica (desenvolvida por Lobachevsky e Bolyai), em que múltiplas paralelas passam por um ponto, e a esférica, foco central deste estudo. Na geometria esférica não há retas paralelas, Virgili (2022). Embora desde a antiguidade mentes brilhantes como Hiparco, Menelau de Alexandria, Ptolomeu, dentre outros, já utilizassem conceitos da geometria esférica especialmente para aplicação na navegação e astronomia, foi Riemann quem, segundo Faria (2020), consolidou a geometria esférica como um campo de estudo formal e distinto. A Figura 7 apresenta Bernhard Riemann, cuja contribuição foi decisiva.

⁵O Theorema Egregium demonstra que a curvatura presente em uma superfície é considerada uma característica interna, podendo ser identificada a partir de medições realizadas exclusivamente sobre ela, sem necessidade de observar ou considerar o espaço tridimensional ao qual está inserida.

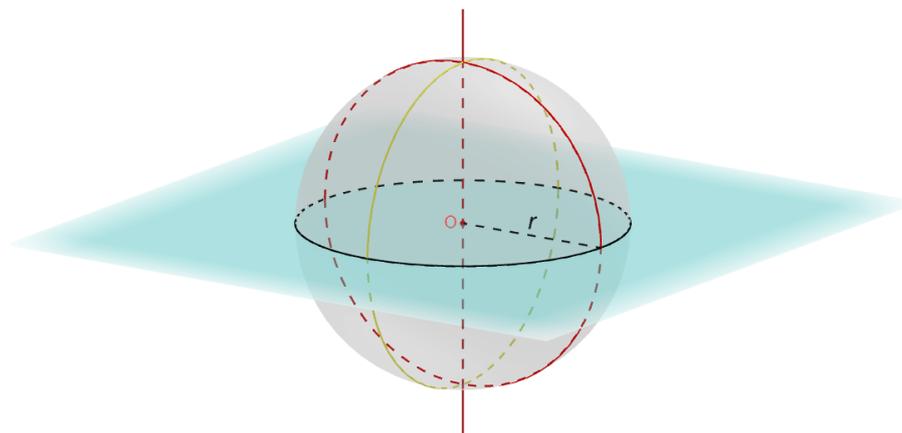
Figura 8: Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

Segundo Virgili (2022), essa geometria é caracterizada pela ausência de retas paralelas, pois na geometria esférica as retas são arcos de círculos máximos e, se interceptam em dois ou mais pontos quaisquer na superfície se nela contiver mais de dois círculos máximos, isso ocorre porque, ao contrário da geometria euclidiana, onde se um ponto estiver fora de uma reta, só é possível traçar uma única reta paralela a ela, na geometria esférica todos os círculos máximos inevitavelmente se cruzam. Esse comportamento reforça a natureza curva da superfície esférica e mostra como os postulados de Euclides, como o das paralelas, deixam de ser válidos nesse tipo de espaço. Assim, compreender esse aspecto é essencial para reconhecer as limitações da geometria plana e a necessidade de abordagens mais adequadas às superfícies tridimensionais, como é o caso da esfera. como podemos observar na figura 8.

Figura 9: Intercepções entre arcos de círculos máximos



Fonte: Os autores - GeoGebra

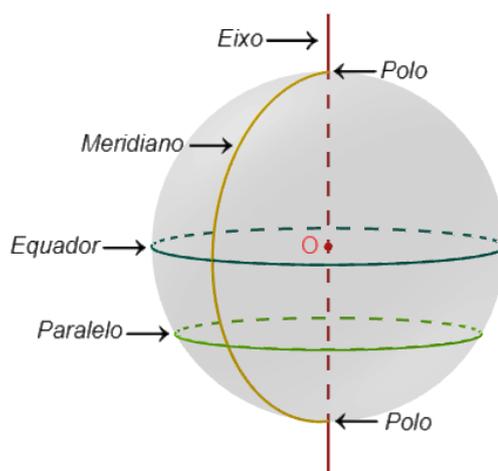
Podemos observar a partir da imagem acima, que realmente os arcos de círculos máximos se interceptam ao menos em dois pontos. Posteriormente serão apresentados alguns elementos da geometria esférica para um melhor entendimento de sua aplicabilidade no presente trabalho.

3.2 Alguns Elementos da Superfície Esférica

Para compreendermos alguns elementos presentes na geometria esférica, que serão necessários para a parte prática do presente artigo, foi considerado o nosso Planeta Terra como modelo para identificar seus componentes. Isso se justifica pelo fato de que todas essas descobertas surgiram a partir de questionamentos sobre como a geometria poderia ser aplicada em superfícies não planas, diferentemente da abordagem inicialmente formulada por Euclides, Faria (2020). Vejamos na figura 9 uma representação dessas entidades. Os principais elementos observáveis da geometria esférica, segundo Faria (2020, p. 24), são:

- (i) Eixo: É qualquer reta que contém o centro O .
- (ii) Polos: São os pontos de interseção do eixo com a superfície esférica.
- (iii) Meridiano: É uma semicircunferência cujo plano contém o eixo com a superfície esférica.
- (iv) Equador: É uma circunferência máxima cujo plano é perpendicular ao eixo.
- (v) Paralelo: É uma circunferência cujo plano é perpendicular ao eixo. Ela é paralela ao equador.

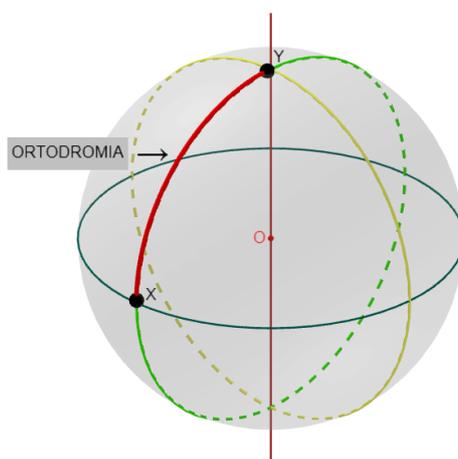
Figura 10: Representação dos elementos da superfície esférica



Fonte: Os autores - GeoGebra

E para medidas da menor distância entre dois pontos, essa característica foi nomeada de "Geodésia: Também conhecida como ortodromia, é o arco de círculo máximo que mede a menor distância entre dois pontos em uma superfície esférica", Silva, L. (2021, p. 30). Podemos observar esse aspecto na figura 10, onde é possível observar a representação da menor distância entre os pontos X até Y.

Figura 11: Representação de uma ortodromia do ponto X até Y



Fonte: Os autores - GeoGebra

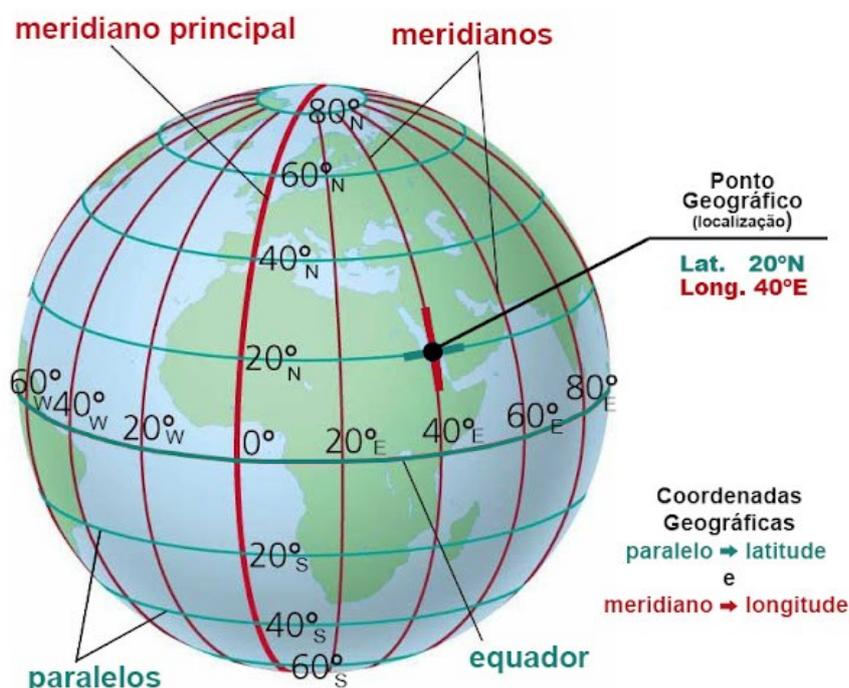
4 COORDENADAS GEOGRÁFICAS

Para entendermos melhor os elementos do tópico anterior, iremos abordar de forma geográfica como cada componente interfere nas coordenadas geográficas do planeta Terra. Sua forma física é denominada Geóide, embora apresente desníveis e relevo, essas irregularidades são insignificantes em comparação ao grande diâmetro da Terra,

que tem em média 12.742 km e um raio aproximado de 6.371 km, contudo, podendo considerar que ela possui formato esférico. Assim, é possível calcular distâncias por meio da geometria esférica, aplicável em diversos campos como navegação, aviação, definição de áreas regionais, localização de pontos em coordenadas geográficas, entre outros, segundo Martins (2024).

O método empregado para identificar um ponto específico sobre a superfície da Terra baseia-se no uso das coordenadas geográficas, definidas por latitude e longitude, como aponta Silva Filho (2014). Na figura 11, podemos observar como identificar essas duas coordenadas.

Figura 12: Coordenadas geográficas



Fonte: <https://www.geokratos.ggf.br/2023/04/aula-031-coordenadas-geograficas.html>

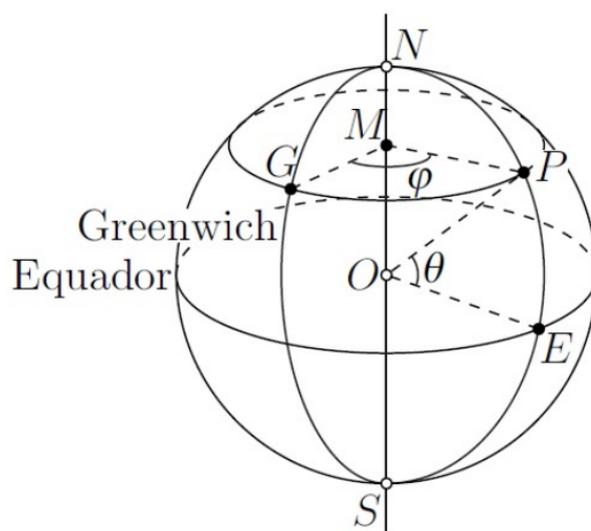
Observando a figura 11, podemos concluir que a linha do equador divide o Planeta Terra em duas partes que são os hemisférios norte e sul, a partir do ponto 0°, sendo o norte na parte superior (0° a 90°) e sul a inferior (0° a -90°), o meridiano principal que parte do norte até o sul passando exatamente no ponto 0° (onde se tem o eixo e passa a linha do equador), divide a Terra em duas regiões, leste e oeste, sendo leste a sua direita indo de 0° a 180° e oeste a sua esquerda de 0° a -180°. Para localizar um determinado ponto geográfico de acordo com a imagem acima, são usadas a latitude e longitude. Traçando vários meridianos na superfície terrestre temos as longitudes e a mesma coisa acontece ao traçarmos paralelos em relação ao equador, assim temos as latitudes. Faria (2020), também explica que as linhas de latitude, conhecidas como paralelos, são círculos menores dispostos paralelamente ao Equador, enquanto os meridianos são semicírculos que conectam os polos Norte e Sul. A

longitude é definida como o ângulo entre um meridiano qualquer e o meridiano de Greenwich, sendo positiva para o leste e negativa para o oeste.

Além disso, para o norte e sul, Silva, W. (2015, p. 37), diz que os sinais são "positivo no hemisfério norte e negativo no hemisfério sul". Para localizar um determinado ponto, Silva Filho (2014, p. 45-46), faz a seguinte abordagem:

Dado um ponto P na superfície terrestre, a latitude desse ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P , situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 90° N (norte) ou de 0° a 90° S (sul), conforme esse ponto pertença ao Hemisfério Norte ou ao Sul. Enquanto a longitude de P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a 180° E (leste) ou de 0° a 180° W (oeste), conforme o ponto esteja a Leste (E) ou a Oeste (W) do meridiano de Greenwich.

Figura 13: Coordenadas do ponto P



Fonte: Silva Filho (2014, p. 46)

Na Figura 12, segundo Silva Filho (2014, p. 46), "temos que $\theta = \widehat{EOP}$ é a latitude de P , enquanto que $\varphi = \widehat{GMP}$ é a longitude de P ". No seguinte tópico serão apresentados conceitos da trigonometria esférica, aspecto fundamental para calcularmos a distância entre dois pontos usando a latitude e longitude como coordenadas.

5 FUNDAMENTOS E APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

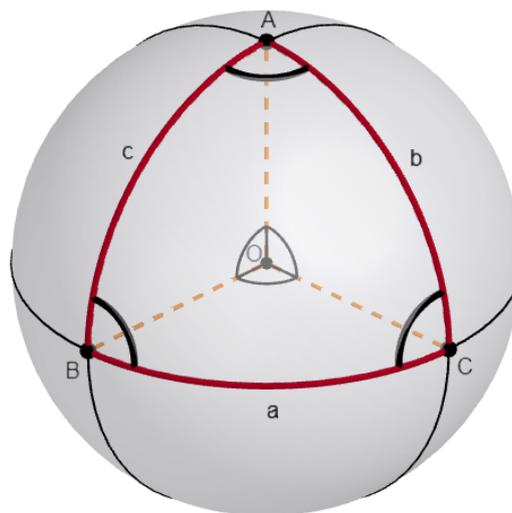
No tópico anterior, foi citado como as coordenadas determinam a localização de um ou mais pontos na superfície esférica. Nessa parte, serão apresentados elementos da trigonometria esférica que possibilitam calcular a distância entre dois pontos, usando as

suas latitudes e longitudes. A trigonometria esférica é um ramo da matemática que analisa as propriedades dos triângulos formados na superfície de uma esfera, especialmente das relações entre seus ângulos e arcos. Trata-se de uma área da geometria esférica voltada para o estudo dos polígonos que surgem nesse tipo de superfície, com ênfase nos triângulos. Seu entendimento é essencial em áreas como a navegação marítima e aérea, que será o foco desse trabalho, Bezerra (2019).

5.0.1 Triângulo Esférico: Definições e Propriedades

Uma definição para os triângulos esféricos, como destaca Silva Filho (2014,p. 19), "um triângulo esférico é a porção da superfície esférica limitada pelos arcos de três circunferências máximas menores do que uma semicircunferência, que se intersectam dois a dois. Os arcos são chamados lados e os vértices dos três ângulos esféricos são também os vértices do triângulo esférico". Conforme pode-se observar na figura 13, uma representação visual dessa definição.

Figura 14: Triângulo esférico



Fonte: Os autores - GeoGebra

A partir da ilustração acima, podemos notar alguns elementos desses triângulos esféricos, que segundo Silva (2021, p. 29), são:

Vértices: Pontos formados pelo cruzamento de dois círculos máximos; são os pontos A , B e C do triângulo esférico $\triangle ABC$.

Lados: Arcos de círculo máximo com extremidades nos vértices; são os lados a , b e c , formados pelos arcos \widehat{BC} , \widehat{AC} e \widehat{BA} , cujas medidas são determinadas pelos ângulos \widehat{BOC} , \widehat{AOC} e \widehat{AOB} , respectivamente (ver Figura 14). Esses valores podem ser dados em graus ou radianos, e a soma dos lados de um triângulo esférico é maior que 0° e menor que 360° , ou seja, $0^\circ < a + b + c < 360^\circ$.

Ângulos internos: São os ângulos esféricos formados pelos lados do triângulo, sendo eles \widehat{ABC} , \widehat{BAC} e \widehat{ACB} (ver Figura 14). Podem ser expressos em graus ou radianos, e a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é maior que 180° e menor que 540° , ou seja, $180^\circ < \widehat{ABC} + \widehat{BAC} + \widehat{ACB} < 540^\circ$.

A partir das discussões anteriores, duas possibilidades muito utilizadas para determinar a distância entre dois pontos na superfície esférica, é a lei dos cossenos aplicada a triângulos esféricos e também a fórmula de Haversine. Bezerra (2019,p. 40), apresenta as três variações para a lei dos cossenos aplicadas ao triângulo esférico aos seus lados a, b e c , que são:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C\end{aligned}\quad (1)$$

Ao utilizar a lei dos cossenos esféricos, calculando o cosseno do ângulo, também é necessário fazer a conversão dele para radianos, diante do fato de que a trigonometria no cálculo de seno, cosseno, arco cosseno etc, utiliza radianos como unidade padrão. Assim, Benevides (2022, p. 9), nos diz que, "para fazer a conversão de graus para radianos, devemos multiplicar a medida do arco (dada em graus) por $\pi/180$ ". Isso nos leva à seguinte equação:

$$\text{Radianos} = \frac{\text{graus} \cdot \pi}{180^\circ}\quad (2)$$

A outra maneira citada é a fórmula de Haversine, Heckman (2024), aponta que:

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\sin^2 \left(\frac{\text{lat}_2 - \text{lat}_1}{2} \right) + \sin^2 \left(\frac{\text{lon}_2 - \text{lon}_1}{2} \right) \cdot \cos(\text{lat}_1) \cdot \cos(\text{lat}_2)} \right) \cdot \mu_E \quad (3)$$

Onde:

- D = Comprimento do arco do círculo máximo (distância entre os dois pontos)
- lat_1 = Latitude do primeiro ponto (em radianos)

- lon_1 = Longitude do primeiro ponto (em radianos)
- lat_2 = Latitude do segundo ponto (em radianos)
- lon_2 = Longitude do segundo ponto (em radianos)
- μ_E = Raio médio da Terra (aproximadamente 6.371,009 km)

No próximo tópico será apresentado como essas fórmulas são aplicadas a partir das coordenadas de dois pontos (latitude e longitude), como também comparado aos resultados com a fórmula da distância entre dois pontos no plano, definida por Miranda; Grise; Lodovici (2022, p. 57), como:

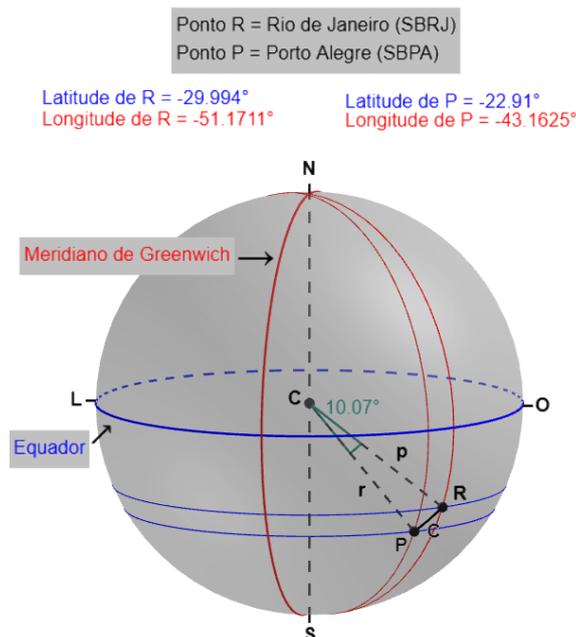
$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4)$$

6 APLICAÇÕES DA TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Diante disso, iremos averiguar, por meio de dois exercícios práticos, como esses conceitos que abordamos anteriormente até a trigonometria esférica ajudam as companhias de aviação no planejamento de trajetos aéreos, estimando uma menor distância entre dois pontos (duas localidades diferentes). Para essa primeira aplicação, utilizaremos um exemplo prático real feito por Neves (2020, s. p.). Em seguida, podemos observar essa questão ilustrada na figura 15.

1 – Seja o voo GOL, GLO 2250, partindo do Rio de Janeiro (ICAO SBRJ), com coordenadas geográficas $22^\circ 54' 36''\text{S}$ e $43^\circ 09' 45''\text{O}$ a Porto Alegre (ICAO SBPA), com coordenadas geográficas $29^\circ 59' 38''\text{S}$ e $51^\circ 10' 16''\text{O}$. Calcule a distância ortodrômica, em km, entre os aeroportos.

Figura 15: Ortodromia entre Rio de Janeiro e Porto Alegre



Fonte: Os autores - GeoGebra

A representação apresentada na Figura 15 evidencia, de forma visual e didática, o conceito de ortodromia, essencial na navegação aérea, ao mostrar a menor distância entre dois pontos sobre a superfície curva da Terra: o Rio de Janeiro e Porto Alegre. Foram traçados os meridianos e paralelos correspondentes às coordenadas geográficas reais dos aeroportos (SBRJ e SBPA), destacando-se claramente a curvatura da trajetória ortodrômica em contraste com as linhas de latitude e longitude. A curva que conecta os pontos R e P representa um arco de círculo máximo, reforçando a aplicação prática da trigonometria esférica na determinação de rotas eficientes na aviação.

Primeiramente, convertemos graus, minutos e segundos em graus decimais, usando o método disponível em Calcule Tudo (s.d.), que diz, “Some os graus ao valor dos minutos dividido por 60 e o valor dos segundos dividido por 3600, conforme a fórmula: Graus Decimais = Graus + (Minutos/60) + (Segundos/3600)”. Assim, podemos organizá-la da forma a seguir.

$$\text{Graus Decimais} = \text{Graus} + \frac{\text{Minutos}}{60} + \frac{\text{Segundos}}{3600} \quad (5)$$

Mais adiante, teremos as demonstrações dessas conversões, antes disso vale ressaltar algumas observações. Utilizando a latitude $22^\circ 54' 36''\text{S}$ e longitude $43^\circ 09' 45''\text{O}$ do Rio de Janeiro (SBRJ) por exemplo, a primeira coordenada composta por seis números unidos dois a dois sempre sendo a latitude e a segunda com seis números a longitude. Assim, segue a ordem: graus primeiro grupo com grau ($^\circ$) após o número, minutos é o próximo grupo com uma linha ($'$) após o número e segundos com duas linhas ($''$). A mesma lógica serve para as

coordenadas de Porto Alegre (SBPA). Sendo assim, para o Rio de Janeiro (SBRJ), temos:

$$\text{Latitude} = 22^\circ + \frac{54'}{60} + \frac{36''}{3600} = -22,91^\circ \quad (6)$$

$$\text{Longitude} = 43 + \frac{09'}{60} + \frac{45''}{3600} = -43,1625^\circ \quad (7)$$

E para Porto Alegre (SBPA):

$$\text{Latitude} = 29 + \frac{59'}{60} + \frac{38''}{3600} = -29,994^\circ (\text{valor arredondado, o real foi } 29.9938\dots) \quad (8)$$

$$\text{Longitude} = 51 + \frac{10'}{60} + \frac{16''}{3600} = -51,1711^\circ \quad (9)$$

Vejamos agora o cálculo dessa ortodromia usando a equação (1) para determinarmos a distância entre o arco. Na figura 15, já podemos notar, através da representação, que esse arco mede $10,07^\circ$. Agora vamos usar a trigonometria esférica para chegar a esse resultado.

Partida: Rio de Janeiro (SBRJ)

$$\text{Latitude} = -22,91^\circ$$

$$\text{Longitude} = -43,1625^\circ$$

Chegada: Porto Alegre (SBPA)

$$\text{Latitude} = -29,994^\circ$$

$$\text{Longitude} = -51,1711^\circ$$

Como queremos calcular o arco formado pelos pontos R e P, então usaremos as letras presentes, aplicadas na lei dos cossenos de forma adaptada para esse exercício, portanto:

$\cos c = \cos p \cdot \cos r + \sin p \cdot \sin r \cdot \cos C$. Com:

- $\cos(-22,91^\circ)$ corresponde à **lat. do ponto R (Rio de Janeiro)**
- $\cos(-29,994^\circ)$ corresponde à **lat. do ponto P (Porto Alegre)**
- $\cos(C)$ corresponde à **diferença entre as longitudes (local de chegada - partida):**

$$C = -51,1711^\circ - (-43,1625^\circ) = -8,0086^\circ \quad (10)$$

- $\sin(-22,91^\circ)$ e $\sin(-29,994^\circ)$ são os senos das respectivas latitudes

Agora usaremos a fórmula completa substituindo todos os valores:

$$\cos c = \cos(-22,91^\circ) \cdot \cos(-29,994^\circ) + \sin(-22,91^\circ) \cdot \sin(-29,994^\circ) \cdot \cos(-8,0086^\circ) = 0,9845860022 \quad (11)$$

Com isso, obtivemos a medida do cosseno do ângulo central formado pelos pontos R e P. Agora vamos calcular o arco cosseno⁶ para termos a distância do arco que vai de um ponto ao outro.

$$\cos c = \arccos(0,9845860022) = 10,0729043711^\circ \quad (12)$$

A partir do resultado (12) podemos analisar na figura 15, que os valores dos arcos coincidiram como citado anteriormente. O próximo passo agora será converter esse valor em radianos pela equação (2).

$$\text{Radianos} = \frac{10,0729043711^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = 0,1758053465 \quad (13)$$

Por fim, para calcularmos a distância em que o avião percorreu em km aproximadamente, usaremos o valor (13) obtido em radianos e multiplicaremos pelo raio da terra (aproximadamente 6.371 km), da seguinte forma abordada por Neves (2020,s.p.)

$$D = RT \times d \quad (14)$$

Com:

- **RT:** Raio da Terra igual a 6.371 km
- **d:** comprimento do arco medido em radianos

Portanto

$$D = 6.371 \times 0,1758053465 = 1.120,1 \text{ km} \quad (15)$$

Concluímos que a distância aproximada do menor trajeto feito pelo avião partindo do Rio de Janeiro (SBRJ) até Porto Alegre (SBPA) foi de 1.120,1 km. Neves (2020, s.p.), também nos traz um registro histórico da distância real desse percurso, como podemos observar nas figura 16 e 17.

Figura 16: Voo GOL, GLO 2250



Fonte: <https://sphaericaest.com.br/2020/10/05/calculo-de-rotas-aereas/>

⁶A função *arco cosseno*, ou *função inversa do cosseno*, é representada por \arccos e permite encontrar o ângulo cujo cosseno é conhecido; ou seja, se $\cos c = x$, então $c = \arccos(x)$.

Figura 17: Distância do Voo GOL, GLO 2250

INFORMAÇÕES DA AERONAVE		
Tipo de Aeronave	Boeing 737-800 (bimotor a jato) (B738)	Fotos
Registro	Faça upgrade da conta para ver o número de série	
INFORMAÇÕES DA COMPANHIA AÉREA		
Linha Aérea	Gol Transportes Aereos "GOL"	todos os vôos
DADOS DO VOO		
Velocidade	Preenchido: 674 km/h	gráfico
Altitude	—	
Distância	Real: 1.263 km (Distância em linha reta: 1.120 km)	

Fonte: <https://sphaericaest.com.br/2020/10/05/calculo-de-rotas-aereas/>

Adiante, um comentário feito por Neves (2020, s. p.), em relação à distância real dos voos.

A distância real é aquela efetivamente percorrida pela aeronave. No planejamento de voo, há procedimentos de saída, chegada e aproximação previstos em cartas aéreas que devem ser cumpridos pela tripulação em comando, além de fatores como condições meteorológicas no momento e etc.

Diante disso, podemos observar como as companhias aéreas aplicam esses princípios em suas rotas operacionais, priorizando trajetos que considerem a menor distância ortodromica possível entre dois pontos na superfície terrestre. Essa escolha não apenas contribui para a redução do tempo total de voo, como também está diretamente relacionada à economia de combustível. Além disso, o uso de cartas aeronáuticas e o planejamento de procedimentos de saída, aproximação e chegada, demonstram como a navegação aérea alia cálculos matemáticos e condições práticas para garantir eficiência e segurança no transporte aéreo.

Outro método citado anteriormente é a fórmula de Haversine presente na equação (3), nela todos os valores serão aplicados já convertidos para radianos, utilizando os valores convertidos para graus decimais que são: Latitude = $-22,91^\circ$ (6) e Longitude = $-43,1625$ (7) do Rio de Janeiro (SBRJ), e Latitude = $-29,994^\circ$ (8) e Longitude = $-51,1711^\circ$ (9) referente a Porto Alegre (SBPA). Aplicando na fórmula (2) para converter para radianos, temos:

$$\text{Latitude (SBRJ)} = \frac{22,91 \cdot \pi}{180^\circ} = -0.3998549316 \text{ rad} \quad (16)$$

$$\text{Longitude (SBRJ)} = \frac{-43,1625 \cdot \pi}{180^\circ} = -0.7533277384 \text{ rad} \quad (17)$$

$$\text{Latitude (SBPA)} = \frac{-29,994 \cdot \pi}{180^\circ} = -0.5234940558 \text{ rad} \quad (18)$$

$$\text{Longitude (SBPA)} = \frac{-51,1711 \cdot \pi}{180^\circ} = -0.8931041769 \text{ rad} \quad (19)$$

A partir desses dados, basta substituímos os valores na fórmula (3).

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\begin{aligned} &\sin^2 \left(\frac{-0.5234940558 - (-0.3998549316)}{2} \right) \\ &+ \sin^2 \left(\frac{-0.8931041769 - (-0.7533277384)}{2} \right) \\ &\cos(-0.3998549316) \cdot \cos(-0.5234940558) \end{aligned}} \right) \cdot \mu_E \quad (20)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\begin{aligned} &\sin^2(0.0618195621) + \sin^2(0.0698882192) \\ &\cos(-0.3998549316) \cdot \cos(-0.5234940558) \end{aligned}} \right) \cdot \mu_E \quad (21)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{0.0038153612 + 0.0048784926 \cdot 0.9213619754 \cdot 0.8662068977} \right) \cdot \mu_E \quad (22)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{0.0077086799} \right) \cdot \mu_E \quad (23)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin(0.0878175653) \cdot \mu_E \quad (24)$$

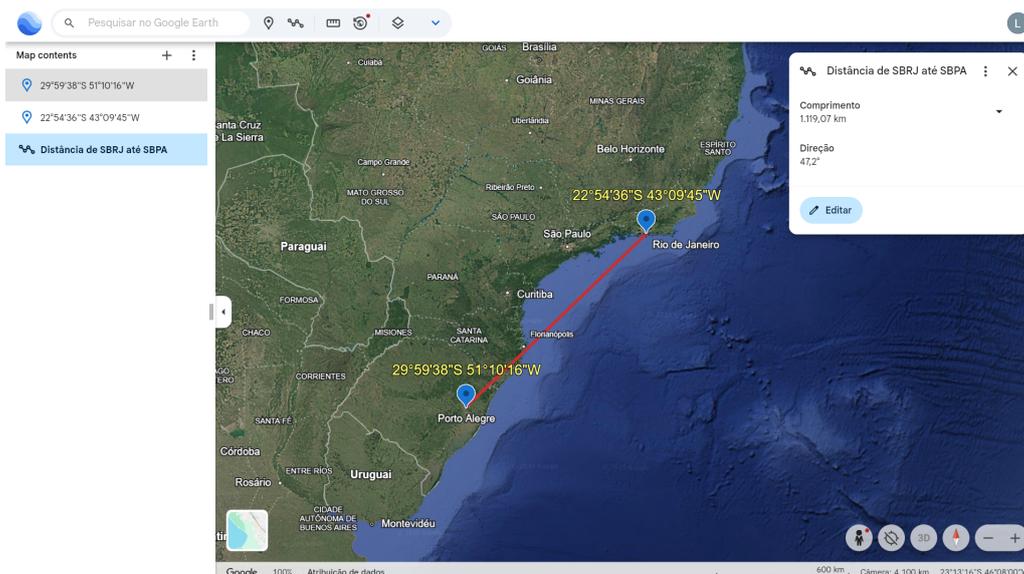
$$D = 0.1759577972 \cdot \mu_E \quad (25)$$

$$D = 0.1759577972 \cdot 6.371 \quad (26)$$

$$D = 1120.33 \text{ km} \quad (27)$$

Pelo segundo método (fórmula de Haversine), também chegamos a uma aproximação do voo real em linha reta de acordo com a figura 16, e para nos comprovar mais ainda a eficácia da trigonometria esférica aplicada à aviação, foi feita eita pesquisa usando Google Earth, utilizando essas mesmas coordenadas geográficas abordadas por Neves (2020, s. p.), para determinar a distância entre essas localidades, como podemos visualizar na figura 18.

Figura 18: Distância SBRJ até SBPA



Fonte: Os autores - Google Earth

A imagem acima nos mostra uma distância de 1119,07 km, chegando bem próximo também do valor calculado pelos dois métodos anteriores. Agora iremos compreender por que foi necessário ultrapassar os limites da geometria plana quando aplicada a superfícies esféricas, fazendo uso da fórmula (4), que se aplica à distância entre dois pontos no plano. Tomemos as coordenadas de latitude e longitude das respectivas localidades já convertidas para graus decimais, calculadas anteriormente. Tomando para $(x_2 - x_1)^2$ a diferença da latitude dois (SBPA) pela um (SBRJ), com o resultado elevado ao quadrado, a mesma lógica para $(y_2 - y_1)^2$, sendo agora a subtração da longitude dois (SBPA) pela um (SBRJ), e esse valor elevado ao quadrado. Assim, constatamos que:

$$d(R, P) = \sqrt{((-29,994) - (-22,91))^2 + ((-51,1711) - (-43,1625))^2} \quad (28)$$

$$d(R, P) = \sqrt{50.183056 + 64.13767396} \quad (29)$$

$$d(R, P) = \sqrt{50.183056 + 64.13767396} \quad (30)$$

$$d(R, P) = \sqrt{114.32073} \quad (31)$$

$$d(R, P) = 10.69208726^\circ \quad (32)$$

Feito isso, obtivemos um valor em graus. Como estamos trabalhando com geometria plana, podemos usar outro procedimento para chegar ao resultado final, uma vez que a geometria plana não é adequada para coordenadas em uma superfície esférica. Segundo Teleco (s.d.), “Cada grau de uma latitude ou longitude equivale a aproximadamente 111,11

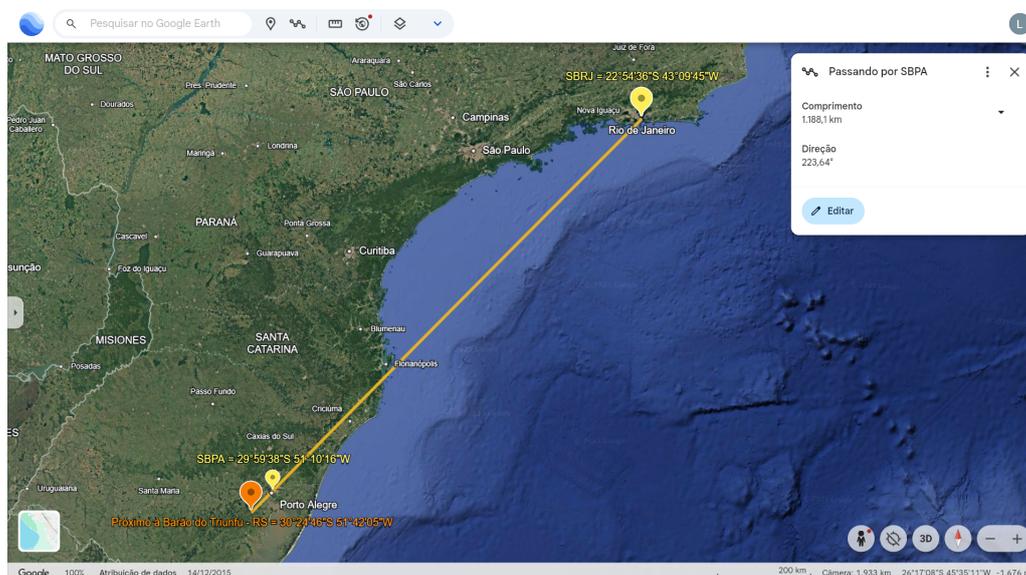
km". Com isso, faremos:

$$d(R, P) = 10.69208726 \times 111.111 \quad (33)$$

$$D(R, P) = 1188.01 \text{ km} \quad (34)$$

Com base no resultado obtido a partir da aplicação da fórmula para distância entre dois pontos no plano, resultou em 1188,01 km. Usando o Google Earth, vamos fazer uma simulação de acordo com essa distância dada (1188,01 km), partindo do SBRJ, passando por SBPA, qual localidade iríamos chegar, de acordo com a figura 19.

Figura 19: Simulação no Google Earth da distância plana entre SBRJ e SBPA, evidenciando a diferença em relação à ortodromia real



Fonte: Os autores - Google Earth

Contudo, a localidade seguindo o trajeto até atingir uma distância de 1188,1 km ficou próxima da cidade Barão do Triunfo - RS. A partir desses dados, foi possível comparar três métodos de cálculo da menor distância entre essas duas localidades na superfície terrestre. O resultado evidencia que há variações significativas dependendo do modelo geométrico utilizado (plano ou esférico), isso porque a geometria plana diferente da esférica, disconsidera totalmente o formato da Terra, tornando-a numa região bidimensional, assim, não sendo aplicada para esse fim.

Agora iremos abordar a segunda aplicação com uma distância ortodrômica maior, indo de uma localidade da América do Norte à Europa, a seguir o exercício elaborado pelos próprios autores:

Suponha que exista uma companhia aérea internacional que irá realizar um voo especial, partindo do Alasca (EUA), localizado na América do Norte, com destino a Queenstown (Nova Zelândia), situada no continente europeu. As coordenadas geográficas de cada localidade são:

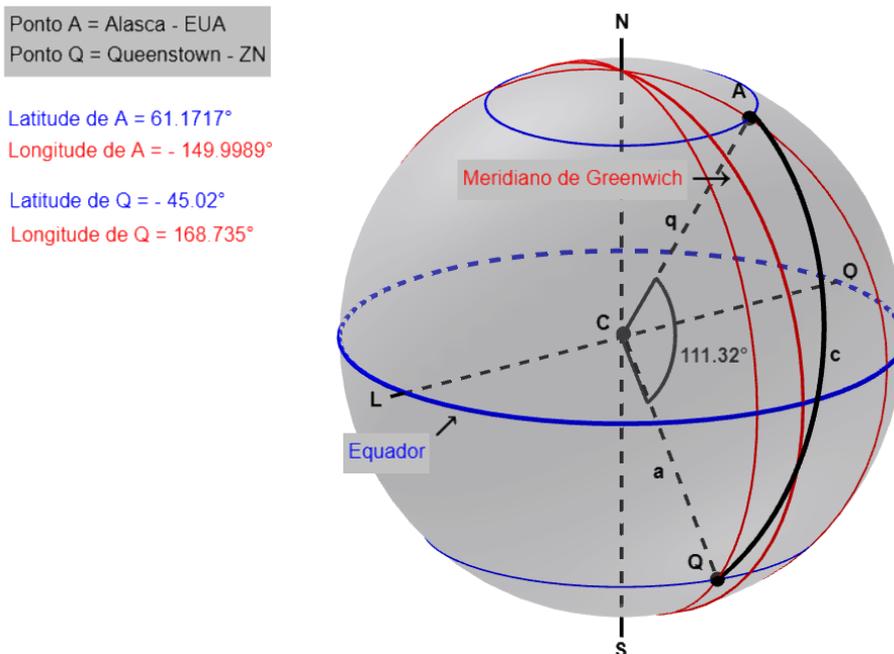
- **Partida - Alasca:** $61^{\circ}10'18''$ N, $149^{\circ}59'56''$ W

- **Chegada - Queenstown:** $45^{\circ}01'12''$ S, $168^{\circ}44'06''$ E

Admitindo a Terra como esférica, com raio médio $R = 6371$ km, calcule a distância ortodrômica entre essas duas localidades.

A seguir, na figura 20 temos uma modelagem desse exercício no software GeoGebra, representando essa ortodromia.

Figura 20: Ortodromia entre o Alasca e Queenstown



Fonte: Os autores - GeoGebra

Como estão presentes o passo a passo detalhado da primeira aplicação, essa segunda aplicação terá uma resolução mais direta, mas seguindo a mesma lógica da anterior, só que nesse exemplo no final iremos fazer uma simulação de quanto essa suposta companhia aérea gastaria a mais com combustível, considerando a equação (4) presente na geometria plana. Na figura 20 já convertimos as coordenadas para graus decimais e agora iremos utilizar a lei dos cossenos esféricos (fórmula 1) para achar essa distância. Fazendo a diferença das longitudes temos: $168.735 - (-149.9989) = 318,7339^{\circ}$, agora basta substituir os valores respectivos.

$$\cos c = \cos(61,1717^{\circ}) \cdot \cos(-45,02^{\circ}) + \sin(61,1717^{\circ}) \cdot \sin(-45,02^{\circ}) \cdot \cos(318,7339^{\circ}) = 111,315 \quad (35)$$

Como podemos observar o valor coincide com o valor presente no GeoGebra se arredondado. Agora, convertendo-o para radianos e fazendo o produto dele com o valor do raio da Terra, que é 6.371km aproximadamente, temos.

$$\frac{111.32 \cdot \pi}{180^{\circ}} = 2.303834613 \ 1.939409865 \ rad \quad (36)$$

$$D = 6.371 \times 1.939409865 = 12.355,98km \quad (37)$$

Concluimos que a distância aproximada entre essas duas localidades é de 12.355,98km utilizando a lei dos cossenos esféricos. Agora fazemos uso da Fórmula de Haversine para o mesmo exercício, com as coordenadas convertidas para radianos por meio da equação (2), aplicada diretamente na fórmula (3).

$$\text{Latitude (Alasca)} = \frac{61.1717 \cdot \pi}{180^\circ} = 1.067647574 \text{ rad} \quad (38)$$

$$\text{Longitude (Alasca)} = \frac{-149.9989 \cdot \pi}{180^\circ} = -2.6179746794 \text{ rad} \quad (39)$$

$$\text{Latitude (Queenstown)} = \frac{-45.02 \cdot \pi}{180^\circ} = -0.7857472292 \text{ rad} \quad (40)$$

$$\text{Longitude (Queenstown)} = \frac{168.735 \cdot \pi}{180^\circ} = 2.9449813134 \text{ rad} \quad (41)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{\begin{array}{l} \sin^2 \left(\frac{-0.7857472292 - 1.067647574}{2} \right) \\ + \sin^2 \left(\frac{2.9449813134 - (-2.6179746794)}{2} \right) \\ \cos(-0.7857472292) \cdot \cos(1.067647574) \end{array}} \right) \cdot \mu_E \quad (42)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{0.6394259963 + 0.1241727485 \cdot 0.7068599113 \cdot 0.4821864479} \right) \cdot \mu_E \quad (43)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin \left(\sqrt{0.6817488211} \right) \cdot \mu_E \quad (44)$$

$$D = 2 \cdot \arcsin (0.8256808228) \cdot \mu_E \quad (45)$$

$$D = 1.942815949 \cdot \mu_E \quad (46)$$

$$D = 1.942815949 \cdot 6.371 \quad (47)$$

$$D = 12.377,68 \text{ km} \quad (48)$$

Pelo segundo método resultou numa distância de 12.377,68 km, comparado à lei dos cossenos esféricos tem uma porcentagem de erro considerável pela trajetória longa, que podemos calcular segundo Frost (2018), da seguinte forma:

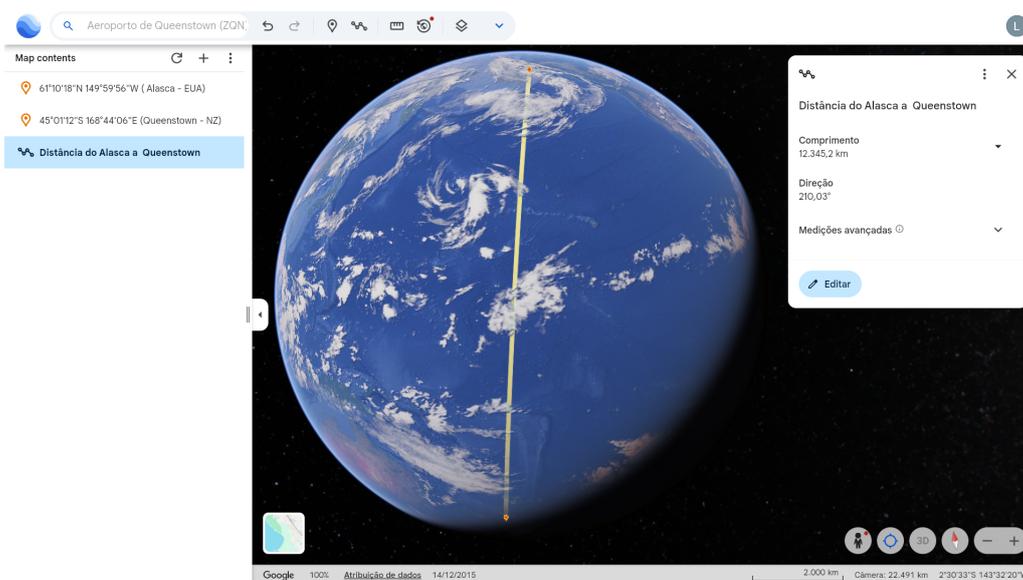
$$\text{Erro} = \frac{\text{Distância maior} - \text{Distância menor}}{\text{Distância maior}} \times 100\% \quad (49)$$

$$\text{Erro} = \frac{12.377,68 - 12.355,98}{12.377,68} \times 100 \quad (50)$$

$$\text{Erro} = 0.175\% \quad (51)$$

Fazendo uso do Google Earth, para comparar mais resultados, temos na figura 21 a distância do Alasca a Queenstown.

Figura 21: Distância do Alasca a Queenstown



Fonte: Os autores - Google Earth

Pela imagem acima, essa medida resultou em 12.345,02 km, se usarmos a equação (49) o erro também será mínimo em relação à fórmula dos cossenos esféricos e Haversine.

Por fim, iremos calcular utilizando a equação (4), evidenciando mais uma vez por que a geometria é eficaz para esse tipo de aplicação. Tomando para $(x_2 - x_1)^2$ a diferença da latitude dois (Queenstown) pela um (Alasca), com o resultado elevado ao quadrado, a mesma lógica para $(y_2 - y_1)^2$, sendo agora a subtração da longitude dois (Queenstown) pela um (SBRJ), temos que:

$$d(A, Q) = \sqrt{((-45.02) - 61.1717)^2 + (168.735 - (-149.9989))^2} \quad (52)$$

$$d(A, Q) = \sqrt{112867.976} \quad (53)$$

$$d(A, Q) = 335.958^\circ \quad (54)$$

Como discutido no primeiro exercício, a geometria plana não é adequada para representar coordenadas sobre a superfície esférica. Dessa forma, utilizaremos o mesmo caso, multiplicando o valor encontrado na equação (54) por 111,11 km:

$$d(A, Q) = 335.958 \times 111.111 \quad (55)$$

$$D(A, Q) = 37.328,29 \text{ km} \quad (56)$$

A partir desse resultado, observa-se que, para percursos mais extensos, a diferença entre os conceitos da geometria esférica e da geometria plana torna-se significativamente maior, evidenciando a necessidade do uso de modelos esféricos para garantir maior precisão em cálculos de distâncias sobre a superfície terrestre. Para entendermos o quanto essa companhia aérea iria gastar se considerado o resultado (54), vamos considerar que ela utilize um modelo de avião adequado para essa rota, segundo Medeiros (2025), “Para possibilitar um voo tão longo e complexo, o modelo escolhido foi o Airbus A350-900 ULR, aeronave de última geração construída em materiais compostos (fibra de carbono), o que a torna mais leve, aerodinâmica e eficiente. A autonomia do modelo chega a 18.000 km, suficiente para completar a rota com uma margem segura”. Sobre essa aeronave, Vinholes (2018), diz que “o A350-900 pode decolar com até 140.795 litros de combustível”. Com essas informações, podemos fazer uma simulação através da regra de proporcionalidade, de quanto ele gasta por cada quilômetro percorrido, de acordo com [estuda.com\(2025\)](#), aplicando esse conceito e assumindo que a aeronave gasta exatamente 140.795 litros de combustível em 18.000 km percorrido, desse modo:

$$\frac{18.000}{1000} = \frac{140.795}{X} \quad (57)$$

$$X = \frac{140.795 \times 1000}{18.000} \quad (58)$$

$$X \approx 7.822 \text{ l} \quad (59)$$

A seguir, apresenta-se uma tabela com os resultados calculados pelos diferentes métodos de cálculo de distância. Esses valores serão utilizados para estimar o consumo de combustível aproximado do avião e, em seguida, comparar o gasto utilizando a distância no plano, a fim de observar as diferenças de consumo.

Tabela 1 – Comparação das distâncias obtidas pelos diferentes métodos de cálculo

Método	Distância (km)
Lei dos Cossenos Esféricos	12.355,98
Fórmula de Haversine	12.377,68
Google Earth	12.345,02
Distância no plano $D(A, Q)$	37.328,29

Fonte: Os autores – Overleaf

Observa-se que a distância calculada pela geometria plana é cerca de três vezes maior que a real, o que impacta diretamente no consumo de combustível. A partir da tabela 1, iremos fazer a média aritmética entre os três primeiros métodos que se baseiam na geometria esférica. A média é calculada somando esses valores e dividindo pela quantidade de termos, assim:

$$\text{Média} = \frac{12.355,98 + 12.377,68 + 12.345,02}{3} = 12.359,56 \text{ km} \quad (60)$$

$$\text{Média} = 12.359,56 \text{ km} \quad (61)$$

Feito isso, podemos aplicar os mesmos conceitos da regra de proporcionalidade para encontrar o valor gasto de combustível em 12.359,56 km. Da seguinte forma:

$$\frac{18.000}{12.359,56} = \frac{140.795}{X} \quad (62)$$

$$X = \frac{140.795 \times 12.359,56}{18.000} \quad (63)$$

$$X \approx 96.676 \text{ l} \quad (64)$$

Portanto, utilizando os conceitos da geometria esférica, o trajeto exigiria aproximadamente 96.676 litros de combustível. A seguir, realizamos a simulação considerando a distância entre dois pontos em um plano, aplicando a mesma regra de proporcionalidade:

$$\frac{18.000}{37.328,29} = \frac{140.795}{X} \quad (65)$$

$$X = \frac{140.795 \times 37.328,29}{18.000} \quad (66)$$

$$X \approx 291.980 \text{ l} \quad (67)$$

Concluimos, que a geometria plana não é adequada para cálculos de distância sobre a curvatura da Terra. No exemplo da distância plana, o consumo de combustível excederia em 195.304 litros o valor obtido com a geometria esférica, ou seja, mais que três vezes o valor mais próximo do real, evidenciando os conceitos matemáticos adotados pelas companhias aéreas para economizar combustível, otimizar o tempo e aumentar a segurança no transporte aéreo.

Diante dessas diferenças e da necessidade de entender melhor os fundamentos matemáticos que explicam tal variação, foi adotada uma metodologia que melhor se aplicasse a essa busca bibliográfica e prática, como será apresentada no tópico a seguir.

7 METODOLOGIA

A presente investigação, centrada na trigonometria dos triângulos inscritos em superfícies esféricas, foi conduzida por meio de uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa. Conforme esclarece Gil (2008), essa abordagem valoriza a análise conceitual e a construção teórica, sem recorrer à quantificação de dados ou a métodos estatísticos, priorizando a compreensão dos fundamentos matemáticos empregados na aviação. A proposta deste trabalho consiste em compreender os fenômenos relacionados à trigonometria esférica a partir de seus fundamentos matemáticos, observando também como esses conhecimentos evoluíram historicamente.

A pesquisa seguiu a seguinte sequência metodológica:

1. **Definição do tema:** O estudo foi centrado na trigonometria esférica, com ênfase na sua aplicação na aviação.
2. **Busca de literatura e recorte temporal:** A revisão bibliográfica foi conduzida na biblioteca virtual do PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática. Foram analisados os trabalhos acadêmicos dos últimos 11 anos. Também foram realizadas buscas via Google para complementar a fundamentação teórica, com fórmulas matemáticas, artigos científicos, sites que abordassem cálculos de distâncias aéreas e conversões trigonométricas.
3. **Palavras-chave:** Na biblioteca virtual do PROFMAT, foram utilizadas as expressões "Geometria esférica" e "Trigonometria esférica" de forma combinada (AND), onde retornou 27 dissertações. Essas buscas foram fundamentais para delimitar o campo investigativo. Já no Google, foram realizadas pesquisas sobre conversões trigonométricas, distância entre dois pontos no plano e na esfera.
4. **Seleção de trabalhos:** Foram escolhidos 8 trabalhos dentre os 27, o critério para seleção foi para aqueles que melhor contribuíram para o aprofundamento teórico da geometria esférica, abordando desde sua origem histórica até suas aplicações práticas com uso da trigonometria esférica aplicada a triângulos esféricos. Entre os 19 restantes, alguns abordavam aspectos semelhantes em relação à evolução histórica

das geometrias não euclidianas, ao uso da trigonometria e a outros assuntos tratados ao longo do trabalho. Assim, foram selecionados aqueles que se complementavam de acordo com a necessidade para o desenvolvimento deste artigo. A Tabela 2 apresenta os 8 trabalhos selecionados em ordem crescente de ano de publicação.

Tabela 2 – Trabalhos selecionados para fundamentação teórica do TCC

Autor (a)	Título	Ano
Antonio Edson Pereira da Silva Filho	A Trigonometria Esférica e o Globo Terrestre	2014
Welder Dan Silva	Uma Introdução à Geometria Esférica	2015
Luiz Fernando da Silva Bezerra	A Trigonometria Esférica como solução para a Navegação Astronômica	2019
Jorge Maurilio de Faria	Trigonometria Esférica: Origens e Aplicações	2020
Luciano Pedro da Silva	Trigonometria Esférica e seu estudo no software GeoGebra 3D	2021
Walter Hugo Virgili	Geometria Esférica: Uma abordagem matricial para os teoremas do cosseno e do seno nos triângulos esféricos	2022
Henrique José Cavalcante Chagas da Silva	Descobrendo a Geometria Esférica com Anselmo	2024
Gustavo da Silva Martins	Geometria Esférica e Aplicações	2024

Fonte: os autores – Overleaf

5. **Análise conceitual:** A partir do material selecionado, buscou-se conectar os conceitos matemáticos abstratos com suas aplicações reais, sobretudo no cálculo de distâncias entre dois pontos sobre a superfície esférica.
6. **Recursos tecnológicos:** foram utilizados software como o Overleaf, GeoGebra e o Google Earth, para ilustrar conceitos teóricos de forma visual para uma melhor compreensão do que estava sendo abordado. Vejamos a seguir de forma teórica, a funcionalidade de cada software mencionado anteriormm mente.

O Overleaf foi utilizado na redação científica, organização do texto acadêmico e ilustração de conceitos teóricos, Overleaf (2025). O GeoGebra serviu como ferramenta de modelagem matemática dinâmica, permitindo a representação de triângulos esféricos e ortodromias, GeoGebra (2024). Já o Google Earth possibilitou a simulação de

trajetos reais, relacionando coordenadas geográficas com percursos aéreos, Google (s.d.). Esses recursos tecnológicos foram fundamentais para relacionar os conceitos teóricos da trigonometria esférica com aplicações práticas no campo da aviação.

A pesquisa assumiu caráter teórico e descritivo, evidenciando o papel essencial da matemática tanto na estruturação do conhecimento científico quanto na resolução de problemas práticos, como a definição de trajetos aéreos mais eficientes.

Nosso estudo concentrou-se na trigonometria aplicada aos triângulos em superfícies esféricas, especialmente no modo como esses conceitos são utilizados para traçar rotas entre dois pontos na superfície terrestre. Consideramos a Terra como uma esfera para fins de modelagem matemática, permitindo a análise das rotas ortodrômicas, que representam o caminho mais curto entre dois pontos.

Foram abordados os conceitos essenciais da trigonometria esférica, incluindo os ângulos, lados e leis que definem os triângulos sobre superfícies curvas. O objetivo foi relacionar esses conceitos com situações práticas, como o planejamento de trajetos aéreos. Além disso, o estudo incluiu representações esquemáticas de triângulos esféricos, resolução de problemas teóricos e análise de como as companhias aéreas utilizam esses princípios para otimizar tempo, consumo de combustível e segurança dos voos.

8 RESULTADOS E DISCUSSÕES DOS DADOS

Comparando os métodos de cálculo de distâncias sobre a Terra no primeiro exercício, percebe-se que a geometria plana não é adequada para trajetos longos, como os aéreos. Ao aplicar sua fórmula às coordenadas do Rio de Janeiro e Porto Alegre, obteve-se 1.188,01 km, valor superior aos 1.120,1 km calculados pela Lei dos Cossenos Esféricos e aos 1.120,33 km obtidos pela fórmula de Haversine. Através da figura 19 podemos observar uma simulação de onde o voo chegaria se considerássemos a distância encontrada pela equação (4).

Na segunda aplicação, a distância ortodrômica entre o Alasca (EUA) e Queenstown (Nova Zelândia) foi calculada utilizando a Lei dos Cossenos Esféricos e a Fórmula de Haversine, resultando em aproximadamente 12.356,98 km e 12.377,68 km, respectivamente, com erro percentual de apenas 0,175%. O Google Earth forneceu valor semelhante (12.345,02 km), confirmando a precisão dos métodos esféricos.

Em contraste, a distância calculada pela geometria plana foi de 37.328,29 km, prolongando significativamente o percurso real. A simulação do consumo de combustível utilizando o modelo de aeronave Airbus A350-900 ULR demonstrou que, considerando a distância esférica, seriam necessários cerca de 96.676 litros, enquanto o cálculo plano indicaria 291.980 litros, gerando uma diferença de 195.304 litros, reforçando a importância da geometria esférica para rotas longas.

Isso ocorre porque a geometria plana ignora o formato esférico da Terra, considerando como uma superfície bidimensional. Ao projetar os pontos (latitude e longitude) sobre um plano, acaba esticando artificialmente a distância entre eles, como se estivesse achatando o formato esférico da Terra, deixando-a semelhante a um disco circular.

Em outras palavras, ao converter a superfície curva da Terra para um plano, o trajeto que originalmente era um arco de círculo máximo passa a ser representado como uma linha reta. Embora esse percurso possa parecer mais direto visualmente, ele se torna numericamente mais longo, em razão da distorção nas proporções reais da esfera. Por esse motivo, em aplicações em longas distâncias como a aviação, nas quais se busca o trajeto mais eficiente e preciso, a trigonometria esférica torna-se indispensável, respeitando o formato da Terra e garantindo rotas mais reais, seguras e econômicas no espaço geográfico.

Além disso, os resultados demonstram que os métodos baseados na geometria esférica, como a Lei dos Cossenos e a fórmula de Haversine, oferecem não apenas mais precisão, mas também coerência com a realidade geográfica. A diferença observada nos valores mostra que trajetos aéreos exigem uma representação próxima à forma da superfície terrestre, algo que a geometria plana não consegue oferecer com precisão. Esse tipo de erro, embora aparentemente pequeno, pode representar dezenas de quilômetros de imprecisão, como representado na segunda aplicação, impactando diretamente o planejamento de rotas, o consumo de combustível e a segurança dos voos.

Vale destacar ainda que a utilização da trigonometria esférica neste contexto não se limita a um exercício matemático, mas também evidencia sua relevância prática e educacional. Trabalhar com situações reais como esta, aproxima o conteúdo da realidade dos alunos, abordando que a distância entre dois pontos também pode ser uma curva dependendo do contexto, promovendo uma aprendizagem mais significativa. O uso de exemplos da aviação para tratar de conteúdos matemáticos mostra que a matemática pode ser aplicada a problemas do mundo real e que, por meio dela, é possível interpretar, modelar e resolver desafios complexos de forma eficiente, também fazendo uso de recursos tecnológicos, visto que estamos em uma época que os jovens estão cada vez mais envolvidos com a tecnologia.

Portanto, essa análise dos dados obtidos reforça que o uso da geometria esférica não é somente adequado, mas necessário quando se trata de trajetos geográficos amplos.

9 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização deste trabalho permitiu compreender a necessidade do surgimento da geometria esférica e, a relevância da trigonometria esférica como uma ferramenta matemática precisa e fundamental para o cálculo de distâncias sobre a superfície curva da Terra. A aplicação prática das fórmulas, como a lei dos cossenos e a fórmula de Haversine, demonstrou resultados consistentes e mais próximos da realidade quando comparados ao modelo plano. A diferença entre os métodos evidencia que, em escalas geográficas amplas, é indispensável utilizar modelos que considerem a forma esférica do planeta.

Os dados apresentados na primeira aplicação mostraram claramente a diferença entre os métodos. Enquanto a geometria plana resultou em uma distância de 1.188,01 km entre os aeroportos de SBRJ e SBPA, os métodos esféricos pela Lei dos Cossenos e pela fórmula de Haversine apontaram distâncias praticamente idênticas, de 1.120,1 km e 1.120,33 km, respectivamente.

No segundo exercício, envolvendo o cálculo da distância ortodrômica entre o Alasca (EUA) e Queenstown (Nova Zelândia), reforçou ainda mais a importância da geometria esférica em trajetos de longa distância. Os métodos esféricos, tanto a Lei dos Cossenos quanto a Fórmula de Haversine e a representação no Google Earth, apresentaram resultados consistentes e próximos da realidade, enquanto a geometria plana superestimou significativamente o percurso. A simulação do consumo de combustível da aeronave Airbus A350-900 ULR, demonstrou de forma prática, como pequenas discrepâncias nos cálculos podem resultar em variações significativas. Essas evidências, reforçam a conclusão de que o formato esférico da Terra deve ser considerado em aplicações que exigem precisão, como no planejamento de rotas aéreas. Além disso, o uso adequado da trigonometria esférica contribui não apenas para a economia de combustível, mas também para a redução das emissões de carbono, destacando sua relevância em um cenário global cada vez mais voltado para a sustentabilidade.

A metodologia adotada permitiu não apenas a execução dos cálculos, como também favoreceu uma análise crítica dos resultados com base no referencial teórico empregado. Os conceitos de círculo máximo, ortodromia e relações trigonométricas esféricas se mostraram coerentes com os resultados encontrados, confirmando a validade dos modelos aplicados. A análise entre os métodos expôs não só suas aplicações práticas, mas também revelou como os fundamentos teóricos do círculo máximo e ortodromia, reforçam a consistência e aplicabilidade dos modelos usados.

Com base nas evidências levantadas, defendemos que a trigonometria esférica não é apenas recomendável, mas essencial em contextos de larga escala geográfica. A curvatura da Terra não pode ser ignorada quando a precisão é exigida, especialmente em aplicações como o planejamento de rotas aéreas, onde cada quilômetro faz diferença, para uma viagem de menor distância possível, na economia do combustível e na segurança aérea. Essa análise reforça a importância da evolução da matemática ao longo dos anos.

Por fim, como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a aplicação de um estudo didático sobre trigonometria esférica no Ensino Médio ou na Licenciatura em Matemática, ensinando sobre os triângulos esféricos e suas aplicações em distâncias reais, usando tecnologia e interdisciplinaridade, como por exemplo as resoluções das questões atribuídas nesse presente estudo, onde foram modelados os exercícios de forma ilustrativa usando o software GeoGebra e Google Earth. Isso poderia abranger esse campo com cálculos em milhas náuticas, trazendo exemplos reais, de como essas companhias fazem a melhor trajetória para resgatar um grupo de pessoas em alto mar ou até mesmo o transporte de mercadorias através de rotas marítimas, por exemplo.

REFERÊNCIAS

BENEVIDES, F. S. *Material Teórico – Módulo Trigonometria I Material*: Sistema de Unidade de Medida de Ângulos. Segundo ano do Ensino Médio. Revisor: Antonio Caminha M. Neto. Portal OBMEP, 19 mar. 2022. Disponível em: https://cdnportaldaoimpbep.br/portaldaoimpbep/uploads/material_teorico/4fdrvag60cg0k.pdf. Acesso em: 10 jul. 2025.

BEZERRA, L. F. da S. *A trigonometria esférica como solução para a navegação astronômica*. Dissertação de Mestrado em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2019. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 15 jun. 2025.

BRASIL. MEC. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, 2018. Disponível em: <https://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/#fundamental/matematica-no-ensino-fundamental-anos-finais-unidades-tematicas-objetos-de-conhecimento-e-habilidades>. Acesso em: 13 de jun. 2025.

BRASIL ESCOLA. *Regra de três simples*: como fazer, exemplos, questões. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/regra-tres-simples.htm>. Acesso em: 16 ago. 2025.

CAMPEIRO, F. M. dos S. *Modelagem Matemática*: reflexões de um minicurso para professores. Anais do XVIII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática, v. 18, n. 1, p. 378-385, 19 dez. 2024. [Comunicação oral]. Campo Grande: UFMS, 2024. Disponível em: <https://periodicos.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/21757>. Acesso em: 14 ago. 2025.

FARIA, J. M. de. *Trigonometria Esférica*: Origens e Aplicações. Dissertação de Mestrado em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal de São Paulo, São José dos Campos, 2020. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 17 jun. 2025.

FROST, J. *Percent error*: definition, formula & examples. Statistics By Jim, 2018. Disponível em: <https://statisticsbyjim.com/basics/percent-error/>. Acesso em: 14 ago. 2025.

GEOGEBRA. *Sobre o GeoGebra*. GeoGebra. Disponível em: <https://www.geogebra.org/about?lang=pt-PT>. Acesso em: 14 ago. 2025.

GIL, A. C. *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008. Disponível em: <https://ayanrafael.com/wp-content/uploads/2011/08/gil-a-c-mc3a9>

todos-e-tc3a9cnicas-de-pesquisa-social.pdf. Acesso em: 12 jul. 2025.

GOOGLE. *Google Earth*. Google Maps Platform. Disponível em: https://mapsplatform.google.com/intl/pt-BR_br/maps-products/earth/. Acesso em: 14 ago. 2025.

HECKMAN, K. *Haversine – Distance*. vCalc, 13 set. 2024. Disponível em: <https://www.vcalc.com/wiki/vcalc/haversine-distance>. Acesso em: 10 jul. 2025.

MARTINS, G. da S. *Geometria esférica e aplicações*. Dissertação de Mestrado em Matemática – PROFMAT, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados, 2024. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 15 jun. 2025.

MEDEIROS, V. *Maior rota de avião do mundo tem duração de 18 horas e 40 minutos e percorre 15.348 km sem pousar para reabastecimento ou manutenção da aeronave – uma verdadeira “maratona aérea”*. Click Petróleo e Gás, 7 jun. 2025. Disponível em: <https://clickpetroleoegas.com.br/maior-rota-de-aviao-do-mundo-tem-duracao-de-18-horas-e-40-minutos-e-percorre-15-348-km-sem-pousar-vm197/>. Acesso em: 14 ago. 2025

MLODINOW, L. *A Janela de Euclides: a história da geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço*. Tradução de Enézio de Almeida. São Paulo: Geração Editorial, 2004.

NEVES, W. das. *Cálculo de rotas aéreas*. SphaericaEst, 5 out. 2020. Disponível em: <https://sphaericaest.com.br/2020/10/05/calculo-de-rotas-aereas/>. Acesso em: 10 jul. 2025.

OVERLEAF. *Sobre o Overleaf*. Overleaf. Disponível em: <https://pt.overleaf.com/about>. Acesso em: 14 ago. 2025.

SILVA FILHO, A. E. P. da. *A trigonometria esférica e o globo terrestre*. Dissertação de Mestrado em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal do Ceará, Juazeiro do Norte, 2014. Disponível em: <https://profmatsbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 13 jun. 2025.

SILVA, H. J. C. C. da. *Descobrimo a geometria esférica com Anselmo*. Dissertação de Mestrado em Matemática – PROFMAT, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2024. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 13 jun. 2025.

SILVA, L. P. da. *Trigonometria esférica e seu estudo no software Geogebra 3D*. Dissertação de Mestrado – PROFMAT, Universidade Federal de São Paulo, Diadema, 2021. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 13 jun. 2025.

SILVA, W. D. *Uma introdução à Geometria Esférica*. Dissertação de Mestrado em Matemática - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2015. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 17 jun. 2025.

TELECO. *Cálculo da distância entre dois pontos*, (s.d.) Disponível em: https://www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialsmsloc2/pagina_5.asp#:~:text=Dado%20C%20C3%A9%20poss%C3%ADvel%20calcular,a%20aproximadamente%20111%2C11%20km. Acesso em: 12 jul. 2025.

VINHOLES, T. *Novo Airbus A350 de “alcance ultra longo” completa primeiro voo*. Airway, 25 abr. 2018. Disponível em: <https://www.airway.com.br/novo-airbus-a350-de-alcance-ultra-longo-completa-primeiro-voo/>. Acesso em: 14 ago. 2025.

VIRGILI, W. H. *Geometria Esférica: Uma Abordagem Matricial para os Teoremas do Cosseno e do Seno nos Triângulos Esféricos*. Dissertação de Mestrado em Matemática - PROFMAT, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, 2022. Disponível em: <https://profmat-sbm.org.br/dissertacoes/>. Acesso em: 17 jun. 2025.