RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO SISTEMAS LINEARES: Uma análise das estratégias utilizadas por estudantes do Ensino Médio

Anne Caroline da Silva Calado

acsc1@discente.ifpe.edu.br

Maria Betânia dos Santos Melo

mbsm@discente.ifpe.edu.br

Airlan Arnaldo Nascimento de Lima

airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

O presente artigo tem o intuito de apresentar reflexões com base em análises realizadas no contexto da Resolução de Problemas visando uma contribuição para discussões relacionados ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática que envolvem os sistemas lineares do primeiro grau, ou seja, sistemas que envolvem o trabalho com duas incógnitas. Trata-se de uma investigação a respeito das potencialidades e dificuldades apresentadas por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio na resolução de problemas envolvendo o respectivo conteúdo. A pesquisa foi realizada numa turma de 1º ano, de uma escola de referência de uma cidade do interior de Pernambuco, por meio de dois encontros que envolveram resolução de questões, pesquisa realizada pelos estudantes e resolução de problemas com base na pesquisa realizada por eles.

Palavras-chave: Sistemas Lineares. Resolução de Problemas. Ensino da Matemática.

ABSTRACT

This article aims to present reflections based on analyses carried out in the context of Problem Solving involving a contribution to research related to the teaching and learning process of Mathematics that involves first-degree linear systems, that is, systems that involve working with two unknowns. This is an investigation into the potential and difficulties presented by first-year high school students in solving problems involving the respective content. The research was carried out in a 1st year class, from a reference school in a city in the interior of Pernambuco, through two meetings that involved solving questions, research carried out by the students and problem solving based on the research carried out by them.

Keywords: Linear Systems. Trubleshooting. Teaching Mathematics.

1 INTRODUÇÃO

Sistemas Lineares é um dos conteúdos da Álgebra abordados na Educação Básica desde o Ensino Fundamental, mais precisamente no 8º ano até o Ensino Médio, neste, sendo apresentado com um nível mais aprofundado. É uma área da Matemática que, de acordo com Martins (2019) que cita Ponte e Matos (2009), possibilita a modelagem de diversos problemas e pode ser utilizado como tópico importante em vários termas matemáticos atuais. Não possui a abstração em sua essência, mas ainda é um ponto de bastante dificuldade por parte dos estudantes, principalmente na tradução da linguagem verbal para a linguagem própria Matemática.

Dada as especificidades presentes no ensino-aprendizagem dos Sistemas Lineares na Educação Básica, este trabalho busca apresentar reflexões à cerca de análises realizadas a partir da apresentação de potencialidades e dificuldades na resolução de problemas que envolvem este conteúdo por parte de estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

Para melhor compreensão, no referencial teórico será abordado pontos importantes relacionados à Base Nacional Comum Curricular no ensino/aprendizagem dos Sistemas Lineares, no Ensino Médio, seguido da definição dos Sistemas de Equações Lineares e procedendo com uma discussão à respeito das potencialidades e dificuldades na Resolução de Problemas, sob a visão de autores como Proença (2022) e Pontes (2018).

Sequencialmente, tratar-se-á da metodologia utilizada no desenvolvimento do artigo, na qual optou-se por uma coleta de dados por meio da aplicação de atividades na turma do 1º Ano, que proporcionou a possibildade de uma análise com aspectos qualitativos que permitiu as reflexões a serem expressas durante as sessões.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A referida sessão apresentará pontos importantes trazidos pela BNCC com relação ao ensino-aprendizagem dos sistemas lineares no Ensino Médio, bem como são determinados os conceitos dos Sistemas de Equações Lineares na visão de Dante (2013) e reflexões voltadas para as potencialidades e dificuldades apresentadas por estudantes na resolução de problemas que já foram foco de discussão em outros trabalhos acadêmicos.

2.1 BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR E OS SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO

A BNCC (Base Nacional Comum Curricular), documento diretriz da Educação Básica, afirma que os conhecimentos matemáticos são indispensáveis para todos os alunos que estudam na Educação Básica, uma vez que a matemática se aplica tanto na sociedade contemporânea como também na formação de cidadãos críticos e responsáveis. Garantir que os alunos consigam relacionar o mundo real com conceitos e propriedades, de modo que realizem induções e conjecturas é uma função extremamente importante da matemática vivenciada no Ensino Fundamental e espera-se que ao final da modalidade sejam desenvolvidas tais habilidades. Descritas na BNCC:

> “O desenvolvimento dessas habilidades está intrinsecamente relacionado a algumas formas de organização da aprendizagem matemática, com base na análise de situações da vida cotidiana, de outras áreas do conhecimento e da própria Matemática. Os processos matemáticos de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática [...].” (BRASIL, 2018, p. 266)

No Ensino Médio, a busca pela formação de cidadãos críticos e reflexivos continua a partir de competências a serem desenvolvidas pelos estudantes, competências que visam a construção de habilidades que permitam ao aluno fazer leituras e interpretações de contextos reais, utilizando conceitos bem estruturados e fundamentados, participando efetivamente do processo de ensino e aprendizagem e utilizando estratégias e argumentos consistentes.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em sua redação, apresenta que os conteúdos estudados no Ensino Médio continuam as aprendizagens desenvolvidas no Ensino Fundamental, visto que, o ponto de atenção é para a construção de uma Matemática integrada, que seja aplicada à realidade do estudante e em diversos contextos. A BNCC (2018) afirma que “eles devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados.”

O eixo de Matemática e suas tecnologias, no Ensino Médio, garantem aos estudantes o desenvolvimento de competências, nas quais possuem habilidades relacionadas a cada uma delas e que devem ser alcançadas nesta etapa da Educação Básica. Além de dez competências gerais da Educação, a área de Matemática e suas Tecnologias conta com cinco competências específicas. Enfatizar-se-á neste trabalho, a terceira competência específica, expressa da seguinte forma:

> “Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.” (BRASIL, 2028, p. 535)

A competência 3 citada, relaciona-se a diversas áreas da Matemática – álgebra, geometria, probabilidade, estatística, grandezas e medidas, aritmética - , mas o primeiro destaque é voltado para a primeira habilidade desta competência, a qual é identificada por um código chamado alfanumérico, sendo ele, EM13MAT301 (EM refere-se a etapa do Ensino Médio; 13 apresenta os anos a que esta habilidade será desenvolvida, 1º ao 3º ano; MAT – Matemática e suas Tecnologias; 3 refere-se a competência específica da habilidade; 01 refere-se a habilidade dentro da competência específica).

O texto que redige a habilidade 01 da competência 3, de acordo com a BNCC (2018) diz, “Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.”

Dias (2022) nos ajuda a refletir sobre a relação existente nesta habilidade com os Sistemas Lineares, ressaltando a importância do desenvolvimento desta habilidade no estudante de Ensino Médio:

> “Com relação à habilidade citada, ela tem como finalidade a resolução de problemas causados por grandezas que diversificam de maneira linear no cotidiano, na matemática e até mesmo em outras áreas de conhecimentos. Assim, com o conhecimento essencial dessa habilidade o aluno poderá trabalhar com sistemas de equações lineares do 1º grau com duas ou três incógnitas, utilizando as técnicas algébricas e gráficas para a compreensão do crescimento linear que as equações retratam.” (DIAS, 2022)

Desta forma, tendo como foco esta realidade, as vivências cotidianas dos estudantes devem ser consideradas num processo de ensino e aprendizagem, porém, para a concretização deste propósito, é importante que os estudantes desenvolvam habilidades que tenham relação com processos de investigação, de construção de modelos e principalmente de resolução de problemas.

O conteúdo – Sistemas Lineares – abordado no 8º ano do Ensino Fundamental e mais intenso no 1º ano do Ensino Médio, com base nos documentos oficiais da Educação, BNCC (2018) e Currículo de Pernambuco do Ensino Médio (2021), possui uma relevância significativa na grade curricular destas modalidades de ensino. Pedrini (2013), cita os Parâmetros Curriculares Nacionais afirmando que este estudo possibilita que o estudante:

> “desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas, permitindo que o aluno interprete modelos, perceba o sentido de transformações, busque regularidades e conheça o desenvolvimento tecnológico de parte de nossa cultura.” (PEDRINE, 2013).

No decorrer do Ensino Médio, por meio do desenvolvimento das competências necessárias, de acordo com PEDRINE (2013), a abordagem para este assunto possibilita ao estudante utilizar e realizar interpretações de modelos, buscando regularidades, percebendo transformações e conhecendo o desenvolvimento histórico, tecnológico e cultural, de forma sistematizada e associável ao conhecimento matemático.

2.2 DEFINIÇÃO DOS SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Um dos primeiros fatores importantes no estudo dos Sistemas Lineares é o estudo das Equações Lineares, visto que, os Sistemas Lineares são um conjunto formado por estas equações. De acordo com Dante (2013), "denomina-se equação linear toda equação que pode ser escrita na forma geral", descrita no quadro 1.

Quadro 1: forma geral das equações lineares.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Onde:

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ são incógnitas;

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ são números reais chamados coeficientes das incógnitas;

Fonte: DANTE (2013)

Os Sistemas Lineares, ainda na perspectiva de Dante (2013) apresenta-se como no quadro 2.

Quadro 2: representação do sistema linear m x n.

Denomina-se sistema linear m x n o conjunto de m equações lineares em n incógnitas, que pode ser representado assim:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \end{cases}$$

Fonte: DANTE (2013)

Na resolução de um sistema, os resultados devem satisfazer simultaneamente o conjunto de equações, por isso, temos a representação da solução de um sistema linear apresentado por Dante (2013), indicada no quadro 3.

Quadro 3: representação da solução de um sistema linear.

Dizemos que $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de um sistema linear quando $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)$ é solução de cada uma das equações do sistema, ou seja, satisfaz simultaneamente todas as equações do sistema.

Fonte: DANTE (2013)

Desta forma, os sistemas lineares são formados por equações cujas incógnitas são elevadas ao expoente 1, sendo fundamentais na resolução de problemas que envolvem equações com várias incógnitas.

2.3 POTENCIALIDADES E DIFICULDADES NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A resolução de problemas é trazida por alguns autores através de abordagens que se apresentam no ensino da Matemática como uma metodologia que facilita a aprendizagem. Nesta seção, traremos algumas reflexões a partir do ponto de vista de Proença (2022) que aponta três abordagens estudadas por Schroeder e Lester Jr. (1989), sendo elas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar via resolução de problemas e ensinar para resolução de problemas, porém nos deteremos com mais ênfase à abordagem – ensinar para a resolução de problemas, visto que esta mostra uma relação maior com a perspectiva deste trabalho.

Proença (2022) aponta, por meio de Schroeder e Lester Jr (1989) que, ensinar para resolução de problemas é uma abordagem que implica na ideia de envolver os alunos na resolução de problemas após o estudo de conteúdos, ou seja, para que apliquem o que aprenderam ou acabaram de aprender nos “problemas” que lhes são postos. O principal objetivo do professor é utilizar “problemas”, o que indica que “[...] a única razão para aprender matemática é ser capaz de usar o conhecimento obtido para resolver problemas” (SCHROEDER; LESTER JR., 1989, p. 32, tradução e grifos do autor). Proença ainda afirma, com base nos mesmos autores, que se trata de uma abordagem que apresenta limitações, uma vez que a resolução de problemas, neste contexto é vista como uma atividade em que os estudantes possuem um engajamento após a introdução de um conteúdo ou para desenvolver uma habilidade de cálculo ou algoritmo. De toda forma, Pontes (2018) expressa sobre a Resolução de Problemas que “A Resolução de Problemas é uma metodologia do ensino de Matemática por meio da qual o professor recomenda ao aluno-aprendiz situações-problema evidenciadas pela construção de novos conceitos através de uma investigação. Pontes prossegue em seu pensamento citando Salbach (2010, p. 92) que diz:

> “uma situação-problema dá “a oportunidade do aluno atuar de forma protagonista, expondo o que sabe, mostrando o seu pensar, colocando em ação seu esforço e sua linguagem, transferindo conhecimentos construídos em uma situação para outra, avaliando sua adequação e esboçando conclusões”.” (PONTES, 2018 aput SALBACH, 2010).

Segundo Polya (1997), mencionado por Pontes (2018), resolver problemas é essencial no ensino de Matemática e a estratégia de resolução é sempre encontrar um caminho que ainda não é conhecido e por meio de estratégias adequadas, poder alcançar o objetivo, ultrapassando todos os obstáculos e dificuldades.

Proença (2022, aput Proença 2018b) nos apresenta quatro etapas de referência que explicam como a Resolução de Problemas é construída. Sendo elas: representação, planejamento, execução, monitoramento. Cada etapa citada, está relacionada com o envolvimento cognitivo do estudante. Fator importante na detecção de dificuldades expressas por alunos.

> “Na etapa de *representação*, a pessoa busca compreender o problema a partir do contexto da situação e por meio da mobilização de seus conhecimentos linguístico (da língua materna), semântico (matemáticos) e esquemático (tipo de conteúdo). Se esses conhecimentos estiverem bem formados, é possível uma representação adequada do problema. Na etapa de *planejamento*, a pessoa deve apresentar sua forma/caminho de resolver o problema, ou seja, uma estratégia vinculada à representação do problema. Na etapa de *execução*, “[...] a pessoa precisa executar a estratégia proposta. Implica em executar os cálculos matemáticos necessários, bem como desenhar os elementos viso-pictóricos [aqueles referentes aos desenhos/imagens/diagramas]”. Por fim, é na etapa de *monitoramento* que a pessoa deve (deveria) ter capacidade para realizar o seguinte: a) a partir da pergunta e do contexto do problema, verificar a racionalidade da resposta; b) em qualquer momento da busca da solução, rever o processo de resolução seguido (PROENÇA, 2018b).

De acordo com o desenvolvimento destas etapas é possível perceber se os conhecimentos foram ou estão sendo bem formados para resolução de um problema ao mesmo tempo que possibilita a percepção de alguma etapa que não foi bem desenvolvida no ato da resolução de uma situação-problema.

No Ensino Médio, segundo Pontes (2018), os alunos possuem conhecimentos sufucientes para realizar abstrações matemáticas, unindo aos conhecimentos adquiridos durante as etapas anteriores. Assim, possuem noções de relações do método tradicional e situações-problemas matemáticos, onde exercícios são apresentados de forma mecânica com a utilização de fórmulas, e outros são expressados como situações formadas por modelos reais.

A Resolução de Problemas, portanto, na visão de Cai e Lester (2012), que cita Hiebert & Wearne, 1993; Marcus & Fey, 2003; NCTM (National Council of Teachers of Matematics) , 1991 e Van de Walle, 2003), se refere a tarefas matemáticas que têm o potencial de proporcionar desafios intelectuais que podem melhorar o desenvolvimento matemático dos alunos, isto é, problemas que promovem o etendimento conceitual dos estudantes cultivam suas habilidades de raciocinar e se comunicar matematicamente, despertando seu interesse e sua curiosidade.

3 METODOLOGIA

No desenvolvimento da pesquisa, foi utilizada a Resolução de Problemas como ferramenta principal trazendo uma visão da Educação Matemática, onde não só valoriza o conhecimento, mas também a capacidade e valores relacionados a Matemática ao mundo real.

3.1 Sujeitos da Pesquisa

A pesquisa foi realizada numa turma do 1º ano do Ensino Médio de uma escola Estadual de Referência de um minicípio do interior de Pernambuco, composta por 48 alunos. Participaram da pesquisa 40 estudantes, dentre eles alguns que exercem a tarefa de monitores da turma. Seguindo um caráter qualitativo, os sujeitos participaram efetivamente de dois momentos, os quais serão especificados nos procedimentos metodológicos.

3.2 Procedimentos Metodológicos

No primeiro momento foi aplicado uma avaliação diagnóstica à turma do 1º ano do Ensino Médio, a fim de analisar o conhecimento matemático básico adquirido pelos alunos, visto que, o conteúdo já foi vivenciado no mesmo ano, podendo assim constatar as dificuldades apresentadas na avaliação.

A atividade aplicada foi composta por três questões com o conteúdo sobre sistema de equação linear, já vivenciada e rememorada no primeiro bimestre. Esse conteúdo de acordo com a BNCC deve ser vivenciado desde o oitavo ano do ensino fundamental – anos finais, portanto os estudantes tinham uma base para as resoluções das questões aplicadas. Para a resolução da atividade sobre sistema de equação linear, os alunos podiam resolver pelo método da adição ou da substituição além do conhecimento das quatro operações (adição, subtração, divisão e multiplicação), no qual é necessário ter o conhecimento básico da matemática.

A primeira questão foi um sistema montado e os alunos só iriam resolver de acordo com os conhecimentos sobre o conteúdo, na segunda e terceira foram situações-problemas, no qual deveriam interpretar as questões e montar o sistema de forma correta.

Para avaliar os estudantes através da atividade de diagnose foi aplicada critérios de avaliação, sendo eles: a) interpretação dos problemas; b) resolver o sistema; c) regra de sinais; d) encontrar os valores desconhecidos X e Y;

No mesmo dia da aplicação da atividade propomos aos estudantes uma pesquisa de preços dos dois tipos de queijos tradicionais da cidade, o queijo coalho e o queijo de manteiga, em dois comércios diferentes. Essa atividade foi realizada em dupla, pois é uma turma numerosa e pela cidade ser pequena teríamos resultados repetitivos. O tema da referente pesquisa foi – queijos – justamente por ser uma tema muito próximo da população da cidade, consequentemente dos próprios estudantes, visto que, de acordo com a história do município, disposto no site da prefeitura da cidade, relacionado a economia do lugar é “famosa por ser uma das maiores bacias leiteiras do estado, é conhecida como a cidade do queijo e do leite.”

Ao analisar a atividade realizada a partir dos critérios de avaliação, percebemos que mesmo sendo um conteúdo já apresentado em sala e tendo uma base matemática, os estudantes têm a dificuldade de interpretar questões e alguns conceitos matemáticos como por exemplo, jogo de sinal.

Após alguns dias do primeiro momento, recolhemos a pesquisa para através dela realizar um novo teste, mas utilizando a pesquisa como base, trazendo o cotidiano e realidade dos estudantes, a matemática para o mundo real.

O último encontro teve a atividade pós-teste, onde, a partir dos resultados da pesquisa realizada pelos estudantes, foram formuladas questões relacionadas ao conteúdo de sistema linear.

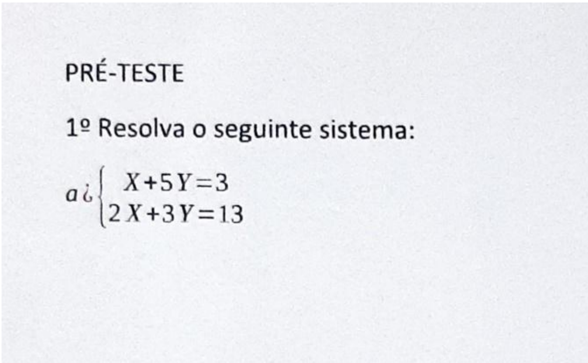
3.3 Instrumentos da Pesquisa

A presente pesquisa utilizou como ferramenta de coleta de dados, aplicação de teste, pesquisa de campo, aplicação de situações-problemas relacionados ao conteúdo, observações e análises realizadas durante e após a execução das ações, mantendo-se assim o caráter qualitativo do trabalho desenvolvido.

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 PRIMEIRO MOMENTO

Nesta etapa, foram apresentados problemas de forma mais objetiva, relacionados aos sistemas lineares. O objetivo foi verificar os conhecimentos e dificuldades dos alunos em relação ao conteúdo, avaliando se seriam capazes de resolver as questões e encontrar os valores de X e Y utilizando os métodos elementares de resolução de sistemas lineares.



PRÉ-TESTE

1º Resolva o seguinte sistema:

$$a¿\begin{cases} X+5Y=3 \\ 2X+3Y=13 \end{cases}$$

Figura 1

Fonte: acervo da pesquisa

Para resolver o primeiro problema do pré-teste, observa-se que se trata de um sistema linear já estruturado, bastando ao aluno desenvolvê-lo para obter o resultado desejado. Existem três métodos clássicos para resolver sistemas lineares: o método da adição, o método da substituição e o método da comparação. No problema apresentado (FIGURA 1), os alunos deveriam utilizar um desses métodos e, a partir dele, desenvolver a resolução até encontrar os valores de X e Y.

Durante a aplicação da atividade, observamos os conhecimentos matemáticos demonstrados na resolução de cada etapa do problema. Como os sistemas lineares envolvem o estudo de equações lineares, em que o sistema consiste em um conjunto dessas equações, cabe resolvê-las utilizando um dos métodos mencionados. A FIGURA 2 ilustra a solução apresentada por um dos alunos.

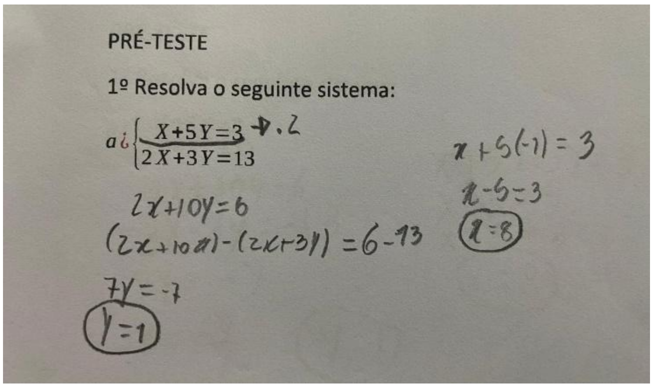


Figura 2

Fonte: acervo da pesquisa

Conforme podemos observar na resolução apresentada, o aluno A multiplicou a primeira equação do sistema por 2 e, em seguida, subtraiu o resultado obtido da segunda equação, cometendo assim um equívoco ao errar na regra de sinais da divisão. No desenvolvimento do problema, ele conseguiu anular a incógnita X, já que os coeficientes eram iguais, porém com sinais opostos, restando apenas a incógnita Y. Após encontrar o valor de Y, substituiu-o na equação original para determinar o valor de X. Apesar de ter encontrado valores para ambas as incógnitas, os resultados não estavam corretos. A análise da resolução revela que o aluno apresentou dificuldade tanto no domínio dos métodos de resolução de sistemas lineares quanto na aplicação correta das regras de sinais.

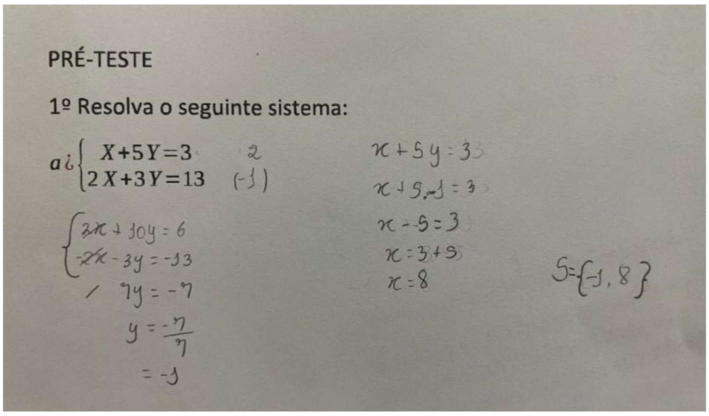


Figura 3

Fonte: acervo da pesquisa

O único equívoco cometido pelo aluno B foi na apresentação do conjunto solução. Caso a questão fosse de múltipla escolha, ele possivelmente erraria por não conhecer a ordem correta das incógnitas X e Y na solução final. No entanto, observa-se que o aluno demonstrou pleno domínio do conceito de sistemas lineares, aplicando corretamente o método da adição e obtendo os resultados esperados.

No segundo problema, os alunos precisavam interpretar a questão e montar o sistema corretamente, com base nas informações contidas no texto. Para resolvê-lo, era necessário entender o que o problema pedia. Neste caso, a questão envolvia a quantidade de acertos e erros de Ana em uma prova de 50 questões no total. Para cada questão correta, ela ganhava 5 pontos, e para as erradas, perdia 3 pontos. Ana obteve um total de 130 pontos.

Após analisar as informações apresentadas, o próximo passo era montar um sistema com base no número total de questões e nas pontuações de Ana, formando duas equações, como mostrado na FIGURA 4, na resolução do Aluno C.

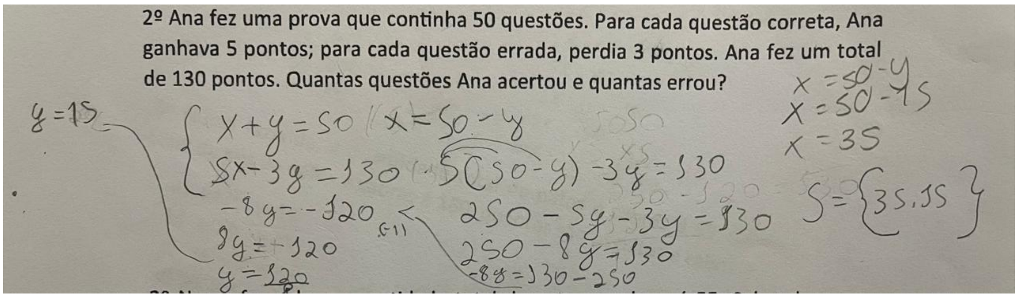
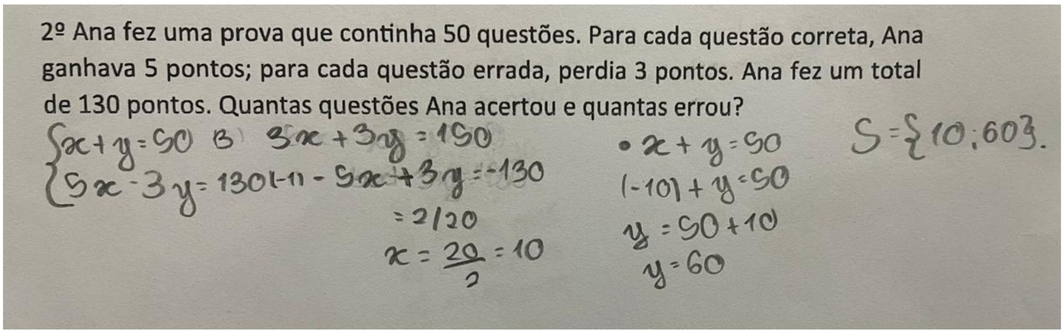


Figura 4

Fonte: acervo da pesquisa

O aluno aplicou o método da substituição para resolver o sistema linear. Ele escolheu a primeira equação do sistema e isolou a incógnita X, obtendo um valor com outra incógnita como resultado. Com o valor de X determinado, o aluno C o substituiu na segunda equação e, ao desenvolvê-la, obteve o valor de Y. Após encontrar o valor de Y, ele substituiu esse valor na equação onde havia isolado X, chegando ao resultado final e correto do problema.

Ao analisar a resolução deste aluno, percebe-se que ele compreendeu o conteúdo, conseguiu interpretar a questão e não teve dificuldades com a regra de sinais, ao contrário do aluno D, como mostrado na figura 5.


2º Ana fez uma prova que continha 50 questões. Para cada questão correta, Ana ganhava 5 pontos; para cada questão errada, perdia 3 pontos. Ana fez um total de 130 pontos. Quantas questões Ana acertou e quantas errou?

$\begin{cases} x+y=50 \; (3) \\ 5x-3y=130 \; (-1) \end{cases}$ $3x+3y=150$ / $-5x+3y=-130$ / $=2/20$ / $x=\frac{20}{2}=10$

• $x+y=50$ / $(-10)+y=50$ / $y=50+10$ / $y=60$

$S=\{10;60\}$.

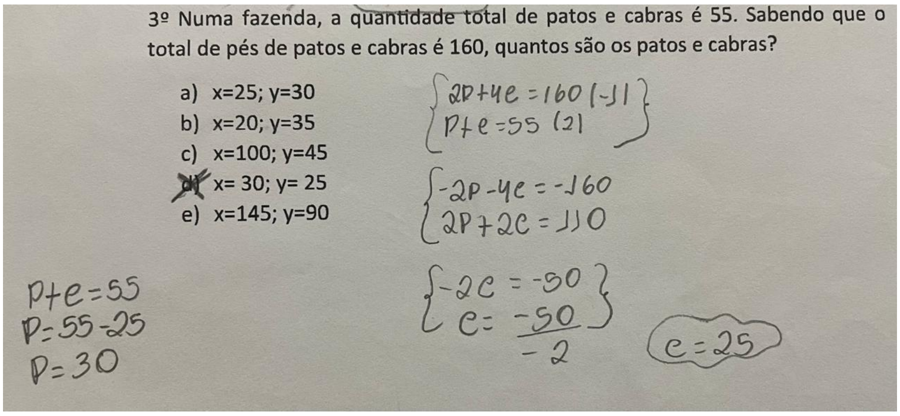
Figura 5

Fonte: acervo da pesquisa

Observa-se que o aluno entendeu o conteúdo, soube interpretar corretamente, mas errou no desenvolvimento da questão. No enunciado, quando se dizia que ele perdeu 3 pontos, isso deveria ser representado por uma subtração na montagem da equação, mas o aluno utilizou uma soma. Embora tenha obtido um resultado, ele não chegou ao valor correto.

No último problema da atividade aplicada, os alunos deveriam determinar a quantidade de patos e cabras na fazenda, sabendo que o total de animais era 55 e o total de patas, 160.

Neste problema, o aluno E montou corretamente as equações e, a partir daí, resolveu o sistema. Ele percebeu que o número de cabras e patos somava um total de 55 animais, o que forneceu uma equação. Em seguida, observou que os patos têm 2 pés e as cabras têm 4 pés, e a questão informava que o total de pés desses animais era 160. Com essas informações, ele formulou a segunda equação e resolveu o problema, como mostrado na FIGURA 6:


3º Numa fazenda, a quantidade total de patos e cabras é 55. Sabendo que o total de pés de patos e cabras é 160, quantos são os patos e cabras?

a) x=25; y=30
b) x=20; y=35
c) x=100; y=45
d) x= 30; y= 25
e) x=145; y=90

$\begin{cases} 2p+4c=160 \; (-1) \\ p+c=55 \; (2) \end{cases}$

$\begin{cases} -2p-4c=-160 \\ 2p+2c=110 \end{cases}$

$\begin{cases} -2c=-50 \\ c=\frac{-50}{-2} \end{cases}$

$c=25$

$p+c=55$
$p=55-25$
$p=30$

Figura 6

Fonte: acervo da pesquisa

Constatamos que o aluno utilizou o método da adição, multiplicando a primeira equação por -1, o que fez com que todos os sinais da equação fossem invertidos. Em seguida, somou as duas equações, anulando uma das incógnitas, pois elas tinham o mesmo valor e a mesma letra, mas sinais opostos. Ao anular uma incógnita, conseguiu encontrar o valor da outra. Depois, substituiu esse valor na primeira equação para determinar o valor da incógnita que faltava, chegando ao resultado final, que corresponde à alternativa D, a correta para esse problema.

Em relação ao mesmo problema, observou-se que o aluno F conseguiu realizar todo o desenvolvimento da questão, utilizando os métodos matemáticos corretos e necessários para encontrar as soluções. O erro ocorreu na representação da solução do problema, pois ele trocou a posição das incógnitas X e Y. Se houvesse uma representação gráfica, ele cometeria um erro ao não saber a posição correta de cada letra na solução. Devido a essa falta de compreensão, ele errou na resposta final e marcou a alternativa A, que estava incorreta. A solução está apresentada na FIGURA 7

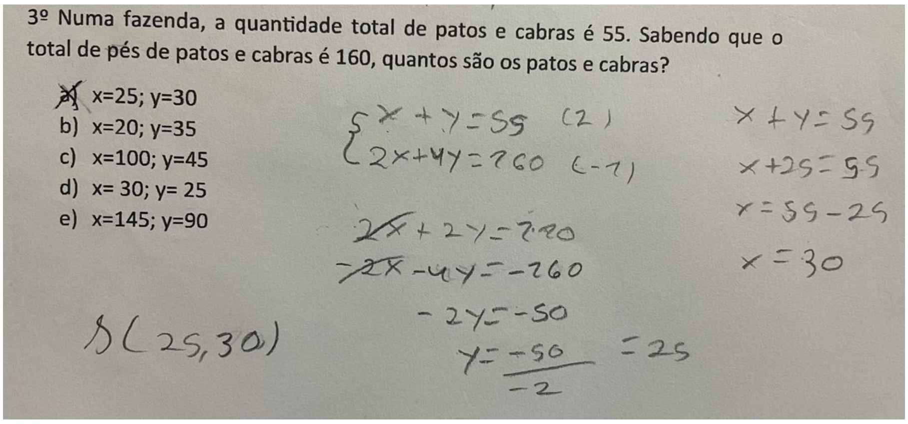


Figura 7

Fonte: acervo da pesquisa

Em síntese, os resultados obtidos mostram que os alunos possuem certo nível de compreensão sobre os conteúdos abordados, mas apresentam dificuldades importantes, especialmente em relação à interpretação das questões. Além disso, detectamos alguns equívocos relacionados a conhecimentos básicos de aritmética e álgebra.

4.2 SEGUNDO MOMENTO

No primeiro problema, já estava indicado que o problema deveria ser resolvido por sistema e pedia para encontrar a quantidade de cada tipo de queijo que Joana comprou. Ao interpretar o problema, deve-se começar separando as equações pela quantidade de queijos comprados e pelos valores dos queijos com o total pago. A figura 8 mostra a resolução do problema realizada pelo aluno G, exemplificando como a resolução deve ser feita.

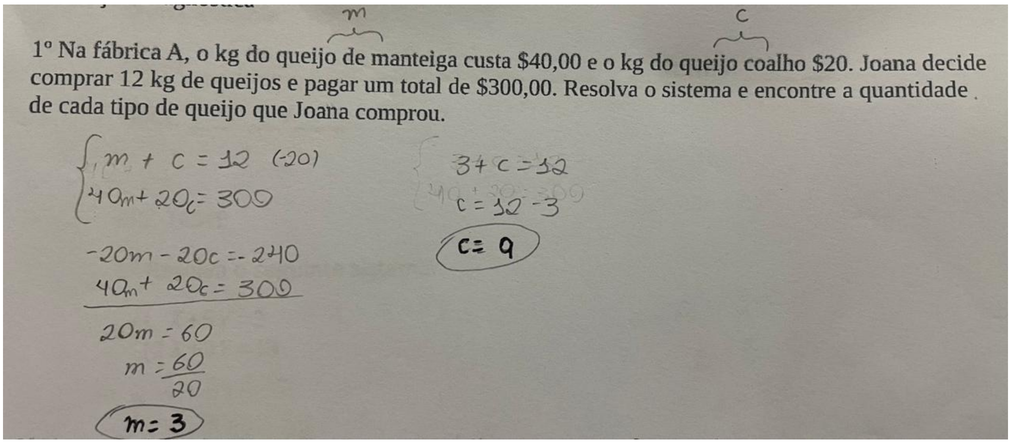


Figura 8

Fonte: acervo da pesquisa

Essa resolução foi desenvolvida pelo método da adição, mas poderiam ser utilizados outros métodos também para encontrar os resultados. A resolução do aluno está na FIGURA 8, acima. O queijo de manteiga e o queijo coalho somaram 12 kg, ou seja, a quantidade de queijo de manteiga mais a quantidade de queijo coalho totalizaram 12 kg. Essa foi a primeira equação formada.

Para a segunda equação, o problema informa que o preço do kg do queijo de manteiga é $40 e o preço do kg do queijo coalho é $20, e Joana pagou um total de $300,00 pela compra. Portanto, a equação seria: $40 (queijo de manteiga) + $20 (queijo coalho) = $300,00. Com o sistema montado, o aluno G aplicou o método da adição, multiplicando a primeira equação por -20. Depois, somou o resultado da multiplicação com a segunda equação, anulando uma incógnita, já que elas tinham os mesmos valores, mas sinais opostos.

Após a soma das equações, restou apenas uma incógnita, que ele resolveu para encontrar a quantidade de queijo de manteiga. Com esse valor, o aluno substituiu a quantidade de queijo de manteiga na primeira equação do sistema, resolveu e obteve a quantidade de queijo coalho. Dessa forma, ele encontrou a quantidade de cada tipo de queijo.

Percebe-se que o aluno tem conhecimento do conteúdo e teve cuidado para interpretar e desenvolver o problema corretamente, diferentemente do aluno H, que não utilizou os métodos do sistema linear, mas resolveu o problema por meio de métodos matemáticos e lógica, como mostrado na figura 9.

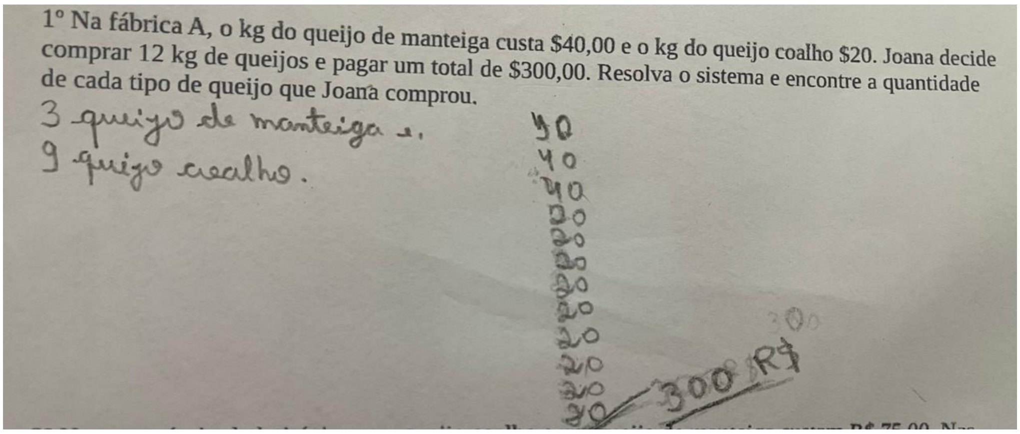


Figura 9

Fonte: acervo da pesquisa

O aluno H utilizou uma estratégia de tentativa e erro, criando 12 opções, correspondendo aos valores de $40 e $20, e foi somando até atingir o total de $300. Para isso, ele precisaria somar as 12 opções selecionadas e, no final, conferir se o valor total era igual ao pago por Joana. Com esse método, ele chegou à conclusão de que foram comprados 3 queijos de manteiga e 9 queijos coalho. O resultado está correto, mas esse método de tentativa e erro talvez não seja tão eficiente em outras situações.

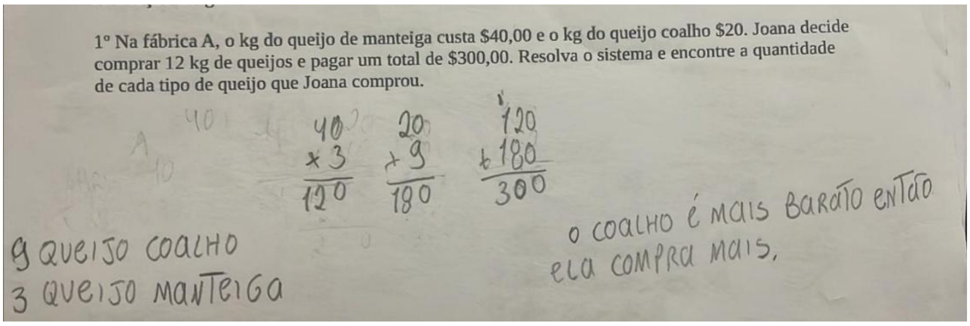


Figura 10

Fonte: acervo da pesquisa

A figura acima, indica o processo de resolução do aluno I , que adotou um raciocínio semelhante, mas utilizou um método mais sistemático. Ele multiplicou os valores dos queijos e, ao final, somou os resultados, chegando ao total de $300. Ou seja, ele multiplicou o valor do queijo de manteiga ($40) por 3 e o valor do queijo coalho ($20) por 9. Depois, somou os resultados das duas multiplicações e verificou que o total era igual ao valor pago por Joana. Com isso, ele concluiu que foram comprados 3 queijos de manteiga e 9 queijos coalho.

No segundo problema, os alunos precisavam descobrir o valor unitário de cada tipo de queijo para, assim, calcular o valor total da compra de dois queijos de manteiga e um queijo coalho. Analisando a questão, como mostrado na FIGURA 11, ela informa que 1 kg de queijo de manteiga mais 1 kg de queijo coalho custa $75, formando assim a primeira equação.

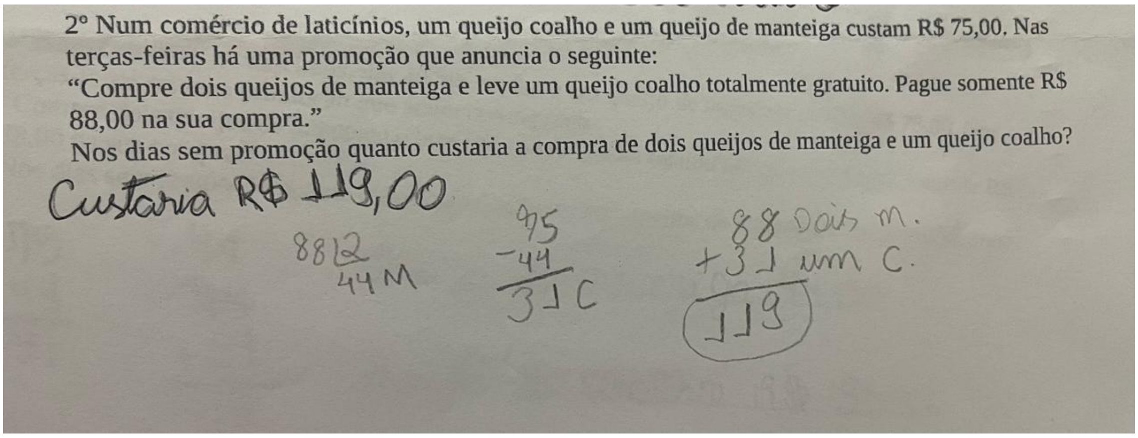
No entanto, nesse comércio existe uma promoção: na compra de dois queijos de manteiga, o queijo coalho é gratuito, e o total pago é $88. Ou seja, se o queijo coalho é gratuito, os dois queijos de manteiga custam $88, o que forma a segunda equação. Nesse caso, temos apenas uma incógnita, que é o preço do queijo de manteiga, pois o queijo coalho não está sendo cobrado.

O problema pede o valor de dois queijos de manteiga e um queijo coalho, em um dia sem promoção. Com as duas equações montadas, formamos um sistema e, utilizando o método da substituição, isolamos a incógnita da segunda equação, o que nos permite descobrir facilmente o valor do queijo de manteiga. Com o valor do queijo de manteiga encontrado, substituímos esse valor na primeira equação e, assim, obtemos o valor do queijo coalho.

Definidos os valores de cada tipo de queijo, basta somar o valor de dois queijos de manteiga e um queijo coalho para responder à pergunta final da questão.

Conforme mostra a figura 11, alguns alunos utilizaram a seguinte estratégia: como a pergunta final pedia o valor de dois queijos de manteiga mais um queijo coalho, perceberam que, nos dias de promoção, ao comprar dois queijos de manteiga, ganhavam um de coalho. Então, eles dividiram o valor dos dois queijos de manteiga, que era $88, por 2, descobrindo que o valor unitário de cada queijo de manteiga era $44.

Sabendo que um queijo de manteiga e um queijo coalho custavam $75, como indicado no problema, basta subtrair o valor de $44 (preço do queijo de manteiga) de $75, para encontrar $31 como resultado, que seria o valor do queijo coalho. Com os valores de cada tipo de queijo definidos, eles responderam à pergunta final somando $88 (valor dos dois queijos de manteiga) mais $31 (valor do queijo coalho), totalizando $119,00 como o custo total dessa compra.



2º Num comércio de laticínios, um queijo coalho e um queijo de manteiga custam R$ 75,00. Nas terças-feiras há uma promoção que anuncia o seguinte:
"Compre dois queijos de manteiga e leve um queijo coalho totalmente gratuito. Pague somente R$ 88,00 na sua compra."
Nos dias sem promoção quanto custaria a compra de dois queijos de manteiga e um queijo coalho?

Custaria R$ 119,00

88|2 44 M

$75 - 44 = 31$ C

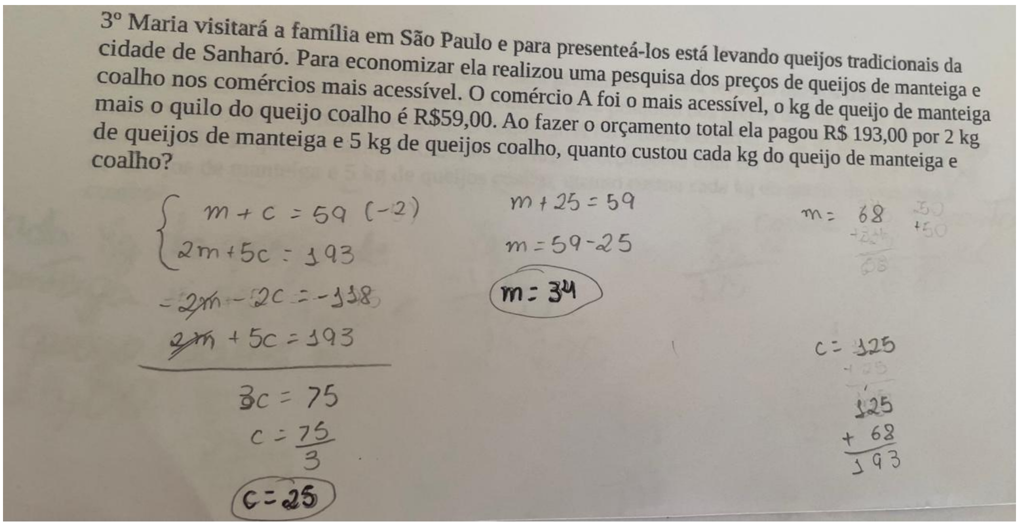
88 Dois m.
+31 um C.
119

Figura 11

Fonte: acervo da pesquisa

No último problema, os alunos necessitavam construir o sistema e descobrir os valores de cada tipo de queijo que Maria comprou para presentear a família. O aluno G utilizou o método da adição para resolver o sistema linear. Ele separou as duas equações, formando um sistema, e multiplicou a primeira equação por -2 para conseguir anular uma incógnita ao somar as duas equações.

A partir daí, restou apenas uma incógnita, que, ao ser resolvida, deu o valor de $25 para o kg do queijo coalho. Com esse valor encontrado, o aluno substituiu na primeira equação original do problema e, assim, obteve o valor do queijo de manteiga, que é $34. A resolução do aluno G, que fez corretamente as questões, está apresentada na figura 12:



3º Maria visitará a família em São Paulo e para presenteá-los está levando queijos tradicionais da cidade de Sanharó. Para economizar ela realizou uma pesquisa dos preços de queijos de manteiga e coalho nos comércios mais acessível. O comércio A foi o mais acessível, o kg de queijo de manteiga mais o quilo do queijo coalho é R$59,00. Ao fazer o orçamento total ela pagou R$ 193,00 por 2 kg de queijos de manteiga e 5 kg de queijos coalho, quanto custou cada kg do queijo de manteiga e coalho?

$$\begin{cases} m + c = 59 \ (-2) \\ 2m + 5c = 193 \end{cases}$$

$$-\cancel{2m} - 2c = -118$$
$$\cancel{2m} + 5c = 193$$
$$3c = 75$$
$$c = \frac{75}{3}$$
$$c = 25$$

$$m + 25 = 59$$
$$m = 59 - 25$$
$$m = 34$$

m = 68

c = 125

125
+ 68
193

Figura 12

Fonte: acervo da pesquisa

Uma outra resolução, mostrada na figura 13, foi realizada pelo aluno J, que resolveu o problema por tentativas. Como a questão dizia que 1 kg de cada queijo custava $59, ele deduziu que o queijo de manteiga custava $34 e o queijo coalho $25.

No orçamento total, Maria pagou $193 por 2 kg de queijo de manteiga e 5 kg de queijo coalho. A pergunta era quanto custava cada kg de queijo. O aluno J, ao deduzir que o preço do queijo de manteiga era $34, multiplicou esse valor por 2 (pois Maria comprou 2 kg). Para os 5 kg de queijo coalho, ele multiplicou $25 por 5, chegando aos valores de $68 para o queijo de manteiga e $125 para o queijo coalho. Somando esses valores, obteve o total de $193, que é o valor final pago por Maria.

A resolução do aluno J pode ser vista na figura 13:

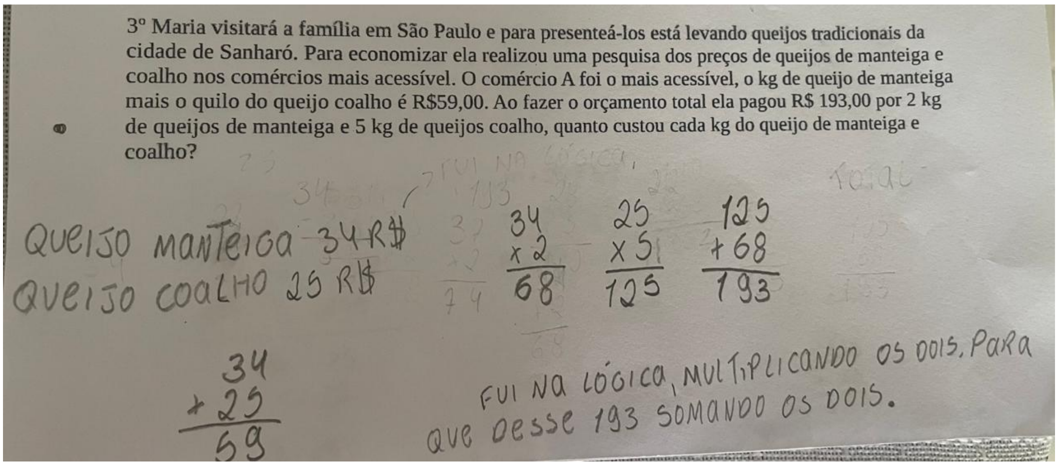


Figura 13

Fonte: acervo da pesquisa

Vale salientar que muitos alunos não conseguiram ou sequer tentaram responder este problema, evidenciando que não conseguiram interpretar o problema adequadamente.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente artigo, buscamos refletir sobre as potencialidades e dificuldades apresentadas por estudantes do primeiro ano do Ensino Médio de uma cidade do interior de Pernambuco, na resolução de problemas envolvendo Sistemas Lineares. Analisamos como os alunos aplicam seus conhecimentos de Sistemas Lineares ao se depararem com problemas inclusive envolvendo temáticas do cotidiano.

Mais especificamente, nosso objetivo foi analisar as estratégias dos estudantes na perspectiva da resolução de problemas, buscando evidências tanto da compreensão de conceitos e procedimentos matemáticos quanto da compreensão das etapas de resolução de problemas, conforme estabelecido por Proença (2022).

Percebeu-se que os pesquisados enfrentam dificuldades nas quatro etapas de referência apresentadas - representação, planejamento, execução e monitoramento, especialmente na compreensão e interpretação dos problemas, que são pontos cruciais dessas dificuldades.

Nossa análise permitiu supor que essas dificuldades podem estar relacionadas à má formação dos conceitos matemáticos básicos, assim como à falta de familiaridade com problemas contextualizados. Isso fica claro ao considerarmos o primeiro momento da coleta de dados, no qual boa parte dos estudantes conseguiu resolver com maior precisão. Isso nos indica que questões menos dependentes de intepretação e, consequentemente, da transição da linguagem materna para a linguagem matemática, são mais acessíveis aos alunos, tanto no domínio do conhecimento matemático quanto na aplicação das etapas de resolução.

É importante destacar que identificamos resoluções alternativas, fruto da compreensão e da criatividade dos estudantes, evidenciando aspectos relevantes para o desenvolvimento do pensamento matemático.

Diante dessas considerações, reconhecemos que estudos futuros podem ser realizados em torno da mesma temática, inclusive explorando novos caminhos como construção de sequências didáticas para superar dificuldades de aprendizagem, utilização de metodologias como modelagem matemática e incorporação de recursos tecnológicos na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

BARROSO, Juliane Matsubara. Matemática - 8º Ano - Ensino Fundamental. Projeto Araribá. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

CAI, Jinfa; LESTER, Frank. Por que o ensino com resolução de problemas é importante para a aprendizagem do aluno? BOLETIM GEPEM (pISSN: 0104-9739, eISSN: 2176-2988) | Nº 60 – JAN. / JUN.2012 | 147-162.

DANTE, Luiz Roberto. Matemática : contexto & aplicações. 2. ed. – São Paulo : Ática, 2013.

MARTINS, Fabíola da Cruz; ANDRADE, Silvanio de. Ensino-aprendizagem de Sistemas Lineares na licenciatura através da Exploração-Proposição-Resolução de Problemas. Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo (REMat), São Paulo (SP), v.20, n.01, p.1-19. 2023.

PAIVA, Manoel. Matemática - 1º Ensino Médio. 1.ed. São Paulo: Moderna , 2009.

PEDRINI, Leandro Colombo. O Estudo de Sistemas Lineares nos Ensinos Fundamental e Médio. Campo Grande – MS, 2013.

PERNAMBUCO, Secretaria de Educação e Esportes. Currículo de Pernambuco: ensino médio. Secretaria de Educação e Esportes, União dos Dirigentes Municipais de Educação. Recife: Secretaria, 2021.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. Revista Sítio Novo – vol. 2, n. 2 – jul./dez. 2018 - ISSN 2594-7036.

PREFEITURA MUNICIPAL DE SANHARÓ – A nossa força vem do povo. História do Município. Disponível em https://sanharo.pe.gov.br/historia-do-municipio/ .

PROENÇA, Marcelo Carlos de; MAIA-AFONSO, Érika Janine; MENDES, Luiz Otavio Rodrigues; TRAVASSOS, Wilian Barbosa. Dificuldades de Alunos na Resolução de Problemas: análise a partir de propostas de ensino em dissertações. Bolema, Rio Claro (SP), v. 36, n. 72 , p.262 -285, abr. 2022.