O PARADOXO DA RODA DE ARISTÓTELES E ALGUMAS POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA

ARISTOTLE'S WHEEL PARADOX AND SOME POSSIBILITIES FOR TEACHING MATHEMATICS

Wesley Sydney Cavalcante Damaso
wscd@discente.ifpe.edu.br
Bruno Lopes Oliveira da Silva
bruno.lopes@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar o paradoxo da roda de Aristóteles e discutir como sua resolução pode contribuir para o ensino de conceitos matemáticos. A pesquisa, de natureza qualitativa e bibliográfica, baseia-se em autores como Brousseau (1986), Gandt (1986), Machado (2008) e Carvalho (2023), e compreende uma abordagem histórica sucinta da matemática grega até os pensamentos de Aristóteles e Galileu. A resolução proposta por Galileu Galilei, ao considerar o uso de infinitesimais e a equivalência de cardinalidade entre pontos, fornece subsídios para o ensino de conteúdos como perímetro, circunferência, limites e transformações geométricas. Os resultados indicam que o paradoxo pode ser utilizado como recurso didático para fomentar o raciocínio lógico e a aprendizagem ativa por meio da problematização, apresentando potencialidades na introdução de conceitos abstratos nos ensinos fundamental, médio e superior.

Palavras-chave: Paradoxo da Roda de Aristóteles. Ensino de Matemática. Galileu. História da Matemática.

ABSTRACT

This study aims to analyze Aristotle’s wheel paradox and discuss how its resolution can contribute to the teaching of mathematical concepts. The research, which is qualitative and bibliographic in nature, is based on authors such as Brousseau (1986), Gandt (1986), Machado (2008), and Carvalho (2023), and includes a concise historical overview of Greek mathematics up to the ideas of Aristotle and Galileo. The resolution proposed by Galileo Galilei, by considering the use of infinitesimals and the cardinality equivalence between points, provides support for teaching topics such as perimeter, circumference, limits, and geometric transformations. The results indicate that the paradox can be used as a didactic resource to foster logical reasoning and active learning through problematization, showing great potential in introducing abstract concepts in elementary, secondary, and higher education.

Instituto Federal de Pernambuco *Campus* Pesqueira. Curso de Licenciatura em matemática.

Keywords: Aristotle's Wheel Paradox. Mathematics Education. Galileo. History of Mathematics.

1. INTRODUÇÃO

Diante das dificuldades dos estudantes em compreender conceitos matemáticos como infinito, medidas e geometria, este trabalho busca investigar de que maneira o paradoxo da roda de Aristóteles pode ser utilizado como recurso didático para promover uma aprendizagem mais significativa nas aulas de matemática.

Um paradoxo pode ser entendido como um pensamento, proposição ou argumento que vai contra o entendimento dos princípios básicos e gerais, que costumam orientar a forma de estudo humana. Segundo o Michaelis (2023), no termo filosofia, têm-se que é o "pensamento ou argumento que contraria os princípios que costumam nortear o pensamento humano ou desafia o conhecimento e a crença da maioria dos seres humanos.

Já para a lógica, o paradoxo é um raciocínio aparentemente bem fundamentado e coerente, embora esconda contradições decorrentes de uma análise insatisfatória de sua estrutura interna. Segundo Paradoxo (2020, apud Carvalho 2023, p. 33) a "etimologia (origem da palavra paradoxo), deriva do grego *'parádoksos,os,on'*, que significa estranho, pelo latim *'paradoxon,i'*.

Os paradoxos foram de grande importância para o desenvolvimento da matemática, pois apontavam para novas formas de se enxergar os conceitos matemáticos permitindo seu aprofundamento e extrapolação.

A escolha do estudo do paradoxo da roda de Aristóteles dar-se-á pela complexidade em entender como funcionam os paradoxos e como eles podem ser uma fonte valiosa para perceber melhor os conceitos matemáticos, que via de regra são abstratos. Além do mais, na resolução proposta por Galileu são tratados conceitos geométricos e infinitesimais, que ao serem ensinados, percebe-se grandes obstáculos epistemológicos no entendimento dos estudantes, principalmente nos anos finais do ensino fundamental, ensino médio e o ensino superior.

Para Bachelard (1996), "o conhecimento científico não se constrói de forma linear, mas por meio de rupturas com saberes prévios e intuitivos". Esses saberes, muitas vezes oriundos do senso comum, funcionam como obstáculos epistemológicos que impedem ou dificultam o avanço do pensamento científico. No contexto do ensino, esses obstáculos se manifestam quando concepções espontâneas dos alunos entram em conflito com os conceitos científicos que se pretende ensinar, exigindo do educador estratégias que provoquem uma superação ativa dessas ideias.

O paradoxo que pretendemos estudar neste trabalho consiste em duas rodas fixadas rigidamente a um mesmo ponto central, em que uma roda menor está dentro da outra, mas o raio da roda externa é duas vezes maior que o da roda interna. Suponha que essas rodas combinadas façam uma revolução de exatamente uma volta completa e considere os caminhos traçados pelas partes inferiores das duas rodas, esses caminhos serão evidentemente iguais em comprimento às circunferências dos respectivos círculos, mas, embora os dois caminhos aparentemente tenham o mesmo comprimento, a circunferência da roda externa é duas vezes a da roda interna. Isto dá a impressão de ser uma contradição, ou um

paradoxo, porque apesar de uma roda ser maior que a outra elas possuem o mesmo comprimento.

A importância do estudo sobre o paradoxo é contribuir para o desenvolvimento de novas técnicas de ensino dos conteúdos matemáticos que poderão ser explorados na concepção e nas resoluções deste, e assim, auxiliar futuros professores na escolha da melhor estratégia didática na transmissão desses conteúdos, facilitando o aprendizado dos estudantes por meio do esclarecimento obstáculos epistemológicos de ensino inerentes ao tema escolhido, que possam dificultar o entendimento dos conteúdos.

Machado (2008, p. 123), afirma que: “Guy Brousseau em 1976, foi um dos primeiros a introduzir a noção de obstáculos epistemológicos na aprendizagem da matemática”. Ademais, para ela “um obstáculo de origem epistemológica e verdadeiramente constitutivo do conhecimento, é aquele do qual não se pode escapar e que se pode, em princípio, encontrar na história do conceito”. Além do mais, ela reconhece alguns dos principais obstáculos epistemológicos encontrados no processo de ensino aprendizagem da matemática, dentre eles dois objetos de estudo do paradoxo da roda, são os conceitos geométricos e de infinito. Segundo Machado (2008),

> As noções de números, de função, de limite, geométricas e de infinito são noções que criaram obstáculos persistentes no processo de construção e continuam a criar no processo de aprendizagem, e por essa razão, têm sido analisadas por diversos pesquisadores. (MACHADO, 2008, p.131).

Para compreender melhor algumas formas de se enfrentar esses obstáculos, baseados na Teoria das Situações didáticas (TSD) de Guy Brousseau (1986), são repassados alguns processos que podem ser seguidos para se obter o resultado, tais como: *transmissão* de uma situação problema do professor para o aluno, que no contexto abordado seria o paradoxo; a *devolução*, que é uma etapa importante na recepção do desafio de resolver o problema pelo aluno; a *situação adidática* de ação, que se traduz no empenho do aluno em buscar a resolução; a *validação matemática* do problema; e a *formulação* de uma resposta através de textos e linguagens matemáticas. Esses processos formam um ciclo e juntos auxiliam na construção do conhecimento matemático.

Nesse sentido, a questão norteadora deste trabalho é:

“Como o paradoxo da roda de Aristóteles e a resolução proposta por Galileu Galilei em sua obra “*Discursos* e *Demonstrações Matemáticas relativas a Duas Novas Ciências”*, pode contribuir no processo de ensino de conceitos matemáticos e quais estratégias podem ser adotadas trabalhando o paradoxo em salas de aula?”

Dessa forma, propõem-se os seguintes objetivos para esse estudo:

Objetivo geral:

- Investigar como o paradoxo da roda de Aristóteles e a resolução de Galileu podem ser utilizados como ferramenta didática para superar obstáculos epistemológicos no ensino de conceitos matemáticos, e propor estratégias pedagógicas eficazes para a sua abordagem em sala de aula.

Objetivos específicos:

- Estudar o pensamento de Aristóteles para formulação do paradoxo e a resolução proposta por Galileu Galilei em sua obra "Discursos e Demonstrações Matemáticas relativas a Duas Novas Ciências";
- Avaliar o potencial didático do paradoxo e das estratégias propostas na facilitação da compreensão de conceitos matemáticos complexos; e
- Propor estratégias pedagógicas que utilizem o paradoxo da roda de Aristóteles como recurso didático para a superação desses obstáculos.

Essa análise busca fornecer uma forma alternativa ao ensino tradicional, em que utiliza-se o paradoxo como forma de incentivo e desafio para os alunos, permitindo que eles construam seus conhecimentos lidando melhor com os obstáculos epistemológicos inerentes ao tema. Para alcançar esses objetivos, foi realizada uma pesquisa bibliográfica de caráter qualitativo, fundamentada em autores da história da matemática, filosofia e didática de ensino de matemática.

Ao propor essa forma alternativa de ensino, este estudo pretende contribuir com novas formas de abordagens de temas matemáticos, apresentado também um exemplo de sequência didática que pode ser adaptada e utilizada em salas de aula, do ensino fundamental anos finais, ensino médio e ensino superior.

Depois de apresentar todos os pressupostos a este trabalho, trataremos a seguir de nossa fundamentação teórica.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Para se debater sobre o paradoxo das rodas de Aristóteles primeiro é necessário conhecer o que influenciou diretamente em seus estudos por áreas distintas como filosofia, política, física e matemática, ademais, é preciso entender o pensamento de Aristóteles quando formulou o paradoxo dos dois círculos e posteriormente conhecer Galileu Galilei e como ele propôs uma solução para esse paradoxo.

2.1 A matemática grega e Aristóteles

A matemática grega teve seu desenvolvimento inspirado nas descobertas que ocorreram nas civilizações Egípcias e babilônicas, por volta de 800 a.C durante o período histórico conhecido como Era Helênica. A Grécia, entretanto, introduziu o conceito de demonstração lógica e rigor matemático, o que levou a uma verdadeira revolução no campo da aritmética e da geometria.

Embora Aristóteles não tenha desenvolvido a matemática com a formalização dos geômetras como Euclides ou Arquimedes, sua contribuição foi decisiva ao estabelecer fundamentos filosóficos que influenciaram profundamente a forma como o conhecimento matemático foi compreendido e estruturado na tradição ocidental. De acordo com Roque (2012, p. 33), Aristóteles forneceu uma base epistemológica ao distinguir os tipos de conhecimento e ao classificar a matemática como um saber demonstrativo. Eves (2004, p. 141) também destaca que, “mesmo sem ser matemático no sentido técnico, Aristóteles exerceu influência ao tratar da lógica e da estrutura do raciocínio, pilares fundamentais da matemática”.

Aristóteles nasceu em Estagira, cidade do Norte da Grécia continental, junto à Trácia e à Macedónia, em 384 a.C., o pai de Aristóteles se chamava Nicómaco, era médico e pertencia a uma antiga família asclepíada (Mesquita, 2005, p.67). Tradicionalmente as descendências dele eram conhecidas pelo cultivo das artes

clínicas. Aristóteles foi um dos filósofos mais influentes da Antiguidade, foi para Atenas e estudou na Academia fundada por Platão se tornando assim um dos seus discípulos. Além do mais, a convite do Rei da macedônia ele se tornou tutor de Alexandre, que pouco depois ficou conhecido através de suas conquistas por “Alexandre o Grande” (Barbosa, 2009, p.56).

Embora suas contribuições diretas à matemática tenham sido menos proeminentes do que as de outros pensadores gregos, como Euclides ou Pitágoras, Aristóteles desempenhou um papel crucial no desenvolvimento do pensamento lógico e científico, que foi essencial para a matemática.

> Para Aristóteles, conhecimento e ensino eram considerados inseparáveis, uma vez que “em geral, o que distingue quem sabe de quem não sabe é a capacidade de ensinar” (ARISTÓTELES, Met., A 1, 981b 5-10, 2002a, p. 7). “Mais ainda, reputamos que, em cada ciência, seja mais sábio quem possui maior conhecimento das causas e quem é capaz de ensiná-las aos outros”. (BARBOSA, 2009, p.56)

Ao contrário de seu mestre Platão, Aristóteles rejeitava a ideia do mundo das ideias ou formas perfeitas. Para Platão, os números e as figuras geométricas existiam em um mundo ideal independente do mundo sensível, ele, no entanto, defendia que os objetos matemáticos eram abstrações derivadas das coisas concretas do mundo real: Um círculo perfeito, por exemplo, não existe na natureza, mas podemos abstrair seu conceito a partir de objetos circulares imperfeitos, assim, os números e as formas geométricas são propriedades ou características que podem ser extraídas do mundo físico, mas não têm existência separada.

Aristóteles também admirava a eficácia dos métodos axiomáticos, no entanto pensava diferente do seu mestre ao considerar que cada ramo científico deveria ter os seus próprios pressupostos (Barbosa, 2009). Essa visão tornou a matemática aristotélica mais próxima do empirismo e influenciou a ciência ocidental por séculos, diferente de seu professor Platão.

> Enquanto Platão situa o âmbito ontológico dos entes matemáticos como “intermediários” entre os outros dois, a saber, o das coisas sensíveis e o mais alto, que compreende as Ideias, Aristóteles não apenas nega o caráter suprassensível dos objetos da matemática, mas oferece como resposta o seu próprio entendimento dos entes matemáticos. (BARBOSA, 2009)

Partindo desse pensamento, Aristóteles foi o criador da lógica formal, que se tornaria uma ferramenta essencial para o desenvolvimento da matemática e da ciência, que é utilizada até os dias atuais como parte do raciocínio logico matemático. A lógica apresentada nos *Primeiros Analíticos (Analytica Priora)* “[...] serve para derivar os teoremas de uma ciência a partir de seus axiomas” (Barnes, 2005, p.57). Nesta obra, Aristóteles ocupa-se do raciocínio formal, a teoria do silogismo, que é provavelmente a sua maior contribuição à lógica.

Um argumento válido – também chamado de silogismo – é aquele que, quando aplicado a premissas verdadeiras, necessariamente leva a conclusões verdadeiras (Farjado, 2017, p.43).

A lógica aristotélica serviu de base para o rigor lógico exigido na matemática e influenciou diretamente pensadores como Euclides, que aplicou um sistema dedutivo semelhante em sua obra "Os Elementos" (Barbosa, 2009).

Aristóteles dedicou-se profundamente ao estudo da natureza (física) e acreditava que a matemática desempenhava um papel importante, embora subordinado à observação empírica das coisas e levando em consideração o ser, ele reconhecia a utilidade da matemática para descrever fenômenos naturais, mas acreditava que a física, por lidar com o mundo material e palpável, era mais fundamental do que a matemática. Por exemplo, ele argumentava que conceitos matemáticos, como formas geométricas ideais, eram abstrações úteis, mas que a natureza não poderia ser reduzida apenas a números e figuras.

Já na visão de Aristóteles sobre o círculo, percebe-se uma profunda ligação à sua cosmologia, física e metafísica, refletindo sua compreensão do universo, da natureza e do ser. “Para ele, a região celeste é perfeita, eterna e, por isso, deve ser composta de um elemento perfeito” (Campos e Ricardo, 2014, p.03). Este elemento citado é responsável tanto pela composição das esferas, quanto da matéria celeste e pelo movimento circular, movimento feito pelas estrelas, planetas e astros. Este elemento é chamado de éter: incorruptível e perfeito assim como é a perfeição geométrica das esferas (Campos e Ricardo, 2014, p.03).

Para Aristóteles, o círculo era como uma figura perfeita devido às suas características geométricas, as quais: a circunferência é definida como o conjunto de todos os pontos de um plano que estão à mesma distância de um ponto fixo, chamado centro. Essa propriedade caracteriza a regularidade geométrica da figura e é fundamental no estudo das formas circulares (DANTE, 2022, p. 257), – podemos notar isso através do conceito que conhecemos como raio, ao traçar uma reta entre o ponto central e qualquer um dos pontos da circunferência - não possui "começo" nem "fim", representando a eternidade e a uniformidade, por essa razão, o círculo simbolizava a ordem e a harmonia dos cosmos, temas centrais na filosofia aristotélica e em sua obra conhecida como “Metafísica”.

> Da mesma maneira que a região terrestre é esférica, todo o resto deve ser esférico, pois o esférico é vizinho ao esférico, e, portanto, a partir do centro do mundo, da região onde se localiza o elemento terra Aristóteles também defende sua crença num mundo esférico. (CAMPOS e RICARDO, 2014, p.04)

Aristóteles aplicou essa ideia à sua cosmologia, sugerindo que os corpos celestes (como o Sol, a Lua e as estrelas) se movem em órbitas circulares ao redor da Terra, refletindo sua perfeição e eternidade. O movimento dos astros era visto como uma manifestação da ordem divina e do funcionamento harmonioso do universo, ele defendia o modelo geocêntrico do cosmos, no qual: A Terra ocupa o centro do universo e é imóvel, ao redor da Terra, os astros se movem em esferas circulares concêntricas, o círculo, portanto, representava o caminho natural e ordenado dos corpos celestes, cuja regularidade refletia a perfeição do cosmos, como citado abaixo:

> O fato de as figuras esféricas encaixarem-se perfeitamente umas às outras faz com que outra crença aristotélica seja respeitada, a de que não há vazio na natureza, pois se o mundo tivesse outro formato possibilitaria a existência de espaços vazios. Dessa maneira, após a região terrestre encontram-se os sete planetas conhecidos incrustados em sete esferas concêntricas, sempre tendo a Terra em seu centro. (CAMPOS e RICARDO, 2014, p.04)

Embora Aristóteles tenha criticado a visão idealista de Platão, ele reconhecia a importância do círculo na geometria, era um exemplo fundamental de uma forma geométrica perfeita e servia como base para muitos conceitos matemáticos, contudo, ele argumentava que o círculo geométrico não existe no mundo físico, sendo apenas uma abstração criada pela mente humana, através desse pensamento ele propôs em sua obra *Mecânica* o que ficaria conhecido como “Paradoxo da roda de Aristóteles”.

2.2 O Paradoxo da roda de Aristóteles

O paradoxo consiste em duas rodas fixadas rigidamente a um mesmo ponto central P, onde a roda R está dentro da roda Q, mas o raio da roda Q é duas vezes maior que o da roda R. Suponha que essas rodas combinadas façam uma revolução de exatamente uma volta completa e considere os caminhos traçados pelas partes inferiores das duas rodas, que são as retas paralelas $AB \parallel CD$.

Esses caminhos são evidentemente iguais em comprimento às circunferências dos respectivos círculos, mas, embora os dois caminhos aparentemente tenham o mesmo comprimento, a circunferência da roda externa é duas vezes a da roda interna. Isto dá a impressão de ser uma contradição, ou um paradoxo, porque apesar de uma roda ser maior que a outra elas possuem o mesmo comprimento.

A contradição surge quando se observa que, geometricamente, a roda de maior raio deveria percorrer um caminho maior do que a roda de menor raio, considerando que o comprimento da circunferência é diretamente proporcional ao raio (CARVALHO, 2023), observe a Figura 1.

Figura 01: Paradoxo das rodas de Aristóteles

Fonte: Elaborada pelo autor

Esse paradoxo foi proposto na Antiguidade por Aristóteles em sua obra Mechanica (*Μηχανικά*), sendo o Problema nº 24 (Gandt, 1986). Essa situação paradoxal não se limita a uma curiosidade matemática. Ela evidencia limitações do entendimento da época sobre conceitos como medida, continuidade, proporção e movimento. O paradoxo antecipa, de forma instintiva, discussões profundas sobre infinitesimais e limites, que só seriam formalizados muitos séculos depois.

Para melhor visualização de todas as animações desse estudo, disponibilizo o link da apresentação em Powerpoint no rodapé desta seção.

Link para as animações:
https://1drv.ms/p/c/9b67fb496e94dcb7/EevhIppUFGFPnXYG4lK8EvABGCavCfH1wJnWoIItMdj3Uw?e=2FZfX4

2.3 Conhecendo Galileu Galilei e a matemática moderna

Para prosseguir até o paradoxo da roda de Aristóteles, é necessário conhecer quem conseguiu propor uma solução a ideia dele, que foi Galileu Galilei.

Galileu Galilei nascido em 1564 na cidade de Pisa na Itália, foi um matemático, físico, astrônomo e filósofo italiano, que fundamentou cientificamente a teoria Heliocêntrica de Copérnico; desmitificou lendas astronômicas e estabeleceu alguns princípios, causando uma grande renovação da história da ciência como conhecemos (Ribeiro, 2014).

Conta-se que Galileu ao observar o movimento de um lustre na catedral de Pisa, conseguiu notar suas oscilações e verificou que o movimento que ele fazia era similar ao de um pêndulo, periódico e que as pequenas oscilações eram regulares conforme este ia perdendo energia.

Em 1585, Galileu deixou a universidade sem qualquer graduação e retornou a Florença, onde estudou, independentemente, Euclides e Arquimedes (Ribeiro, 2014, p.01). Foi nesse período que ele começou a estudar e criticar as “leis do movimento” enunciadas por Aristóteles em suas obras, uma das principais críticas: de que a terra era o centro do movimento de todos os órgãos celestes.

Com 25 anos, Galileu não era bem-visto por outros professores, pois não possuía o título de formação na área que lecionava na Universidade de Pisa, além disso, ele ousava pôr em dúvida a Ciência descrita por Aristóteles. Ademais, pouco tempo depois Galileu perdeu o posto de professor, por causa de intrigas com outros docentes, entretanto em 1592, foi indicado e nomeado para lecionar na Universidade de Pádua, onde prosseguiu seus estudos e afrontas as obras de Aristóteles.

Por volta de 1609, ele “conseguiu determinar que a distância da queda de um corpo é proporcional ao quadrado do tempo decorrido e que a trajetória de um projétil é parabólica, ambas as conclusões contradizendo a física aristotélica” (Ribeiro, 2014).

Em 1610, Galileu publicou uma de suas obras relevantes que se contrapunha a ideia de Aristóteles, as observações astronómicas de Galileu fizeram com que este se inclinasse para a teoria de Copérnico (Ribeiro, 2014, p.01), era ela “*O Mensageiro das estrelas*”, que reuniu várias descobertas acerca dos astros, e que planetas eram diferentes de estrelas, além de que a terra não era o centro do universo, e sim rodeava uma estrela: o sol.

2.4 A resolução do paradoxo por Galileu

Buscando uma resposta para sua tese “em uma extensão finita pode existir uma infinidade de vazios”, Galileu discorre sobre o paradoxo da roda de Aristóteles (Gandt, 1986). A resposta foi vista em sua última obra publicada, conhecida como *“Discursos e Demonstrações Matemáticas relativas a Duas Novas Ciências”*, a solução foi notável por si só e influente na história da matemática e da física que conhecemos na atualidade.

Para buscar uma resposta Galileu apresenta uma interpretação baseada na decomposição da linha em um conjunto infinito de pontos intercalados por vazios infinitesimais (GANDT, 1986). Partindo de duas ideias iniciais: a primeira, consistia em imaginar que é fisicamente impossível que as duas rodas unidas rolassem sem que pelo menos uma delas “escorregue” em relação ao solo, quando presa a outra, portanto, não há razão para pensar que as retas traçadas pelos fundos ou

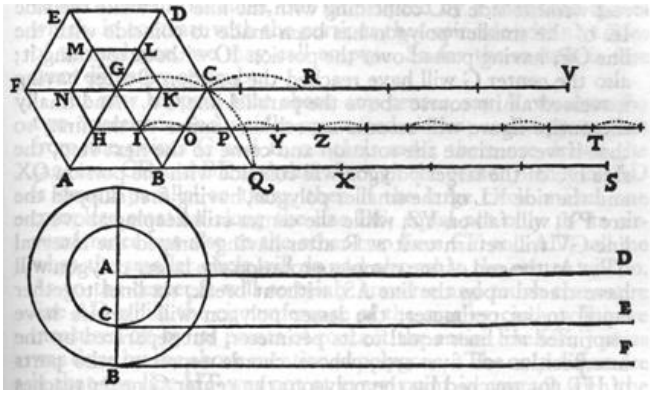
comprimento das rodas, sejam iguais, quando claramente uma é o dobro da outra; e segundo, mesmo que o comprimento de um dos caminhos possa não ser igual ao da roda que o cria, o conjunto composto pelos pontos nos caminhos e o conjunto composto pelos pontos na circunferência da roda têm a mesma cardinalidade, então não haveria contradição em haver uma correspondência um-para-um entre os pontos na circunferência da roda e os pontos no caminho.

Em suma Galileu propôs que, enquanto a roda externa mantém contato contínuo com o chão ao longo de sua rotação, a roda interna, por possuir um raio menor, realiza uma sequência de pequenos "saltos", deixando espaços não percorridos. Essa explicação, embora não formalizada segundo os critérios rigorosos da matemática contemporânea, antecipava discussões sobre continuidade, cardinalidade e infinitésimos.

Através dessas ideias iniciais, que a princípio já traduzem uma resposta que se contrapõem ao paradoxo, Galileu foi mais além, ele utilizou uma técnica que era comum na Grécia antiga: a de pensar em círculos comparando-os a polígonos regulares -vários lados iguais.

Considerando que as duas rodas não são circulares, mas sim hexágonos regulares, o que acontece quando essas rodas hexagonais “rolam”, ao longo do solo até dar uma volta completa retornando ao seu lado inicial apoiado sobre o solo? A situação foi ilustrada por ele em sua obra, observe a Figura 2.

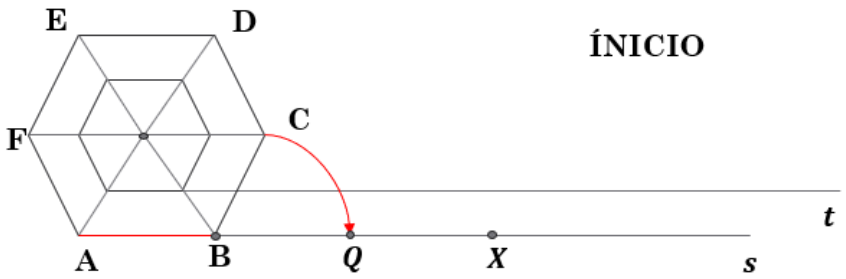
Figura 2: Paradoxo das rodas na resolução de Galileu



Fonte: Moschetti (2011, p.46)

Ao se utilizar a concepção e polígonos regulares, e olhando para a roda maior, inicialmente percebemos que ela está em repouso, com seu lado “AB” apoiado sobre o “solo” de acordo com a Figura 3.

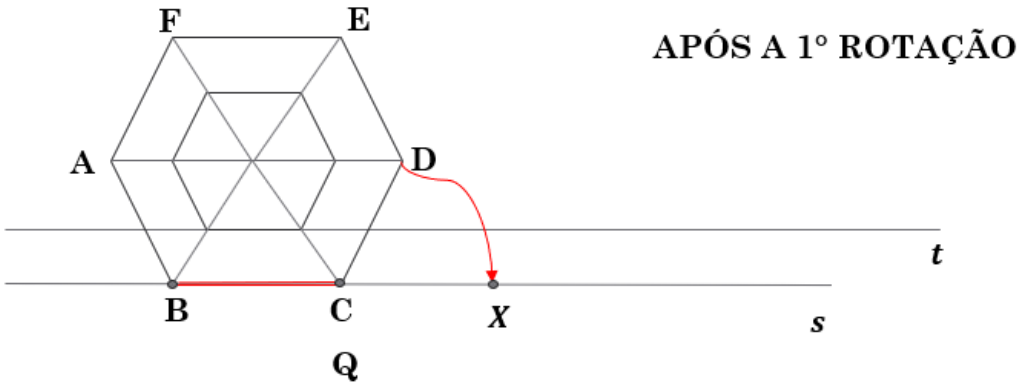
Figura 3: Início da demonstração da solução com o hexágono externo



Fonte: Elaborada pelo autor

Porém quando a roda dá seu primeiro passo de rotação em torno do ponto "B", percebesse que a ela fica com o lado "BC" sobre o solo, onde o vértice "C" ocupa agora o lugar do ponto "Q", Figura 4.

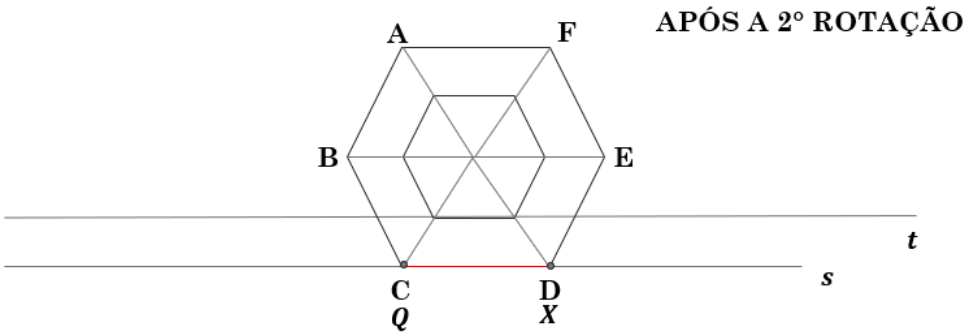
Figura 4: 2° passo da demonstração da solução com o hexágono externo



Fonte: Elaborada pelo autor

Após a segunda etapa em torno do vértice "C", o lado "CD" fica parado sobre o segmento "QX", Figura 5, e assim por diante até o fim de seu comprimento.

Figura 5: 3° passo da demonstração da solução com o hexágono externo

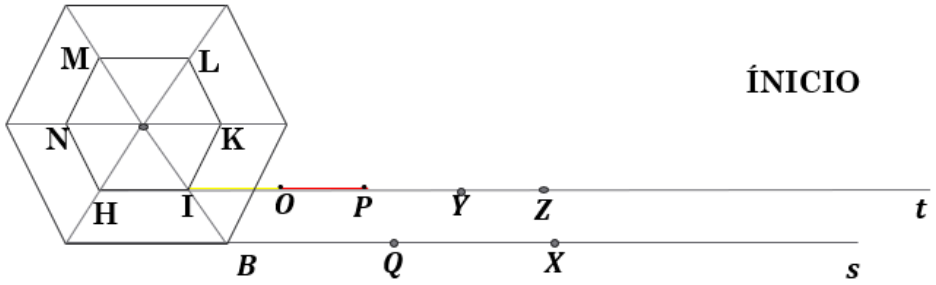


Fonte: Elaborada pelo autor

Ao longo da rotação da roda, todo o segmento $\overline{AS}$ da figura 3 é coberto sucessivamente pelos lados da roda externa, dessa forma o comprimento de $\overline{AS}$ é igual ao perímetro da roda externa.

Agora olhando para a roda hexagonal interna, inicialmente o lado "HI" está apoiado no segmento $\overline{HT}$, Figura 6.

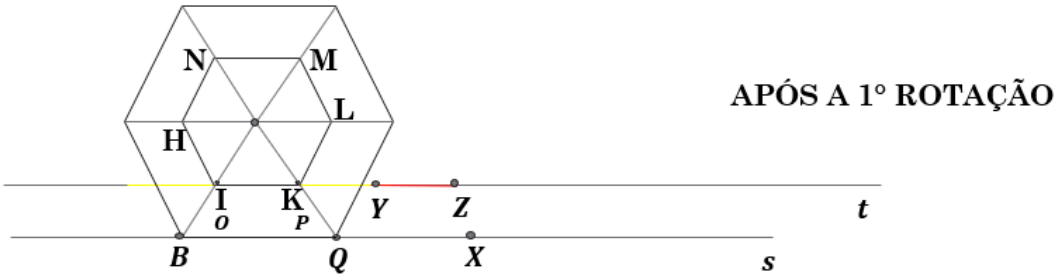
Figura 6: 1° passo da demonstração da solução com o hexágono interno



Fonte: Elaborada pelo autor

Após a primeira etapa da revolução em torno do ponto "B", porém, o lado "IK" não fica parado no segmento "IO", mas sim ele dá um "salto à frente" e recai sobre o segmento $\overline{OP}$, Figura 7 – o segmento de amarelo é o espaço saltado.

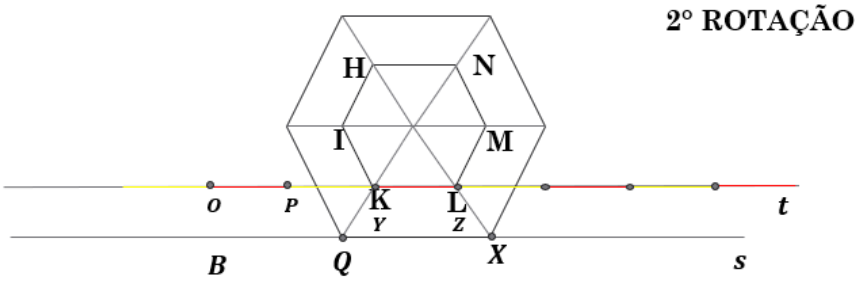
Figura 7: 2° passo da demonstração da solução com o hexágono interno



Fonte: Elaborada pelo autor

De forma semelhante após a segunda etapa, o lado "KL", salta pelo segmento $\overline{PY}$ e recai sobre o segmento $\overline{YZ}$, Figura 8, e assim por diante.

Figura 8: 3° passo da demonstração da solução com o hexágono interno

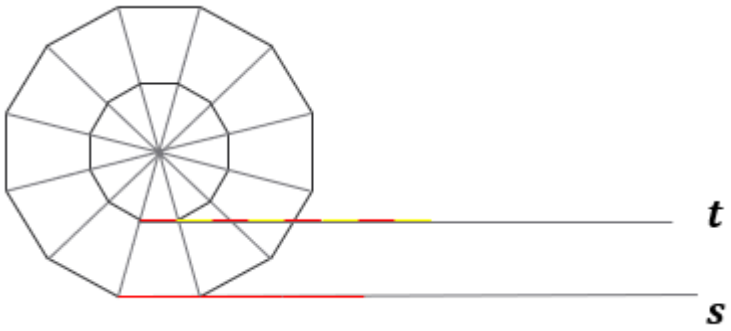


Fonte: Elaborada pelo autor

Portanto, as partes do segmento $\overline{HT}$ que são cobertas pelos lados do hexágono interno, durante a rotação, se alternam com as partes que são ignoradas, isso explica por que o segmento $\overline{AS}$ tem o mesmo comprimento do segmento $\overline{HT}$ – que no caso do hexágono fica um pouco estendido, conforme mostrado nas figuras- enquanto o perímetro da roda externa claramente é maior que o da roda interna.

Após essa observação Galileu, concluiu que conforme ele ia aumentado o número de lados dos polígonos regulares que ele utilizava, a distância que era “saltada”, ou seja, diminuía, e ficavam cada vez mais próximas umas das outras, Figura 9.

Figura 9: Simulação da demonstração com um dodecágono



Fonte: Elaborada pelo autor

Em suma, a conclusão que Galileu chegou é: sabendo que a circunferência pode ser dita como um polígono com infinitos lados, logo, o motivo pelo qual o comprimento do caminho traçado pela roda interna é igual ao da rota externa, é que o caminho interno consiste em infinitos pontos intercalados com infinitos espaços vazios, onde os pontos da roda interna “pulam”, enquanto o caminho traçado pela roda externa consiste apenas nos pontos que ela contém, e não nos espaços vazios que eram “saltados”.

> Aquilo que se passa com os hexágonos indica o caminho para entender o que ocorre no caso dos círculos: basta multiplicar o número de lados e considerar não mais hexágonos, mas polígonos com vinte ou mil lados. Então o pequeno polígono se apoiará mil vezes sobre a base e de cada vez deixara um pequeno segmento horizontal não tocado. A linha reta será constituída por mil pequenos segmentos separados por mil pequenos vazios (GANDT, 1986, p.32).

Pode-se, portanto, considerar que “o círculo pequeno percorre a linha fazendo um número infinito de saltos infinitamente pequenos. A linha horizontal será constituída por infinitos pontos vazios e pontos cheios (*infiniti ptntí prte piení e prte vacai*)” (Gandt, 1986, p.32).

2.5 Limitações e avanços teóricos

Apesar de Galileu ter chegado ao possível resultado do paradoxo da roda de Aristóteles, pelos padrões do conhecimento moderno, sabe-se que à época embora estivesse aparentemente correto o resultado, atualmente conhecemos que estava ligeiramente equivocado, porém isso não diminui a notável inventividade que Galileu teve, além de influenciar o estudo da matemática e da ciência.

> Esta solução surpreendente do paradoxo da roda de Aristóteles serve a Galileu como analogia para explicar diversos fenômenos fiscos: em primeiro lugar, a presença dos inúmeros pequenos vazios que causam a coesão; e em segundo lugar os casos de expansão ou de condensação ilimitada da matéria. Se a linha é decomposta em urna infinidade de elementos, ela pode então ser recomposta de modo a obter-se um comprimento maior. Basta introduzir suficientes vazios infinitesimais (Discorsi,p.72, apud Gandt, 1986).

Esse pensamento de Galileu em sua obra, auxiliou na revolução iniciada pela crescente aceitação do uso de quantidades infinitesimais na matemática, e seu trabalho foi estendido e refinado ao longo do século 17 por matemáticos como Cavalieri, Torriceli e Wallis, que abriram o caminho para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal no final do século, por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz.

Newton e Leibniz, revolucionaram o estudo da matemática ao descobrirem por diferentes caminhos, o Teorema Fundamental do Cálculo, contando que o primeiro estava na Inglaterra e o outro na Alemanha, então cada um descobriu de uma forma diferente sem, ao menos, conhecerem um a obra do outro. Newton e Leibniz inauguraram uma nova era no campo do cálculo e abriram novas possibilidades para o estudo e a compreensão dos limites (Carvalho, 2023, p.59).

> Leibniz desenvolveu a notação diferencial para representar as variações infinitesimais nas quantidades de x e y. Ele usou uma forma de escrever derivadas usando os símbolos dx e dy. Essa forma era bem mais fácil e flexível do que a utilizada por Newton. Alguns exemplos: $d(xy) = x\,dy + y\,dx; d\left(\frac{x}{Y}\right) = \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$; $d(x_n) = (\,n\,\times n-1)dx$. (BOYER, 1974, apud CARVALHO, 2023).

Como qualquer outro pensamento radical era para aquela época, o uso da matemática de infinitesimais não foi imediatamente aceito pelos matemáticos, na realidade, antes de conhecerem mais profundamente o conteúdo, houve uma forte oposição a ideia, o que ocasionou frequentemente no surgimento de novos paradoxos sobre uso de infinitos, ameaçando assim -talvez- o status que a matemática tinha, afetando também a concepção da geometria e da física, que até o momento eram consideradas um reino de certezas, como afirma Amir Alexander em seu livro *Infinitesimal: Como Uma Teoria Matemática Perigosa Moldou O Mundo Moderno:*

> O infinitamente pequeno era uma ideia simples que perfurou um grande e belo sonho: que o mundo é um lugar perfeitamente racional, governado por regras matemáticas rígidas ... Ao demonstrar que a realidade nunca pode ser reduzida a um raciocínio matemático estrito, o infinitamente pequeno libertou a ordem social e política da necessidade de hierarquias inflexíveis (ALEXANDER, 2016).

Então, ao estudar sobre a resolução do paradoxo da Roda de Aristóteles, é possível entender como surgiu uma das ideias sobre o infinito na matemática, desde o momento que Aristóteles pensava na circunferência como algo perfeito e infinito, até a resolução de um de seus pensamentos que curiosamente também utiliza da ideia do infinito existente como resolução.

2.6 Aspectos Matemáticos Envolvidos no Paradoxo

Do ponto de vista matemático, o paradoxo da roda envolve conceitos que são basilares tanto na matemática quanto no ensino desse conhecimento. Dentre eles, destacam-se:

- **Proporcionalidade e razão:** A relação entre o comprimento da circunferência e seu raio, expressa pela fórmula $C = 2\pi r$, é desafiada no paradoxo, uma vez que duas circunferências de raios diferentes parecem gerar o mesmo comprimento linear quando roladas.
- **Perímetro e medida:** A análise do paradoxo exige compreensão profunda das relações métricas entre figuras geométricas planas, especialmente noções de perímetro e medida de comprimento.
- **Construção de circunferências por meio de polígonos regulares:** O raciocínio utilizado por Galileu, que aproxima a circunferência por meio de polígonos com número crescente de lados, é um caminho natural para introduzir a ideia de limite.
- **Limite e continuidade:** O paradoxo convida à reflexão sobre a transição de estruturas discretas (polígonos) para estruturas contínuas (circunferências), antecipando conceitos essenciais do cálculo.
- **Infinito e cardinalidade:** A contradição aparente do paradoxo permite discutir, de forma acessível, a existência de conjuntos infinitos e a possibilidade de que dois conjuntos infinitos possam ter o mesmo tamanho (cardinalidade), ainda que intuitivamente pareçam distintos.

Esses aspectos são essenciais para a compreensão matemática do paradoxo e estão incluídos no currículo da educação básica e do ensino superior, sendo frequentemente uma fonte de desafios na aprendizagem dos estudantes.

2.7 Paradoxos, Obstáculos Epistemológicos e Ensino de Matemática

A partir da perspectiva da educação matemática, é possível compreender que situações paradoxais, como o paradoxo da roda de Aristóteles, atuam como importantes instrumentos para a superação dos chamados obstáculos epistemológicos. Conforme Machado (2008), “esses obstáculos são construções cognitivas que surgem no processo de aprendizagem, sendo muitas vezes herdados da própria história da construção dos conceitos científicos”.

Para entender como o paradoxo da roda de Aristoteles poderá ser utilizado no processo de ensino da matemática visando combater alguns obstáculos epistemológicos que surgem no processo de ensino e aprendizagem de alguns conteúdos, é necessário conhecer a teoria das situações didáticas de Guy Brousseau, que surgiu como uma contraposição a forma clássica de ensino e objetiva tornar o aluno protagonista na construção dos conhecimentos matemáticos.

Para Guy Brousseau (1986), “a teoria das situações didáticas trata-se de formas de apresentação dos conteúdos matemáticos para os alunos, possibilitando-os a compreender melhor o fenômeno da aprendizagem da matemática”. Pode-se considerar que essa teoria que teve início em 1970, na França, por Brousseau, e que ela representou um marco importante na pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem da matemática, e se constituiu em um programa epistemológico do qual participaram pesquisadores de vários países (Freitas, 2008).

A teoria de Brousseau foi criada tendo como base trabalhos que buscavam o estilo formalista do conhecimento, que ficou conhecido como matemática Moderna. Dessa forma, pode-se dizer que a teoria, foi uma forma de contraposição à didática clássica (Freitas, 2008).

Para o desenvolvimento da teoria, o professor organiza o Meio (Millieu), que possibilita as interações entre os alunos com o objetivo de provocar mudanças, desestabilizar o sistema didático e criar situações para a aprendizagem de novos conhecimentos. Segundo Freitas (2008), “em determinado meio, as obrigações são recíprocas e envolvem alunos, professores e um conteúdo específico, sendo essa relação conhecida como contrato didático entre professor e aluno”.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num determinado meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, em um sistema educativo de professor, com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito. (BROUSSEAU, 1986, apud FREITAS).

A *devolução* para Brousseau, tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade em que o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de forma que o aluno aceite o desafio de resolver, como se o problema proposto fosse. Dessa forma a devolução pode ser dita como uma maneira em que o aluno se sente na obrigação de resolver tal problema por vontade própria, e quanto consegue sucesso, inicia-se o processo de aprendizagem da matemática (Freitas, 2008). O conceito de situação adidática introduzido por Brousseau, caracteriza-se basicamente, por representar momentos em que o processo de aprendizagem dos alunos acontece de forma independente, sem sofrer nenhum tipo de controle direto pelo professor.

A devolução de uma situação consiste em um conjunto de condições, repassadas pelo professor, que permitem ao aluno se apropriar de uma determinada situação, tomando a responsabilidade para si, sem interferência do professor, surgindo a *situação adidática* de ensino aprendizagem.

O conceito de situação adidática de ação, que foi introduzido por Brousseau, diz respeito ao momento em que o aluno se encontra ativamente empenhado na busca de uma solução para um problema, ou seja, ele está combatendo um obstáculo epistemológico de certa maneira, realizando determinadas ações que resultam na produção de um conhecimento de natureza operacional. Numa situação de ação, há sempre o predomínio exclusivo do aspecto experimental do conhecimento por parte do aluno, sem interferência direta pelo professor (Freitas, 2008, p. 96).

Situações de Validação, com base na análise descrita por Balacheff, “pode-se dizer que um processo de validação se caracteriza como uma atividade que tem como

finalidade assegurar a validade de uma da proposição matemática feita por um aluno, podendo ainda ser feita como uma explicação teórica" (Freitas, 2008).

Na formulação e validação matemática, o aluno pode recorrer tanto à linguagem natural, que consiste em explicações em texto comum corrido, sem a parte matemática, quanto à linguagem simbólica, que utiliza símbolos matemáticos. Geralmente, os alunos combinam as duas formas. Muitas vezes, acreditam ter encontrado uma solução, mas, ao tentar validá-la, percebem algum erro. Assim, o ciclo de validação se reinicia, envolvendo as etapas de ação, formulação e validação de uma solução proposta.

Nesse contexto, trabalhar com paradoxos permite ao estudante enfrentar situações inesperadas, gerar conjecturas, testar soluções e, consequentemente, construir conhecimento matemático de maneira ativa e significativa. Quando o aluno encara esse processo pode-se dizer que ele está combatendo um problema epistemológico, e fazendo da forma dele, a construção do conhecimento, o que deixa mais sólido em sua memória as similaridades de resoluções de outros problemas.

Portanto, utilizar o paradoxo da roda como recurso metodológico não apenas promove a compreensão de conceitos matemáticos fundamentais, como também contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico, da argumentação matemática e da valorização da história da matemática como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem. Ademais, ao explorar o paradoxo como um problema a ser solucionado o professor pode ir introduzindo conceitos matemáticos, geométricos, físicos, dentre outros.

2.8 O Paradoxo da Roda no Ensino da Geometria e Medidas

Ao se estudar o paradoxo foram citados alguns conceitos matemáticos e geométricos que podem ser trabalhados em salas de aulas do ensino fundamental, ensino médio e inclusive nos cursos de formação superior.

Partindo-se do conceito já ensinado pelos professores sobre polígonos regulares, ou seja, polígonos com lados iguais, o professor pode apresentar o paradoxo, para os alunos a priori do mais simples, que é um triângulo equilátero, um quadrado, pentágono etc.; até chegar na circunferência descrita no paradoxo. Ademais, através dessa demonstração os alunos já encararão um dos passos descritos por Galileu para uma possível resolução do paradoxo, indiretamente o professor já incutirá na mente do aluno o conceito de quanto mais lados tiverem o polígono, mais parecido com uma circunferência ele fica.

Após a demonstração da criação de uma circunferência o professor pode tratar o conceito de transformações geométricas, que no paradoxo consiste na rotação da figura partindo de um de seus vértices, isso pode ser feito desde o triangulo até a circunferência.

Mais um conceito geométrico que pode ser ensinado, mas dessa vez para turmas do ensino médio, é a inscrição e subscrição de polígonos, que no paradoxo é representado pela circunferência menor dentro da maior, atreladas ambas a um mesmo ponto central.

Ademais, a explicação acerca de perímetros de polígonos já se torna possível, já que estão sendo citados vários até chegar na circunferência; e falando dela, o conceito de raio, de radianos, da constante PI, tudo se torna capaz através da demonstração ou da problematização da roda de Aristóteles, mostrando como essa situação pode se tornar versátil para ser utilizada em vários conceitos dentro de sala de aula.

No entanto, podemos citar o paradoxo também, em turmas de graduação matemática, um conceito bem repetitivo do paradoxo, que também foi levado em consideração por Galileu, consiste no infinito, que através desse como já citado anteriormente podem ser ensinados pelos professores as concepções de limites, não esquecendo que este conceito é abrangido em praticamente todas as matérias de cálculo no ensino superior.

Conforme supracitado, e partindo de uma apresentação inicial do paradoxo, verifica-se que ele pode ser utilizado como problematização e introdução em diversos conceitos que vão fazer o aluno pensar, assim construindo uma base de ensino aprendizagem mais robusta acerca da matemática.

2.9 Síntese da Fundamentação

A fundamentação teórica deste trabalho aborda três aspectos inter-relacionados: o contexto histórico-filosófico da formulação do paradoxo da roda, baseado no pensamento aristotélico; a interpretação e solução proposta por Galileu, que contribuiu para o desenvolvimento da matemática moderna; e a análise das possibilidades didáticas que surgem desse paradoxo no ensino da matemática.

Baseando-se nesses fundamentos, argumenta-se que o paradoxo da roda de Aristóteles não se restringe a uma curiosidade histórica ou a um problema matemático abstrato. Ele é considerado uma ferramenta pedagógica útil, capaz de estimular discussões, promover a construção ativa do conhecimento e aprimorar as práticas de ensino, especialmente em relação a conceitos como geometria, medida, proporcionalidade, infinito e limite.

3. METODOLOGIA

O presente estudo utilizou como base a pesquisa bibliográfica como procedimento metodológico para fundamentar teoricamente a temática abordada.

Alguns autores justificam a abordagem qualitativa como uma forma de se coletar os dados permitindo que os investigadores sejam críticos em suas escolhas. Para Godoy (1995): “abordagem qualitativa, enquanto exercício de pesquisa, não se apresenta como uma proposta rigidamente estruturada, ela permite que a imaginação e a criatividade, levem os investigadores a proporem novos trabalhos e enfoques”.

A base da pesquisa bibliográfica são os livros, teses, artigos e outros documentos publicados que contribuem na investigação do problema proposto na pesquisa (Sousa et al. 2021, p.68).

Desta forma, partindo do problema em questão foram consultadas bases de dados como Scielo, CAPES, Google Scholar e revistas especializadas, prioritariamente considerando materiais publicados entre 2010 e 2023, com exceção de obras clássicas fundamentais ao tema, assegurando a atualidade e a relevância dos aportes teóricos necessários para gerar a concepção utilizada no trabalho optou-se por materiais publicados em periódicos de *qualis* A e B na área de ensino de matemática, além de dissertações e teses vinculadas a programas de pós-graduação em ensino de ciências e matemática.

Após a seleção dos materiais, procedeu-se à leitura exploratória e análise de conteúdo, priorizando trechos que abordam a formulação do paradoxo da roda, sua resolução e suas possíveis aplicações no ensino da matemática. As informações foram organizadas em categorias temáticas: fundamentos históricos, aspectos matemáticos do paradoxo e possibilidades didáticas.

A análise ocorreu em 5 artigos, 10 livros, 4 dissertações e trabalhos de conclusão de curso, 7 revistas matemáticas, um dicionário, e uma obra publicada em página de estudo, os quais compuseram o corpus da pesquisa.

4. Proposta de Intervenção Pedagógica

Considerando o potencial do Paradoxo da Roda de Aristóteles como recurso didático, esta proposta de intervenção tem como objetivo explorar conceitos de geometria, perímetro, circunferência, limite e infinito, contribuindo para superar obstáculos epistemológicos que frequentemente dificultam a aprendizagem desses conteúdos. A proposta foi estruturada à luz da Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (1986) e utiliza o GeoGebra como ferramenta digital de apoio, além de materiais manipulativos que favorecem a aprendizagem ativa.

Esta sequência didática é direcionada a turmas do ensino fundamental anos finais (a partir do 8° ano), ensino médio e ensino superior, devendo o professor realizar as respectivas gradações de acordo com a série envolvida. A proposta também está alinhada às habilidades previstas na BNCC, especialmente aquelas relacionadas à compreensão de propriedades de figuras geométricas planas, perímetro, relações métricas, transformação de figuras e raciocínio lógico.

4.1 Contextualização e Problematização

Para iniciar, o professor apresenta uma animação ou imagem de uma roda de carroça com dois círculos concêntricos, um maior e outro menor, girando juntos. Em seguida, propõe uma discussão inicial com perguntas norteadoras:

- Os dois círculos completam a mesma quantidade de voltas?
- Se giram juntos, por que parece que o ponto externo percorre mais espaço que o interno?
- Isso faz sentido do ponto de vista geométrico?

Objetivo:

Despertar o conflito cognitivo que motivará a investigação, instigando os alunos a formular hipóteses.

4.2 Introdução aos Polígonos

Atividade prática:

Distribuir palitos de picolé ou tiras de papel para que os alunos montem figuras fechadas com 3, 4, 5 e mais lados, classificando-as como polígonos.

Conceitos abordados:

- Curvas fechadas e abertas;
- Lados, vértices e ângulos;
- Polígonos convexos e côncavos.

Ligação com o paradoxo:

Entender como figuras geométricas formam a base para a construção de circunferências, aproximando o conceito de polígono regular do círculo.

4.3 Polígonos Regulares e a Aproximação do Círculo

Atividade prática:

Usar compasso e transferidor para traçar circunferências e dividir em partes iguais, criando hexágonos, octógonos ou dodecágonos inscritos.

Discussão:

- Quanto mais lados, mais a figura se aproxima do círculo?
- Um polígono com infinitos lados é equivalente a uma circunferência?

Conceitos mobilizados:

Proporcionalidade, perímetro, noção de limite.

4.4 Propriedades dos Polígonos

Atividade investigativa:

Distribuir modelos de polígonos para que os alunos dividam em triângulos internos, descobrindo a fórmula da soma dos ângulos internos.

Produto esperado:

- Construção da relação $S = (n-2) \times 180°$.

Conexão didática:

Mostra como ampliar conceitos geométricos básicos para estruturas mais complexas.

4.5 Simulação do Paradoxo com Polígonos

Atividade prática:

Construir rodas poligonais (hexágono, octógono, dodecágono) e uma roda circular em cartolina. Marcar um ponto na borda para observar o deslocamento ao “rolar” sobre uma superfície.

Discussão guiada:

- O ponto da borda percorre a mesma distância que o centro?
- Qual a diferença entre o rolamento de um polígono e de uma circunferência?

Conceitos mobilizados:

Perímetro, movimento circular, continuidade.

4.6 Exploração Digital com GeoGebra

Atividade prática:

Usar o GeoGebra para criar animações que mostrem o aumento progressivo dos lados do polígono inscrito até que se torne indistinguível de uma circunferência.

Discussão:

- O que acontece quando o número de lados tende ao infinito?
- Como isso se relaciona com o paradoxo da roda?

Conexão teórica:

Articular o conceito de limite e a noção de infinitésimos, reforçando a resolução proposta por Galileu.

4.7 Projeto Final: Construção Criativa

Atividade prática:

Organizar os alunos em grupos para criar maquetes de “veículos poligonais”, experimentando rodas de diferentes formatos (triângulo, hexágono, círculo) e testando a eficiência de cada forma.

Objetivo:

Relacionar a teoria à prática, avaliando vantagens e limitações das formas geométricas no movimento.

4.8 Avaliação

A avaliação será contínua, diagnóstica, formativa e somativa, contemplando:

- Participação e engajamento nas discussões.
- Qualidade das construções geométricas e explicações.
- Capacidade de argumentação e validação matemática.
- Clareza na relação entre o paradoxo, os conceitos de geometria e a ideia de limite.
- Produção final (maquete), considerando criatividade, fundamentação e apresentação.

Serão utilizados instrumentos como rubricas, fichas de observação, autoavaliação e registros das produções.

4.9 Possíveis Extensões

Para o Ensino Médio, a proposta pode ser expandida com aprofundamento em limites, cardinalidade e cálculo diferencial, reforçando a ponte com conteúdos de Matemática Avançada.

No Ensino Superior, o paradoxo pode ser tema de oficinas de história da matemática, práticas de transposição didática e desenvolvimento de materiais didáticos em disciplinas pedagógicas da Licenciatura em Matemática.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, partiu-se de uma análise histórica e conceitual do paradoxo da roda de Aristóteles, explorando sua formulação original, os contextos filosófico e matemático nos quais se insere, e suas repercussões no pensamento matemático ao longo dos séculos. Inicialmente, foi realizado um estudo sobre a matemática grega e sobre os filósofos que contribuíram para o desenvolvimento de ideias fundamentais da geometria e da lógica, muitos dos quais influenciaram ou foram influenciados pelo pensamento aristotélico. A partir disso, investigou-se como Aristóteles elaborou o paradoxo da roda e de que forma ele representava um desafio lógico e geométrico, marcado por uma aparente contradição entre os comprimentos de circunferências e as trajetórias descritas por rodas em movimento.

Seguindo esse percurso, o trabalho abordou a proposta de resolução apresentada por Galileu Galilei, que, ao considerar conceitos como os infinitesimais e os limites da divisão contínua do espaço, contribuiu para o amadurecimento do pensamento matemático moderno. A análise da solução galileana possibilitou não apenas uma

melhor compreensão do paradoxo, mas também o entendimento de como esse tipo de problema impulsionou reflexões que culminariam na construção do cálculo diferencial por Newton e Leibniz.

A partir dessa base teórica e histórica, o trabalho encaminhou-se para a proposta de uma sequência didática voltada ao ensino de conteúdos geométricos por meio do paradoxo da roda de Aristóteles. Foram apresentadas possibilidades concretas de aplicação em sala de aula, tanto nos ensinos fundamental e médio quanto no ensino superior, com o objetivo de promover a reflexão crítica, o raciocínio lógico e a contextualização histórica da matemática. A proposta visa tornar o conteúdo mais significativo, conectando os alunos ao processo histórico de construção do conhecimento matemático.

As implicações pedagógicas de se utilizar a História da Matemática em sala de aula são numerosas e positivas. Ela permite compreender que o saber matemático não é pronto e acabado, mas fruto de um processo contínuo, repleto de conflitos, avanços e reformulações. Essa abordagem valoriza o pensamento crítico dos estudantes e os instiga a enxergar a matemática como uma construção humana em constante evolução, rompendo com a visão tradicional e puramente técnica da disciplina. Ao resgatar figuras como Aristóteles e Galileu, e ao discutir problemas históricos, contribui-se para a formação de um ensino mais reflexivo, contextualizado e interdisciplinar.

Como sugestões para futuras pesquisas, recomenda-se o aprofundamento em outros paradoxos matemáticos e filosóficos que também podem ser explorados didaticamente. Um exemplo é o **paradoxo do hotel infinito**, proposto por David Hilbert, que aborda as implicações lógicas do infinito em contextos aparentemente simples. Outro exemplo é o **paradoxo de Zenão de Eléia**, que trata da impossibilidade do movimento com base em divisões infinitas do espaço e do tempo. Investigar esses paradoxos pode ampliar ainda mais a compreensão dos conceitos de infinito, continuidade e limite, oferecendo novas possibilidades metodológicas para o ensino da matemática, sempre em diálogo com sua rica trajetória histórica.

6. REFERÊNCIAS

ARISTÓTELES. *Obras completas de Aristóteles: introdução geral*. Coord. MESQUITA, António Pedro. Lisboa: Imprensa Nacional-Casa da Moeda, 2005. (Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa).

ÁVILA, Geraldo. Euclides, geometria e fundamentos. *Revista do Professor de Matemática*, n. 45, p. 1–7, 2001.

BACHELARD, Gaston. *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento objetivo*. 5. ed. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BARBOSA, Gustavo. *Platão e Aristóteles na Filosofia da Matemática*. 2009. 133 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. 1. ed. São Paulo: Blucher, 2019.

CAMPOS, Alexandre; RICARDO, Élio Carlos. A natureza da região celeste em Aristóteles. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, São Paulo, v. 36, n. 4, p. 4601, 2014.

CARVALHO, Maria do Carmo Linhares de. *Infinitos, paradoxos e limite: uma jornada na história da matemática*. 2023. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás, Câmpus Goiânia, 2023.

DANTE, Luiz Roberto. *Matemática: contexto e aplicações – volume único*. São Paulo: Ática, 2022.

EUCLIDES. *Os elementos*. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

EVES, Howard. *Introdução à história da matemática*. 6. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2004.

FAJARDO, Rogério Augusto dos Santos. *Lógica matemática*. [S.l.]: [s.n.], [s.d.]. Disponível em PDF.

FRANCISQUINI, M. F. B.; SOARES, V.; TORT, A. C. O paradoxo cinemático de Galileu. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, Rio de Janeiro, v. 36, n. 1, p. 1304, 2014.

GABRIEL, Gabriel de Souza. Galileu e a roda de Aristóteles. *Matematizando Gabriel*, 12 nov. 2011. Disponível em: https://matematizando-gabriel.blogspot.com/2011/11/galileu-e-roda-de-aristoteles.html. Acesso em: 9 jun. 2025.

GANDT, François de. Nascimento e metamorfose de uma teoria matemática: a geometria dos indivisíveis na Itália (Galileu, Cavalieri, Torricelli). *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, Campinas, série 1, v. 10, p. 27–59, 1986.

GLEICK, Amir Alexander. *Infinitesimal: how a dangerous mathematical theory shaped the modern world*. New York: Scientific American / Farrar, Straus and Giroux, 2014.

GODOY, Arilda Schmidt. Pesquisa qualitativa: tipos fundamentais. *Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, v. 35, n. 3, p. 20–29, maio/jun. 1995.

MACHADO, Sílvia D. A. et al. *Educação matemática: uma (nova) introdução*. 3. ed. São Paulo: EDUC da PUC-SP, 2008.

MICHAELIS. *Moderno Dicionário da Língua Portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos, [2023]. Disponível em: https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/paradoxo/. Acesso em: 12 mar. 2025.

MORAIS, Francisco Danilo Oliveira de. *Uma abordagem da lógica matemática no ensino médio*. 2024. Monografia (Especialização em Matemática) – Instituto Federal da Paraíba, Cajazeiras, 2024.

MOSCHETTI, Marcelo. *Navegando em um oceano infinito: a física geométrica de Galileu e o problema do contínuo*. 2011. Tese (Doutorado em Filosofia) – Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011.

OLIVEIRA, Ana Maria Libório; NASCIMENTO, Edinaldo da Silva. A trajetória de vida de Pitágoras e suas principais contribuições à Matemática. Jataí: Instituto Federal de Goiás; Brasília: Instituto Federal de Brasília, [s.d.].

PEREIRA, Paulo Cesar R. Revivendo Eratóstenes. *Revista Latino-Americana de Educação em Astronomia – RELEA*, n. 3, p. 19–38, 2006.

POINT AT INFINITY. Aristotle’s wheel, Galileo, and the Jesuits. *Point at Infinity*, 7 abr. 2016. Disponível em: https://pointatinfinityblog.wordpress.com/2016/04/07/aristotles-wheel-galileo-and-the-jesuits/. Acesso em: 9 abr. 2025.

RIBEIRO, Daniel. Galileo Galilei. *Revista de Ciência Elementar*, Lisboa, v. 2, n. 4, p. 94, 2014. Disponível em: http://rce.casadasciencias.org. Acesso em: 14 mai. 2025.

RODRIGUES, Paulo Henrique; ARAMAN, Eliane Maria de Oliveira; REIS, Tiago Henrique dos. Tecnologias digitais da informação e comunicação e história da matemática: uma abordagem por meio do Crivo de Eratóstenes. *Actio: Docência em Ciências*, Curitiba, v. 3, n. 3, p. 416–430, set./dez. 2018.

ROQUE, Tatiana. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SOUSA, Angélica Silva de; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; ALVES, Laís Hilário. A pesquisa bibliográfica: princípios e fundamentos. *Cadernos da FUCAMP*, v. 20, n. 43, p. 64–83, 2021.

TEIXEIRA, Lilian Aparecida et al. *Superação Matemática – 8º ano: manual do professor*. São Paulo: Editora Moderna, 2022.