

INSTITUTO FEDERAL PERNAMBUCO
UNIDADE ACADÊMICA DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

FRANCINETTE MENDES LOPES

**ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NO PARQUE: UMA SEQUÊNCIA
DIDÁTICA NO SOFTWARE GEOGEBRA PARA PROFESSORES**

Pesqueira

2021

FRANCINETTE MENDES LOPES

ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE NO PARQUE: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA NO SOFTWARE GEOGEBRA PARA PROFESSORES

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Especialização do Ensino da Matemática do IFPE, como requisito parcial à obtenção do grau de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Área de concentração: Educação matemática.

Orientador: Prof. Me. Bruno Lopes Oliveira da Silva

Pesqueira

2021

Catálogo na fonte

Bibliotecária Graziella da Silva Moura, CRB4- 1862

L864a

Lopes, Francinette Mendes.

Análise Combinatória e Probabilidade no Parque: uma sequência didática no software GeoGebra para professores/ Francinette Mendes Lopes. – Recife, 2021.

47 f.: il.

Orientador: Prof. Me. Bruno Lopes Oliveira da Silva
Trabalho de Conclusão de Curso – Instituto Federal de Pernambuco, DEaD. Especialização em Ensino da Matemática, Recife: Pesqueira, 2021.

Formato: pdf

1. Ensino da Matemática. 2. Análise Combinatória.
3. Probabilidade. 4. GeoGebra. 5. Ensino Médio. I. Silva, Bruno Lopes Oliveira da. II. Título.

CDD 372

Francinette Mendes Lopes

Título: Análise Combinatória e Probabilidade no Parque: Uma Sequência Didática no Software Geogebra para Professores

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de especialista em Ensino da Matemática do Ensino Médio e aprovado em sua forma final pela Especialização em Ensino da Matemática do Ensino Médio.

Recife, 30 de Junho de 2021.

Banca Examinadora:



Prof^o. Ms. Bruno Lopes Oliveira da Silva
Instituto Federal de Pernambuco - Pesqueira
Orientador



Prof.^a Ms. Amanda Barbosa da Silva
Instituto Federal de Pernambuco – DEaD
Examinador Interno



Prof. Dr^a Ana Paula Barbosa de Lima
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE
Examinador Externo

Aos meus pais, por todas as orações e apoio incondicional.

Para aqueles que acreditam no melhor da educação é não se deixam serem vencidos pelas dificuldades.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco – IFPE pela oportunidade do estudo, por acreditar e incentivar a formação continuada dos docentes de Matemática com o curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Agradeço a Coordenação e ao Corpo Docente, professores e tutores, pelo conhecimento transmitido e apoio durante esse período de formação continuada.

Agradecimento ao Polo Pesqueira da UAB/IFPE pelo suporte presencial para realização das atividades do curso de Pós-Graduação Lato Sensu em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Ao meu Professor-Orientador Bruno Lopes Oliveira da Silva por ter dedicado sua vida a transmitir conhecimentos, pelas orientações e incentivos nos estudos, pela inspiração em ser um bom docente, pelas nossas conversas, sugestões e apoio.

Agradecer a minha psicóloga por ter dedicado sua vida a ajudar pessoas, como eu, que estavam perdidas em si e doentes emocional e fisicamente e que viram nesta profissional a oportunidade de melhorar a vida, superar suas dificuldades e conviver de forma mais harmoniosa com suas dificuldades.

Aos meus familiares e amigos que de alguma forma contribuíram para esta formação e conclusão desse ciclo de aprendizagem.

E para finalizar, o meu mais sincero agradecimento a todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a concretização de mais esta etapa, estimulando-me intelectual e emocionalmente.

*A vida é apenas ilusão
Dias inúteis, às vezes trágicos.
Nessa doce confusão,
Só nos restam Sonhos Fantásticos.*

*Quando os sonhos são vividos
E as lágrimas desaparecem,
Abandonamos os medos
E retornamos nosso caminho.*

Colin Thompson

RESUMO

O presente texto aborda uma sequência didática construída no GeoGebra. Nela, são trabalhadas conjuntamente os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade. A proposta tem como problemática a investigação de como os professores podem utilizar recursos digitais (*software*) para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos com alunos do Ensino Médio. Logo, a fundamentação teórica buscou obras que abordassem a temática apresentada e o ensino dos dois conceitos, suas dificuldades e os benefícios que as tecnologias digitais podem trazer para o Ensino na Educação Matemática. Deste modo, utilizamos a pesquisa qualitativa-quantitativa para o desenvolvimento do estudo junto com a estratégia transformadora sequencial; para tanto, adaptamos uma situação do cotidiano, a saber, a jardinagem de um parque, para desenvolver os conteúdos a partir de uma perspectiva qualitativa-quantitativa no decorrer deste texto.

Palavras-chave: Análise Combinatória, Probabilidade, Sequência Didática, *Software* GeoGebra.

ABSTRACT

This text addresses a didactic sequence built in GeoGebra. It works together the contents of Combinatorial Analysis and Probability. The proposal has as its problematic the investigation of how teachers can use digital resources (software) for teaching and learning mathematical concepts in high school students. Therefore, the theoretical foundation sought works that addressed the theme presented and the teaching of the two concepts, their difficulties and the benefits that digital technologies can bring to Teaching in Mathematics Education. Thus, we used qualitative-quantitative research to develop the study together with the sequential transformative strategy, in which we adapted an everyday situation, namely, the gardening of a park, to develop the contents from a quantitative-qualitative perspective in this text.

Keywords: Combinatorial Analysis, Probability, Didactic Sequence, GeoGebra Software.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1 O PROFESSOR DE MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	14
2.3 O PROFESSOR DE MATEMÁTICA O GEOGEBRA NA SALA DE AULA ..	16
2.4 PROBLEMÁTICA DO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE	18
2.5 O CONSTRUTIVISMO E O DESENVOLVIMENTO DE PENSAMENTOS NA BNCC	21
3 OBJETIVO	24
3.1 OBJETIVO GERAL	24
3.2 OBJETIVO ESPECIFICO	24
4 METODOLOGIA	24
4.1 CARACTERIZAÇÃO DO PROCEDIMENTO DE PESQUISA.	27
4.2 DISCRIÇÃO É CARACTERIZAÇÃO DO CENÁRIO DE PESQUISA.	28
4.3 CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES ELABORADA NO GEOGEBRA	29
4.4 RELAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM AS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC	37
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	45
REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

TRAJETÓRIA DA PESQUISA

Decifrar as próprias fraquezas, assim como dos outros, é a única forma de vencer todas as batalhas. Sun Tzu, A Arte da Guerra.

Inicialmente, apresenta-se a justificativa, suas problemáticas e questões que nos motivaram a desenvolver este estudo. Em sequência, são expostos os objetivos e a pergunta que nortearam a investigação. Por fim, descreve-se brevemente a estrutura da monografia a respeito do que será tratado em cada seção.

Deste modo, começamos com a seguinte indagação: que atividades meus alunos deverão fazer para aprender? Seja em salas de aula presenciais ou virtuais do Ensino a Distância - EaD e agora com as salas de aulas remotas e híbridas, essa é uma pergunta que a maioria dos professores fazem a si mesmo.

Em nosso entender, o construtivismo coloca a ação como sendo o meio no processo de aprendizagem. Ou seja, a ação do aluno em “querer aprender” está ligada ao fator de que o aluno precisa “querer saber” e estar curioso.

No entanto, uma das controvérsias dos sistemas de ensino, em especial no ensino da Matemática, é que a aprendizagem é pouco significativa ou condizente com a realidade dos alunos. Dessa maneira, ocorre a necessidade de construir, em sala de aula, um ambiente de aprendizagem integrado e abrangente, capaz de promover o engajamento do aluno.

Mediante esse cenário, temos as Tecnologias Digitais como ponte para o ensino, temática a qual nos motivou a desenvolver este estudo ligando-se ao ensino de Matemática e os estudos da Educação Matemática. Os avanços e a disseminação de novas tecnologias de informação e comunicação vêm criando formas de convivência e interação gerando novas questões. *Como integrar essas tecnologias no desenvolvimento de conhecimentos e saberes nos alunos?* Pergunta

a qual, motivou, inicialmente, o estudo e se associa a questão norteadora, a qual buscaremos responder ao longo deste estudo.

A partir das inquietações e dos relatos de companheiros de profissão docente, que atuam em diferentes salas de aulas, dando destaque a modalidade de ensino remoto, surgiu o interesse em investigar como os professores podem utilizar os recursos digitais, *Softwares*, como o GeoGebra, para o ensino e aprendizagem de matemática de alunos do Ensino Médio, no envolvimento dos conceitos de Análise Combinatória. Essa é a problemática desta pesquisa, ou seja, a questão norteadora.

Com isso, tivemos como objetivo geral: elaborar uma sequência didática, em que são abordadas atividades¹ envolvendo os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade usando o *software* GeoGebra.

O objetivo específico consiste em interpretar os dados qualitativos e quantitativos das atividades relacionando-se com as competências e habilidades estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

Considerando que o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade são importantes, também, para a formação inicial e continuada dos professores de matemática; tem-se como hipótese que as mensagens didáticas que se colocam no uso de *Softwares* podem auxiliar os professores no ensino com o objetivo de visualizar os conceitos desenvolvidos em sala de aula.

Com base nessa discussão, a investigação dialogou com documentos oficiais elaborados pelo Ministério da Educação – MEC (BRASIL, 2018; 2006; 2002) e com os autores Furtado (2019), Alsina (2010), Bortolossi (2020), Borba Souza & Carvalho (2018), Santos (2017), Gomes & Carvalho (2020), Vaz & Jesus (2014), Souza & Calyson (2019); combinados teoricamente para o entendimento dos desafios de ensino e práticas de professores que ensinam Análise Combinatória e Probabilidade mediante uma sequência didática com o *software* GeoGebra.

As próximas seções do texto tratam sobre o ensino com Tecnologias Digitais na Educação Matemática, o professor de matemática e o uso do GeoGebra na sala de aula, a problemática do ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, o

¹ Denotamos o nome atividades para o conjunto de três questões elaboradas, executadas e solucionadas no GeoGebra.

construtivismo e o desenvolvimento de pensamentos na Base Nacional Comum Curricular – BNCC.

Em relação aos procedimentos metodológicos, é apresentado a construção e a proposta de desenvolvimento da sequência didática. Apresentamos, também, a trajetória da pesquisa e sua caracterização, contemplando a construção das atividades no *software* GeoGebra.

As análises em relação à sequência didática e as competências e habilidades da BNCC são desenvolvidos na descrição da abordagem da sequência, de como os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidades surgem e são desenvolvidos a partir dessas atividades.

Em síntese, são feitas as discussões e conclusões do estudo deste trabalho monográfico, em que se espera compartilhar com os professores de matemática a possibilidade da utilização da abordagem envolvendo o *software* e a partir da modelização de uma situação. Por fim, são apresentadas as referências bibliográficas da literatura que é parte integrante da estrutura desta monografia.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 O PROFESSOR DE MATEMÁTICA E AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

*"A essência da Matemática não está nas fórmulas, mas nas ideias que impulsionam a criatividade de suas teorias". **Geraldo Ávila***

Múltiplas são as Tecnologias Digitais e diversas são suas finalidades e funções. Nesse contexto, as tecnologias podem ser utilizadas como auxílio na construção do conhecimento dos alunos, haja vista que, quando utilizadas como apoio e complemento ao material didático do professor, podem apresentar um grande diferencial no processo de ensino e aprendizagem.

Nessa perspectiva, a utilização dos recursos digitais de aprendizagem auxilia no planejamento de atividades educativas mais criativas. Ainda assim, Souza e Calyson (2019) relatam que nem sempre a tecnologia vem a ajudar, diversamente, chegando até a atrapalhar o progresso de aprendizagem, dependendo da forma como é utilizada. O uso desses recursos requer habilidades e competências, a fim de que seja atingido o objetivo proposto. Desse modo, é necessário que os professores e os alunos tenham familiaridade com o recurso, para assim, fazer o melhor uso dele nos fins pedagógicos.

Referente a esse ponto, Alsina (2010) questiona o que realmente significa ser matematicamente competente e como o professor pode planejar uma atividade matemática rica sobre o ponto de vista das competências e habilidades. O autor realiza discussões sobre a *pirâmide da Educação Matemática*, fazendo um comparativo com a pirâmide alimentar e o que ocorre quando se tem uma boa alimentação ou má alimentação. Nesse comparativo, deliberar-se de como a pirâmide da Educação Matemática está invertida no cenário da educação (Figura 1). Em realidade, ao utilizar o livro didático como base da pirâmide, sem relacionar as atividades com situações cotidianas, no intuito de promover uma aprendizagem significativa, é o que motiva no aluno o "quere saber", para que assim este possa ter

uma compreensão do julgar, fazer e usar a matemática em diversas situações nas quais elas podem desempenhar um papel.

Figura 1 – A pirâmide da Educação Matemática.



Fonte: Alsina (2010, p. 2), com adaptações da autora.

Nesse direcionamento, estudos em Educação Matemática chamam a atenção para o fato de que o desenvolvimento de novas Tecnologias de Informação e Comunicação – TIC's e a criação de novos recursos não representam uma solução fácil ou mágica para superar as inúmeras dificuldades e desafios da Educação Básica, a qual busca formar sujeitos letrados críticos, capazes de compreender o mundo no qual vivem e de sentir-se responsável pela direção que a sociedade pode assumir.

Nessa perspectiva, acreditamos que a chave para o sucesso de uma educação inovadora está nas pessoas e nas relações estabelecidas. Compreendendo que a tecnologia não devendo ser encarada como um fim em si, mas devendo ser vista como uma oportunidade à aprendizagem por viabilizar uma extensão da sala de aula e trazer novas maneiras de conceber a educação.

Com base nisso, entramos nas discussões relacionadas ao ensino de matemática nas diferentes salas de aulas que sugiram a partir das necessidades da sociedade. Como por exemplo, com a pandemia do coronavírus (COVID-19), a Educação está atravessando um momento disruptivo e de reconstrução.

De uma hora para outra, as aulas presenciais pararam, surgindo então as aulas on-line e off-line, síncronas e assíncronas, remotas e híbridas. Assim, “diferentemente da Educação a Distância (EaD), o ensino remoto caracteriza-se pelas aulas em tempo real mediadas por tecnologias digitais” (GOMES & CARVALHO, 2020, p. 2), nas quais as propostas de atividades devem ser virtualmente integradas e complementadas pelo uso das tecnologias, ou seja, os sujeitos professor-aluno interagem colaborativamente entre si e com as tecnologias.

Considera-se que o tempo e o uso cotidiano tem se encarregado de ensinar professores e alunos a tirarem melhor proveito dessa tecnologia, que antes era vista apenas como uma ameaça à disciplina dos alunos pela tentadora distração que os aparelhos são capazes de provocar.

As aulas remotas definidas a partir de um momento de pandemia ressignificou o modelo de ensino e aprendizagem, no mundo. As aulas tornaram-se síncronas mediadas por tecnologias digitais, possibilitando aos docentes a revisão de suas práticas, inclusive com práticas não efetivadas com recursos tecnológicos que conduzissem os processos de mediações. (GOMES & CARVALHO, 2020, p. 16)

Nesse direcionamento, os diferentes recursos tecnológicos promovem o desenvolvimento diferenciado de metodologias das quais os professores podem aplicar em sala de aula. O modelo de ensino e aprendizagem passou por esse momento disruptivo, em que novas metodologias e práticas se fizeram necessárias. Assim, abordaremos, no próximo tópico, a formação do professor de matemática e o uso do GeoGebra nas aulas de matemática.

2.3 O PROFESSOR DE MATEMÁTICA O GEOGEBRA NA SALA DE AULA

Nas pesquisas consideradas para esta investigação - Borba Souza e Carvalho (2018), Souza e Calyon (2019), Santos (2017), Vaz e Jesus (2014) - encontra-se um consenso de que a formação inicial, no Brasil, é inadequada ou insuficiente. Desde a sala de aula presencial até a sala de aula on-line, temos que questionar se as estratégias utilizadas, de fato, possibilitam o diálogo, a formação de competências e habilidades na formação humana, ou apenas legitimam o ritual pedagógico de transmissão de conhecimento.

De tal maneira, temos que, seja no ambiente de ensino-aprendizagem, presencial ou virtual, rever o uso que fazemos de diferentes tecnologias enquanto estratégia pedagógica, sendo necessário ter clareza quanto ao paradigma

educacional que estamos utilizando. Vaz e Jesus (2014, p. 73-74) destacam que “é muito comum professores já formados não aderirem as novas possibilidades de ensino devido exclusivamente ao fato de terem uma formação limitada”.

Por este motivo, ocorre a necessidade de que haja uma boa formação docente, na qual os professores, a partir de suas inquietações e limitações, busquem soluções que possam melhorar o desempenho estudantil e educacional, superando estas dificuldades, por meio de pesquisas e inovações. Infelizmente, o professor vem de uma Educação Básica em que a transmissão tecnicista ainda é resistente. Eles passam, em alguns casos, por uma graduação em que não há o desenvolvimento de habilidades que levem a ação do aluno, ou seja, o construtivismo, no desenvolvimento dos seus conhecimentos. Assim, ao final dessa formação conteudista, o professor retorna para a sala de aula reiniciando e dando continuidade ao ciclo de “transmissão” de conhecimento.

Em vista disso, precisamos considerar que atualmente trabalha-se com estudantes que nasceram na era digital e estão conectados na maior parte do tempo. A educação está em pleno processo de transformação com o uso de novas tecnologias. O aprendizado atravessou as paredes das escolas por meio dos dispositivos móveis disponíveis nos dias de hoje; negar isso é desconsiderar os conhecimentos prévios dos estudantes, desvalorizando o processo de ensino suas habilidades e competências.

Logo, é justamente por isso que surgiu nosso interesse de utilizar o *software* GeoGebra no desenvolvimento de uma proposta de atividade. O GeoGebra é um *software* de Matemática/Geometria dinâmica no qual se pode fazer modelações, experimentações, conjecturas, formalizações e generalizações sobre o conhecimento matemático. Concebido por Markus Hohenwarter e uma equipe de programadores internacionais, o *software* tem o propósito de facilitar o ensino e aprendizagem da matemática nas escolas (NAVARRO, WERNECK E CANDIDO, 2015).

De acordo com Bortolossi (2020), a literatura tem apontado para as múltiplas vantagens do uso do *software*, sendo a tecnologia apenas uma propulsora para trazer o encantamento às aulas, não devendo ser encarada como um fim em si, mas devendo ser vista como uma oportunidade à aprendizagem por viabilizar a

movimentação de ‘pontos’ estáticos, tornando-se uma extensão do quadro, onde novas maneiras de conceber o ensino e a Educação Matemática são necessárias.

Quando ponderamos sobre o uso desse recurso, acreditamos que o professor possa construir atividades que transformem a experiência do aprendizado de conceitos e aplicações, expandindo a capacidade do aluno de aprender.

2.4 PROBLEMÁTICA DO ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

Considerando a necessidade da sociedade os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, já no final da década de 90, destacava a necessidade de incorporar os conteúdos de Estatística, Combinatória e Probabilidade (BRASIL, 2002). Visto que esses conteúdos são de suma importância para a decodificação de dados e informações presentes no cotidiano. Esses conteúdos são muito úteis para o desenvolvimento cognitivo e de formas de pensar nos alunos, além de contribuírem para a formação cidadã em que visa formar pessoas críticas e reflexivas da sua realidade de convívio, fazendo-se necessários e incentivados a serem trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental até o fim do Ensino Médio.

Borba, Souza e Carvalho (2018, p. 2) ressaltam que “embora já se tenham passados 20 anos da publicação dos PCN como proposta de introduzir esses conteúdos” – estatística, análise combinatória e probabilidade -, “eles não são uma realidade em todas as salas de aula”. Assim, por diferentes fatores, como a formação inicial e continuada dos professores, pelas limitações do docente no “domínio” desses conteúdos e entre outros, surgem essa realidade na qual o aluno, em muitos casos, conclui a Educação Básica com poucos conhecimentos de Estatística, Probabilidade e Combinatória.

Nesse direcionamento, após a publicação dos PCN, vários outros documentos elaborados pelo MEC foram prontamente publicados seguindo esse mesmo alinhamento. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006), são direcionados vários pontos referentes ao ensino de Combinatória e Probabilidade e a utilização de tecnologias, quando possíveis, para a modelação de situações com dados reais.

Nesse processo, nas situações e nas experiências aleatórias, os alunos precisam assimilar e descrever situações de Combinatória e Probabilidade em termos de eventualidades, associá-las a um conjunto de eventos elementares e representá-las de forma esquemática, sem ocorrência das fórmulas. Fórmulas essas que devem parecer como produto final, e não como ponto de partida para a abordagem desses conhecimentos e formas de pensamento – *pensamento algébrico, combinatório, probabilístico entre outros tipos de pensamento*.

Conforme apontado, os PCN e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio não são os únicos documentos que destacam a importância de desenvolver os conteúdos de Combinatória e Probabilidade na Educação Básica. Em dezembro de 2018, o Ministério da Educação (MEC) homologou o documento da Base Nacional Comum Curricular – (BNCC); a partir desse momento, o Brasil passou a ter uma Base com as aprendizagens previstas para toda a Educação Básica, da Educação Infantil ao final do Ensino Médio (BRASIL, 2018).

Nesse documento, são estabelecidas competências específicas e um conjunto de habilidades para o ensino da Matemática na Educação Básica, tendo como ponto de maior destaque o desenvolvimento do Letramento Matemático, visto que o saber matemático não pode se limitar ao conhecimento da terminologia, dos dados e dos procedimentos. Os estudantes devem conseguir combinar esses elementos para atender necessidades do cotidiano. Desse modo, o letramento matemático viabiliza o desenvolvimento da capacidade individual em formular, empregar e interpretar a matemática em diferentes contextos.

A BNCC aponta a complexidade no uso das fórmulas no ensino da matemática, em que, na grande maioria dos casos, os professores iniciam o ensino dos conteúdos a partir dessas normas, não estimulando o desenvolvimento de atividades investigativas que envolvam a ação dos alunos. Explicitando esse pensamento, a BNCC aponta que “o letramento em matemática ajuda os indivíduos a reconhecer a importância da matemática no mundo, e agir de maneira consciente ao ponderar e tomar decisões necessárias a todos os cidadãos construtivos, engajados e reflexivos” (BRASIL, 2018, p. 18).

De acordo com a BNCC, os alunos devem fazerem tarefas que exijam diferentes processos cognitivos na construção dos pensamentos probabilístico, combinatório, algébrico, geométrico, proporcional, computacional e outros. Assim, ao

final da Educação Básica, estes deverão ser capazes de fazer indução por meio de investigação e experimentação com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais (BRASIL, 2018, p.532). Esse ponto está relacionado com a competência 5, específica para o ensino da Matemática e suas tecnologias no Ensino Médio, quem tem por objetivo que os estudantes desenvolvam habilidades específicas de

Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (BRASIL, 2018, p. 523).

De acordo com Furtado (2019), a maioria das atividades humanas sofrem influência dos conteúdos abordados nas áreas de Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade, sendo indispensável o estudo desses conteúdos, nos diferentes níveis de ensino. Nos dias atuais, principalmente agora nesse contexto pandêmico, surge a necessidade de informar a população, mas para isso é necessário que esta tenham aptidão de avaliar e interpretar essas informações.

Na problemática do ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, foram considerados, neste estudo, os documentos e autores relacionados a questão norteadora. Considerando-se a BNCC sobre o ensino da Matemática e qual caminho o professor deve seguir para introduzir e desenvolver as competências e habilidades, tanto dos anos Iniciais do Ensino Fundamental até os anos finais do Ensino Médio, a resolução de problemas tem que considerar problemas onde as tarefas não estejam explícitas (BRASIL, 2018).

Dessa maneira, uma questão/tarefa/atividade será um problema se o aluno não conhecer os meios necessários à sua resolução, mas deseja resolvê-la e para isso necessitará mobilizar seus conhecimentos e habilidades com o intuito de identificar conceitos e criar um processo de resolução.

Durante a resolução de um problema, a utilização adequada de um *software* permite uma melhor compreensão do problema, com um rápido *feedback*, os alunos fazem experimentações, testam seus resultados, comparam com outro estudante, se inter-relacionado em cada caso e conjecturando o conhecimento continuamente. Nesse ambiente exploratório, os alunos devem ser incentivados a manipular os

dados do problema no ambiente possibilitado pelo software para examinar os possíveis resultados (COSCARELLI, 2006).

Um fato que foi notado nos estudos sobre o ensino de Combinatória e Probabilidade é que as orientações e planejamentos são feitos, mas não chegam aos alunos. Ou melhor, temos muitos estudos e documentos idealizados e delineados para que esses conteúdos sejam desenvolvidos em sala de aula. Contudo, por fatores diversos, isso não acontecer.

2.5 O CONSTRUTIVISMO E O DESENVOLVIMENTO DE PENSAMENTOS NA BNCC

O momento atual exige que coloquemos como meta da educação o preparo do aluno no desenvolvimento de suas competências e habilidades. Seja no ambiente de ensino-aprendizagem presencial ou remoto, o conhecimento resulta da construção, experimentação e da visibilidade para a *visualização*. Segundo Becker (2012), o construtivismo significa que nada, a rigor, está pronto ou acabado, e de que o conhecimento não é dado em nenhum momento como algo terminado mas algo em constante processo de construção. Assim, o construtivismo é uma teoria psicológica que busca explicar como se modificam as estratégias de conhecimento do indivíduo no decorrer de sua vida.

Nota-se uma insatisfação com o sistema educacional, principalmente, pelo ato da transmissão de conteúdo. A BNCC traz o construtivismo, ou seja, a ação do aluno ou a ação do aluno-professor como estratégia de ensino. O que o professor domina como matemático e docente de uma disciplina pode ser um mistério para seus alunos. Desse modo, ocorre a necessidade de sempre refletir sobre as práticas docentes, posicionando-se o aluno diante da aprendizagem de um conhecimento.

Dentro desta perspectiva, a BNCC traz cinco competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio (BRASIL, 2018). A última das competências já apresentamos na seção anterior, contudo, acreditamos ser necessário apresentar as quatro outras competências:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral.

2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. (BRASIL, 2018, p. 523).

Nesse direcionamento, todas as cinco competências levam ao letramento matemático. Por meio da utilização de modelos matemáticos, o professor deve desenvolver atividades que envolva o cotidiano do aluno entrelinhando-se com as competências, fazendo com que o conhecimento matemático seja compreendido e articulado com as vivências na sociedade contemporânea.

Borba Souza & Carvalho (2018) salientam que a ação do construtivismo provoca a autonomia do aluno, contribuindo para a construção de uma educação emancipatória. Nesse cenário, a educação é transformadora e faz com que os estudantes sejam investigadores, cidadãos críticos reflexivos do seu papel na sociedade.

Considerando isso, Vaz & Jesus (2014, p. 5) assinalam que no processo de investigação existem duas vertentes que são propostas: tarefa e atividade. Tarefa é a proposta de trabalho feita pelo professor e a atividade é o envolvimento dos alunos para realizarem a tarefa proposta.

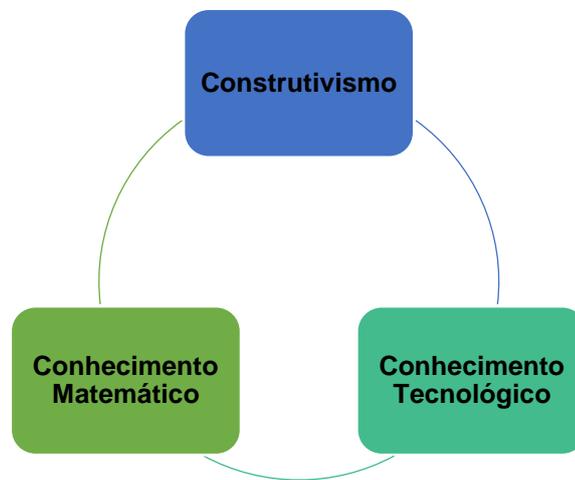
A BNCC aponta que as tarefas conseguem desenvolver diferentes processos cognitivos. Nesse processo, o professor deve considerar os problemas nos quais as tarefas não estão explícitas para que os estudantes se envolvam e mobilizem seus conhecimentos e habilidades, tendo como finalidade a identificação dos conceitos envolvidos na tarefa e a engrenagem de criação para uma resolução da tarefa.

Dentro dos processos cognitivos, Bortolossi (2020) relata que o pensamento espacial junto com o movimento faz com que partes do cérebro reajam especificamente a estímulos relacionados com movimento, ou seja, ao utilizar o *software* GeoGebra para a resolução de uma tarefa envolvendo esse tipo de

pensamento com o movimento, estimulamos essa parte do cérebro. Correspondente a este fato, o autor ainda fala que mesmo em fotos estáticas de objetos em movimento – exemplifica isso como o exemplo de um jogador de basquete arremessando uma bola - são ativadas essas regiões do cérebro, enquanto fotos de poses paradas não estimulam essa região (BORTOLOSSI, 2020, p. 105).

Neste contexto, o GeoGebra configura-se como uma ferramenta em potencial para no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade envolvendo os conhecimentos matemáticos e tecnológicos junto com o construtivismo (Figura 2).

Figura 2 – Integração entre três pontas de conhecimento.



Fonte: Própria.

Nessa integração entre as três pontas de conhecimento, Vaz & Jesus (2014) enfatizam que é necessário fazer-se a integração desses três elementos para que as propostas de ensino-aprendizagem funcionem. Assim, em sequência, abordamos os processos metodológicos e a construção da sequência didática, que objetiva essa integração de conhecimentos.

3 OBJETIVO

3.1 OBJETIVO GERAL:

Elaborar uma sequência didática, na qual são abordadas atividades com os conceitos matemáticos de Análise Combinatória e Probabilidade no GeoGebra.

3.2 OBJETIVO ESPECIFICO:

- Interpretar os dados qualitativos e quantitativos das atividades relacionando-se com as competências e habilidades estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular – BNCC;
- Compartilhar com os professores de matemática a possibilidade da utilização da abordagem envolvendo o *software* e a partir da modelização de uma situação.

4 METODOLOGIA

“Ao se caminhar para um objetivo, ..., as menores coisas se tornam fundamentais.” Almyr Klink Cem dias entre o céu e o mar

Esse trabalho tem caráter qualitativo-quantitativo, sendo uma pesquisa mista e de processo transformador sequencial com uma perspectiva teórica explícita, na qual a intenção foi fornecer informações sobre o problema de pesquisa buscando a compreensão e explicação que ajude no desenvolvimento de uma situação modelizada em uma sequência didática.

De acordo com Flick (2008), a pesquisa qualitativa não se baseia em um conceito teórico e metodológico unificado, desse modo, usando-se esse caráter qualitativo para compreender a problemática e investigar como os professores podem utilizar os recursos digitais (*software*) para o ensino e aprendizagem de matemática em alunos do Ensino Médio.

Prontamente, a pesquisa quantitativa, conforme Creswell (2010), enxerga a teoria como uma previsão ou uma explicação científica, em que um conjunto de teorias se interrelacionam. Essas teorias são encontradas na literatura e sua inclusão é uma extensão lógica ou parte da literatura do estudo em construção, tendo a discussão da questão de pesquisa como um momento isolado dos outros componentes do processo da pesquisa. Na carência de um estudo sobre os recursos digitais para o ensino e aprendizagem de matemática em alunos do Ensino Médio, no contexto pandêmico, as tecnologias digitais na Educação Matemática e o *software* GeoGebra apresentam um caminho de possibilidades para a ação do professor.

O estudo de campo também leva em consideração o contexto em que se situa a questão de interesse da pesquisa. Assim, o contexto pandêmico da COVID-19 foi o ponto inicial que despertou o interesse desta pesquisa. Nessa realidade, são vistas diferentes perspectivas, em que vários elementos são fornecidos aos leitores para que estes possam chegar às suas próprias conclusões e decisões,

concordando ou discordando das conclusões do próprio investigador (LUDKE, 2018).

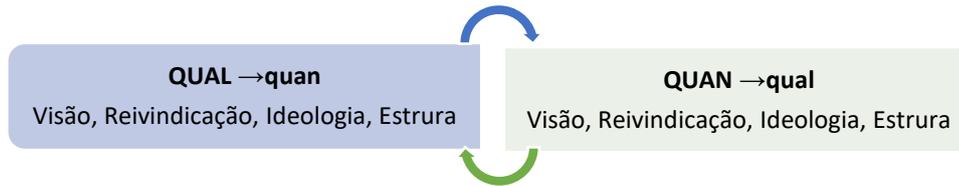
Este trabalho tem a perspectiva da literatura e da interpretação das atividades desenvolvidas na sequência didática, seguindo a estratégia transformadora sequencial de Creswell (2010). Essa sequência consiste inicialmente na fase de análise de dados qualitativos, seguida por uma fase de análise de dados quantitativos.

Sendo assim, a primeira fase consistiu-se com a fundamentação teórica desenvolvida nas seções anteriores. Já a segunda fase consiste na análise quantitativa das atividades abordadas na sequência didática que serão discutidas no capítulo de análise e discussões que decorrem da sequência didática com o *software* GeoGebra e com as competências e habilidades com a BNCC.

O propósito dessa estratégia transformadora sequencial é usar os resultados qualitativos para subsidiar na explicação e interpretação de resultados de um estudo inicialmente quantitativo. Ao utilizarmos a estratégia transformadora sequencial, são empregados métodos de pesquisa – qualitativos ou quantitativos, com maior ou menor grau de utilização - que melhor atendem à perspectiva teórica do pesquisador. Essa estratégia faz parte da teoria em métodos mistos, que pode incluir teorias dedutivamente, em verificações de teoria, ou indutivamente, como uma teoria emergente ou padrão. No nosso caso, as Tecnologias Digitais no ensino de Matemática é a teoria emergente nos campos de estudos da Educação Matemática. O uso do *software* é a teoria em verificação.

Dessa maneira, Creswell (2010) expressa que ao ser usados os dois métodos, o pesquisador transformador sequencial “pode conseguir dar voz a diversas perspectivas, ou para melhor defender os participantes, ou para entender melhor um fenômeno ou processo que está mudando como resultado de estar sendo estudado” (p. 219). Referindo-se a esse fato, o autor apresenta um modelo gráfico da estratégia transformadora sequencial (Figura 3).

Figura 3 – Modelo do projeto transformador sequencial.



Fonte: Creswell (2010), com adaptação.

Nessa perspectiva, explora-se um problema. A estratégia transformadora sequencial possui a visão teórica que faz reivindicações dentro dessa perspectiva para o desenvolvimento da ideologia e estrutura. Assim, nessa estratégia de pesquisa, pode-se dar prioridade à fase quantitativa (QUAL) ou qualitativa (QUAN).

Nesse tipo de projeto, pode-se dar preferência a uma fase ou a outra, ou, até mesmo, as duas fases, se ocorrer a necessidade. O nosso método consistiu em suposições pragmáticas do conhecimento com medidas fechadas para a investigação e observações abertas para a problemática.

Nessa proposta, descreveremos brevemente os procedimentos básicos que o investigador vai usar para a implementação da estratégia, tendo também a descrição do cenário de pesquisa, mais a construção, desenvolvimento e apresentação dos problemas usados na sequência didática

4.1 CARACTERIZAÇÃO DO PROCEDIMENTO DE PESQUISA.

A questão norteadora de pesquisa engloba tanto a necessidade de explorar como de explicar. Ao longo do processo de pesquisa, são utilizadas, pelo pesquisador, questões de métodos mistos que definem o problema e examina a literatura coletando e analisando os dados quantitativos e qualitativos em um único estudo. A finalidade é expandir o entendimento da possibilidade de ensinar Análise Combinatória e Probabilidade no GeoGebra, para professores que estão atuando nas modalidades de ensino remoto ou híbrido.

Esse tipo de procedimento de pesquisa vem aumentando significativamente nos últimos anos. Ele consiste em um estudo nas ciências sociais e humanas, o qual tem interesse de convergir ou triangular diferentes fontes de dados quantitativos e qualitativos (CRESWELL, 2010, p.212 - 213).

Em suma, a estrutura de estudos transformador sequencial implica na apresentação da questão norteadora no começo do estudo e seguida pela coleta e

análise dos dados cotados. Dessa maneira, identificamos o projeto de pesquisa, selecionamos fontes de dados e coletamos simultaneamente os dados quantitativos e qualitativos, tendo como prioridade o uso de dados qualitativos para a análise.

4.2 DISCRICÃO É CARACTERIZAÇÃO DO CENÁRIO DE PESQUISA.

O cenário inicial da sequência didática foi a modelização de uma situação, ou seja, usamos a modelagem matemática no contexto da sequência para sua elaboração. Portanto, correlacionando-se com a modelização, o estudo teve dois objetivos.

O primeiro foi construir a sequência para auxiliar a atividades dos professores de matemática no ensino remoto, que se relaciona com a problemática de pesquisa e com os objetivos geral e específico. A problemática consistia na pergunta de como os professores podem utilizar os recursos digitais (*software*) para o ensino e aprendizagem de matemática em alunos do Ensino Médio. Já o objetivo geral, para a pesquisa, foi a elaboração de uma sequência didática, em que foi abordado a construção e a resolução de três problemas com os conceitos matemáticos de Análise Combinatória e Probabilidade usando o GeoGebra.

O segundo objetivo do estudo foi desenvolver uma atividade que se desenvolvem os conceitos de Análise Combinatória e Probabilidade dentro de um contexto idealizado. Assim, esse segundo objetivo se relaciona com o objetivo específico deste estudo, sendo que este consistiu no interpretar dos dados qualitativos e quantitativos das atividades relacionando-se com as competências e habilidades estabelecidas na Base Nacional Comum Curricular que será desenvolvido na seção análise e discursões sobre a relação da sequência didática com as competências e as habilidades da BNCC.

Diante disso, formulamos um problema matemático, ou seja, um modelo matemático para desenvolver os conceitos de Combinatória e Probabilidade, em que a resolução do problema possa ser encontrada/construída por meio do *software* GeoGebra; uma vez que a dinâmica do *software* permite a pesquisa-ação, na qual o professor tem o papel de interferir no processo de resolução da atividade/tarefa, para que o aluno possa desenvolver seus conhecimentos matemáticos e tecnológicos no GeoGebra.

4.3 CONSTRUÇÃO DAS ATIVIDADES ELABORADA NO GEOGEBRA

Nesta seção, apresentaremos a atividade elaboradas para a sequência didática. A atividade consiste na resolução de três problemas envolvendo um parque de uma cidade. Então, abordamos os enunciados dos problemas, a construção da resolução dos problemas no *software* GeoGebra com algumas orientações e sugestões para aplicação em sala de aula.

A partir das ideias iniciais apresentadas por Furtado (2019), em sua dissertação de mestrado, fizemos a adaptação para os problemas envolvendo Análise Combinatória e Probabilidade com auxílio do *software* GeoGebra na construção desta atividade. Assim, iniciamos com o problema 1:

Problema 1: Um parque de uma cidade será formado por 12 blocos, sendo disposto pelas disposições diferentes dos divisores de 12 (1,2,3,4,6,12). Qual seria essa disposição dos blocos no parque?

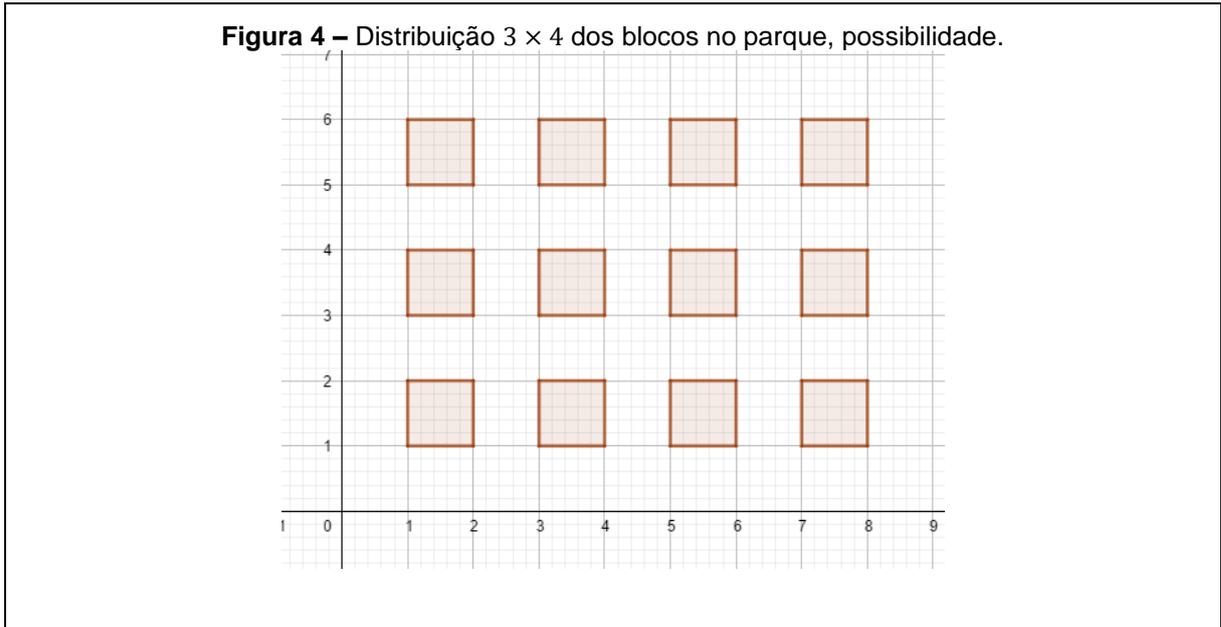
Nesse problema, começamos com um problema matemático de contagem a partir dos divisores do número 12. Nessa resolução, o aluno mobiliza conhecimentos básicos, como o Máximo Divisor Comum - M.D.C., para desenvolver o *Princípio da Multiplicação*.

Ao não disponibilizar uma figura fototípica do parque, buscamos manipular as habilidades e competências cognitivas dos estudantes, objetivando a elaboração de uma construção que possibilite aos estudantes uma visualização do acontecimento, ou melhor, possibilitar o desenvolvimento do pensamento geométrico e pensamento computacional.

Com o uso do *software* GeoGebra, o aluno pode explorar essa disposição dos blocos, a partir da perspectiva dinâmica que o programa oferece. Para tal, o aluno tem a liberdade de escolher a melhor disposição dos blocos, podendo ser distribuídos da seguinte maneira: 1×12 , 2×6 , 3×4 . Em seguida, apresentamos uma solução, desejada a de 3×4 , que os alunos podem conjecturar (Quadro 1).

Quadro 1 – Solução do Problema 1 no GeoGebra, Princípio da Multiplicação

Instrução: Abra o GeoGebra clique na ferramenta *Polígono Rígido*, construa um polígono de quatro lados. Utilize os comandos *Ctrl+C* e *Ctrl+V* para ter os 12 blocos. Use a ferramenta “*Mover*” e distribua os blocos pelo plano cartesiano para encontra a solução.



Fonte: Própria, construção no GeoGebra.

Nessa proposta de atividade e de resolução, definimos a medida do quadrilátero com uma unidade (1u), ou seja, como a situação é uma modelização de um contexto sem nenhum dado relacionando com a medida dos blocos, pressupomos que a medida do lado do quadrilátero seja de um metro. Logo, sua área seria de um metro quadrado.

Nessa tarefa matemática, faz-se necessário ter conhecimento das propriedades, axiomas e definições da geometria. Além de evidenciar o Princípio Multiplicativo, o professor pode também desenvolver esses conhecimentos conjuntamente. Desse modo, um conhecimento é construído sobre o outro conhecimento.

Problema 2: Nesse parque, um jovem sai do ponto R até o ponto S seguindo sempre da esquerda (E) para a direita (D) e de baixo (B) para cima (C) pelo caminho mais curto, a fim de encontrar-se com sua namorada. Diante disso, quantos caminhos diferentes ele poderá seguir?

Nesse segundo Problema, relacionado à movimentação do personagem, temos a localização de pontos no plano cartesiano a fim de auxiliar a compreensão do caso. O conceito de permutação é aplicado para calcular o número de possibilidades de locomoção do indivíduo nesse parque. Deste modo, o conhecimento mobilizado pelos estudantes envolve o pensamento combinatório, na

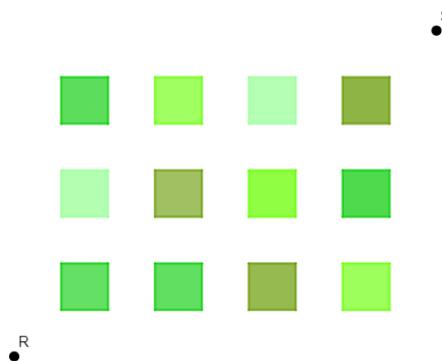
escolha do caminho que o jovem deve seguir para encontrar a sua namorada, junto com os pensamentos geométricos e computacionais.

Nota-se, como consequência da resolução do Problema 1, que o caminho realiza uma sequência com elementos repetidos: CCCDDDD (C – cima e D – direita). Logo, o conceito de *permutação* com elementos repetidos pode, e deve ser utilizado pelo professor para desenvolver esse conhecimento sem o uso da fórmula direta. A partir dessa situação modelizada, o conceito de Análise Combinatória é desenvolvido na resolução do problema. Em seguida, apresenta-se a solução no GeoGebra, na qual os alunos podem conjecturar, experimentar, testar caminhos (hipóteses) na caracterização do pensar matematicamente (Quadro 2).

Quadro 2 – Solução do Problema 2 no GeoGebra, Permutação com Elementos Repetidos.

Instrução: Utilizaremos a mesma construção do problema 1 como passo inicial desta solução. Contudo, ocultaremos os eixos ordenados e a malha quadriculada, para isso, basta clicar com o botão direito do mouse sobre o eixo ou na malha, de forma a desmarcar as opções *eixo* e *malha* (Figura 5. a).

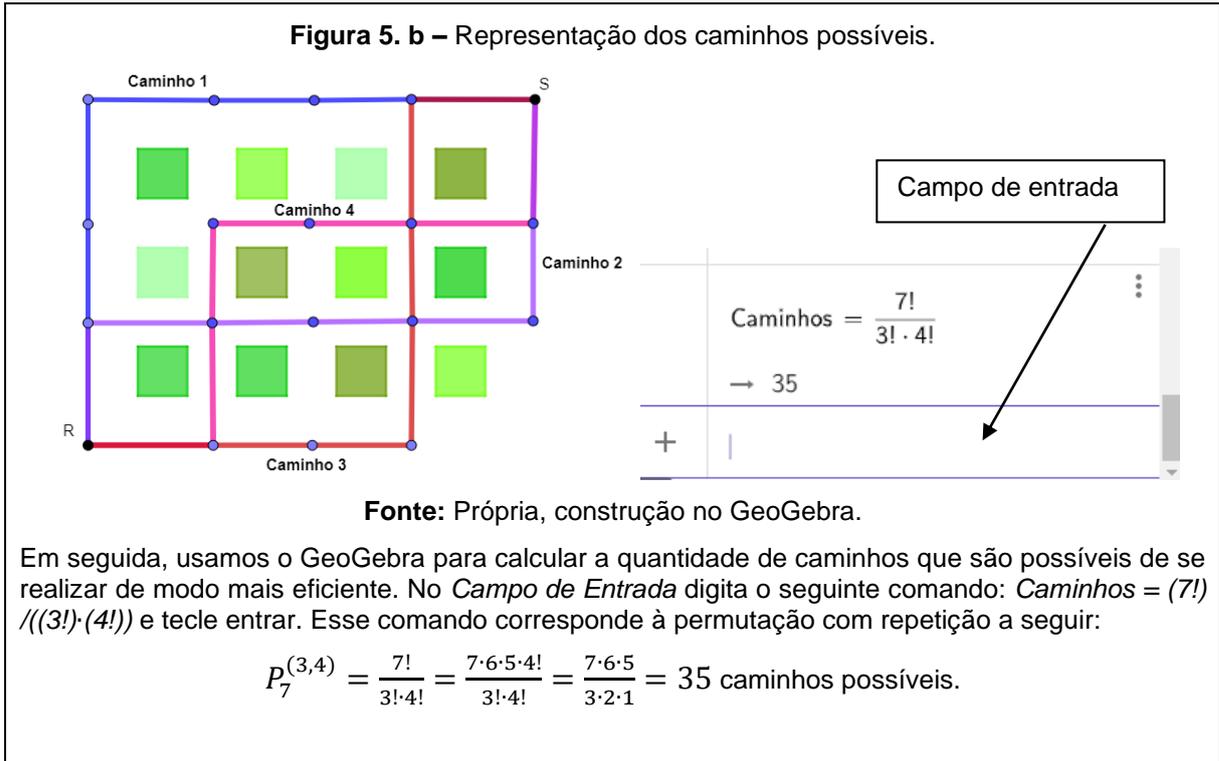
Figura 5. a – Representação dos pontos e parque.



Fonte: Própria, construção no GeoGebra.

Na terceira ferramenta da barra de ferramentas, procurar pela ferramenta *Linha Poligonal* para criar uma. Baseado nos movimentos possíveis enunciados na tarefa, clica no *ponto* (0,0), que representa o *ponto R*, simbolizando o ponto de partida do jovem, e em todos os que se seguem, até chegar no *ponto S*, que simboliza o ponto de chegada, por fim, volte a clicar no ponto (0,0). Repita o processo anterior, mais vezes, para criar outra *Linha Poligonal* seguindo por outros caminhos.

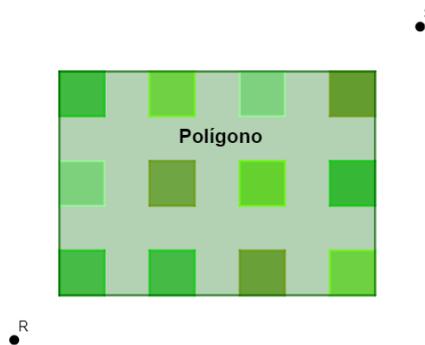
Na *Folha Algébrica*, ocultar os rótulos das linhas poligonais, bem como os objetos desnecessários à situação. Ainda na *Folha Algébrica*, selecionar as linhas poligonais (uma de cada vez) e altere a cor e a espessura de ambas. (Figura 5. b)



Ao considerar as duas direções de locomoção do rapaz (da esquerda para a direita, de baixo para cima), é possível determinar diversos caminhos que ele pode seguir, e, após isso, determinar-se o número total de caminhos possíveis de duas maneiras. Na primeira, a contagem dos trinta e cinco caminhos pode ser realizada uma a uma pelos alunos. Na segunda, a partir da generalização do problema mais simples, por exemplo, um problema com em que a permutação com elementos repetidos seja de $P_4^{(2,2)}$ (lê-se: quatro elementos tomados dois a dois), o professor pode apresentar a fórmula para os alunos. Assim, na primeira possibilidade ou na segunda, colocamos os alunos para investigar, levando a ação do construtivismo das habilidades e competências do saber.

Problema 3: Seja dada a área do parque de base x e altura y e também uma circunferência com centro K e raio $0,25$ m, que representa arbustos com diâmetro de $0,50$ m. Caso o ponto K seja escolhido aleatoriamente na área do parque, qual é a probabilidade desse círculo tocar ou conter um dos 4 vértices do polígono (que representa os limites de distribuição dos blocos) na figura 6?

Figura 6 – Representação do parque pelo polígono.



Fonte: Própria, construção no GeoGebra.

Neste Problema 3, a tarefa proposta contempla os conteúdos de Probabilidade Geométrica e Combinatória. Nos estudos sobre Probabilidade no Ensino Médio, as técnicas de contagem da Análise Combinatória são manuseadas em problemas em que ocorrem fenômenos discretos em espaço amostrais. O conceito de Probabilidade Geométrica consiste na seguinte propriedade: se existe uma região X (área favorável) do plano contida em uma região Y (área possível), e se for escolhido ao acaso um ponto nessa área possível (Y), então, a probabilidade de que esse ponto pertença a X é representada pela seguinte fórmula (CAETANO E PATERLINI, 2010):

$$P(A) = \frac{\text{Área favorável}}{\text{Área possível}}$$

Nesse contexto, temos que o ponto K será escolhido aleatoriamente, o que envolve um espaço amostral. Com isso, utiliza-se o *software* para auxiliar o processo de compreensão do caso e desenvolver o pensamento probabilístico. Nessa tarefa, o objetivo é calcular a probabilidade solicitada no enunciado. Para isso, apresentamos no Quadro 3 o processo de investigação que o professor pode realizar junto com os estudantes mais a resolução do problema no GeoGebra.

Quadro 3 – Solução do Problema 3 no GeoGebra.

Instruções: Um ponto de partida para essa tarefa é explorar os conceitos básicos de geometria plana (Polígonos e vértices). O professor pode iniciar por discutir a respeito desse tema enquanto ilustra cada figura no GeoGebra.

Manipulando com a mesma construção dos problemas anteriores, cria-se, na representação do parque, um polígono que engloba todos os blocos. Para isso é usado a ferramenta *Polígono*. Com a ferramenta *Circunferência (Centro e Raio)* cria um círculo de ponto K e raio 0,25 m. Na *Folha Algébrica*, editar os objetos como desejar: muda as cores, esconde os rótulos. Feito isso, clicar na ferramenta *Mover* e selecionar o círculo; Movimentando-o para mostrar que existem muitas posições diferentes que satisfazem a condição (Figuras 7).

Figura 7.a - Satisfaz a condição.

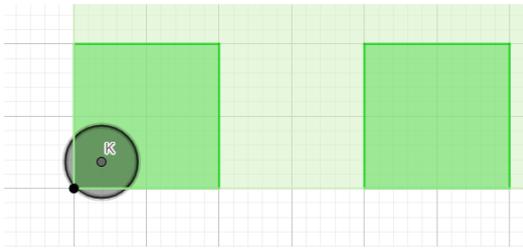


Figura 7.b – Não satisfaz a condição.

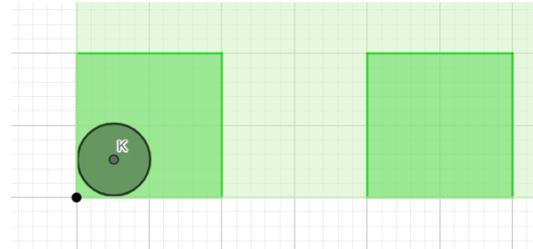
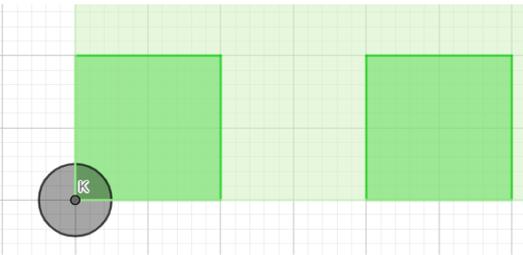


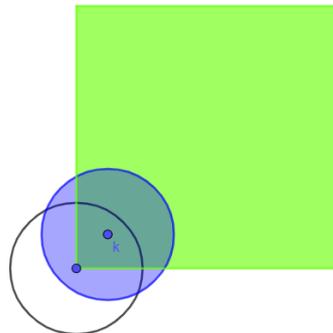
Figura 7.c - Satisfaz a condição.



Fonte: Própria, construção no GeoGebra.

Para verificar qual a área do polígono onde o *ponto K* deve ser posicionado a fim de satisfazer as condições dadas, posiciona-se o círculo de modo que o *Ponto K* fique sobre um dos vértices. Cria-se outro círculo com os mesmos dados propostos. Com o botão direito do mouse seleciona as *propriedades do objeto*, editar-se a cor desse novo círculo para destaca-lo do primeiro. Com a ferramenta *Mover*, clica sobre esse novo círculo e movimenta-o para conferir qual a região em que o ponto ainda permanece dentro do quadrilátero e, ao mesmo tempo, toca (ou contém) o vértice (Figura 8).

Figura 8 – Ponto K dentro de região favorável à condição do enunciado.



Fonte: Própria, construção no GeoGebra.

Com a ferramenta *Interseção de Dois objetos*, determinar os pontos de interseção entre o quadrilátero e todos os círculos e, em seguida, esconder os rótulos. Determinar os ângulos correspondentes a cada um dos vértices da figura, por meio da ferramenta *Ângulo*. No Campo de Entrada, digitar: $S = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Ainda no Campo de Entrada, digitar $Soma = \alpha + \beta + \gamma + \delta = A$.

Assim, os estudantes podem conferir que a soma das áreas das zonas favoráveis para o *ponto K* é igual a $\frac{\alpha r^2}{2} + \frac{\beta r^2}{2} + \frac{\gamma r^2}{2} + \frac{\delta r^2}{2} = \frac{\pi r^2}{2}$, que também corresponde à metade da área do

círculo. Assim, pode-se calcular a probabilidade usando a expressão: $P(A) = \frac{\pi r^2}{b \cdot h}$

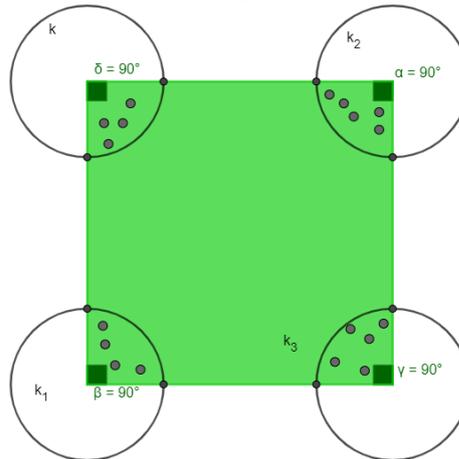
Ou seja, a região favorável corresponde a um quarto da área do círculo ($1/4$) e a região possível corresponde à área do quadrilátero. Considerando a medida do bloco como um por um, a áreas

possíveis correspondem a área de um quadrilátero. Sendo assim, usando a ferramenta *Inserir Texto* para apresentar o cálculo da probabilidade, desenvolvido com auxílio de calculadora ou respondido manualmente:

$$Probabilidade = \frac{\pi \frac{(0,25)^2}{2}}{1 \cdot 1} = \frac{\pi \cdot 0,0625}{2} = \frac{0,19634 \dots}{2} = 0,09817 \dots$$

Por fim, usar a ferramenta *Novo Ponto* para ilustrar vários pontos dentro da área condicionada pela tarefa. A figura 9 mostra o resultado da construção.

Figura 9 – Probabilidade e demonstração de pontos nas zonas favoráveis.



Fonte: Própria, construção no GeoGebra.

Desse modo, a probabilidade do arbusto, que é o nosso círculo com raio 0,25m, tocar ou conter um dos 4 vértices do polígono é de 0,09817. Nessa atividade, o professor pode explorar diversos conceitos de geometria com os estudantes, enquanto buscam solucionar o cálculo da probabilidade pedida para a resolução do problema proposto. Com o dinamismo do *software*, o aluno pode conferir as diversas posições do *ponto K* dentro do quadrilátero que condizem à condição do círculo tocar ou conter um dos três vértices desse polígono, segundo o enunciado do problema.

Para verificar quais são as zonas que representam a "zona favorável" e a "zona possível" nas quais o ponto pode ser escolhido de maneira aleatória, os estudantes visualizam a movimentação do ponto no plano, contribuindo no desenvolvimento do pensamento espacial e geométrico.

Considerando os problemas apresentados, as atividades visam auxiliar os professores no ensino dos conteúdos abordados para a resolução dos problemas. Desse modo, as atividades têm como objetivo facilitar o trabalho dos professores de matemática e apresentar uma nova proposta de ensino significativo dos respectivos

conteúdos. Além disso, elas possibilitam a ação dos estudantes na construção e desenvolvimento matemático, dentro de um contexto dinâmico.

Nesse processo, apresentamos a metodologia do estudo de métodos mistos, o cenário de nossa pesquisa e a construção das atividades elaborada no GeoGebra para a sequência didática, juntamente com a resolução dos três problemas propostos.

Assim, acreditamos que os professores atuantes nas modalidades de ensino remoto ou híbrido possam recorrer a essa proposta de atividade que possibilita o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade no *software* GeoGebra. Em seguida, apresenta-se as discussões e análises obtidas a partir do uso do *software* e as variáveis que são interrelacionadas com a teoria.

4.4 RELAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM AS COMPETÊNCIAS E HABILIDADES DA BNCC

“ – *Por que nenhum de vocês está aqui?*

– *Guardas são inúteis em uma biblioteca.*

Ora, como ele estava errado! Bibliotecas estavam cheias de ideias. Talvez as mais perigosas e poderosas armas” Sarah J. Maas, Trono de Vidro

Na primeira parte deste estudo, construímos o entendimento sobre o professor de matemática e as Tecnologias Digitais para a Educação Matemática, como também a problemática do ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, tendo ainda o *software* GeoGebra como ferramenta para o desenvolvimento de diferentes tipos de pensamentos, assim como o entendimento da ação do construtivismo em conjunto com as habilidade e competências da BNCC.

Nesta seção, é tratado o processo de instrumentalização para o desenvolvimento das análises e discursos que serão apresentadas nesta segunda parte do trabalho. Neste estudo, procurou-se que os conhecimentos matemáticos e tecnológicos, junto com o construtivismo, oportunizassem o desenvolvimento do pensar matematicamente, no qual, contribuir-se para que os professores utilizem os recursos digitais (*software*) no ensino e aprendizagem de matemática de alunos do Ensino Médio.

Conforme Kilpatrick (1996), as pesquisas em Educação Matemática nos fazem *parar e pensar*. O momento de fechamentos de escolas, devido à pandemia do coronavírus, foi o momento em que todos os professores pararam de atuar presencialmente nas escolas. Em meio a uma crise sem precedentes, de proporção global, educadores e famílias inteiras tiveram que lidar com a imprevisibilidade, sem fim eminente, reaprender a ensinar de novas maneiras.

Com isso, as pesquisas que estão surgindo na pandemia, em Educação Matemática, buscam equipar os professores com “ferramentas” para pensar sobre o trabalho e prática docente do professor de matemática. Este estudo “fornece conceitos e técnicas, não receitas” (KILPATRICK, 1996, p104). Ou seja, o pensar nas pesquisas em Educação Matemática, a construção de conceitos é uma

sequência de ações pedagógicas. Entretanto, não significa que é rígida ou inflexiva, mas que é uma possibilidade e caminho para a prática docente.

Diante dessa perspectiva, investigamos as literaturas e pensamos na construção de uma sequência didática que procurou dialogar com as competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio, propostas na BNCC. Assim, utilizando uma estratégia nos problemas propostos, os alunos terão que interpretar uma situação em contexto cotidiano, articular os conhecimentos matemáticos à ação de investigação para os conceitos e procedimentos matemáticos. Nesse direcionamento, ocorre a interpretação dos problemas, em cada tarefa proposta, na qual são empregados e construídos modelos matemáticos a fim de resolver problemas em diferentes contextos, analisando os resultados e as soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. Dessa maneira, o aluno constrói, compreende e utiliza diferentes registros de representação matemáticos. Com isso, existe o favorecimento da construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

As experimentações com as tecnologias digitais, para os alunos realizarem as tarefas de investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, tornam-se fundamentais. O ambiente exploratório, por sua vez, enfatiza processos muito mais do que produtos.

Os problemas aqui propostos, articulam-se com as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio em consonância com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 523). Considerando-se o Problema 1, o qual engloba as competências específicas um, dois e três, são proporcionadas o desenvolvimento das seguintes habilidades:

(EM13MAT203) Planejar e executar ações envolvendo a criação e a utilização de aplicativos, jogos (digitais ou não), planilhas para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros compostos, dentre outros, para aplicar conceitos matemáticos e tomar decisões.

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, incluindo ou não tecnologias digitais.

(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo diferentes tipos de agrupamento de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas como o diagrama de árvore (BRASIL, 2018, p. 526 e p. 528-529).

No Problema 1, o aluno tem que fazer uma tomada de decisões: como é que se pode distribuir aos blocos do parque? Nesse contexto, temos o planejamento e a execução de uma ação construtivista, pois a utilização de aplicativos, como o GeoGebra, faz com que os alunos apliquem conceitos matemáticos para a tomada de decisões relacionadas a distribuição dos blocos no parque.

Desse modo, o problema apresentado, a partir do contexto, usa métodos aritméticos, algébricos, combinatórios e geométricos para ser resolvido. A proposta de tarefa feita na sequência didática consiste em uma tarefa não explícita. Assim, o objetivo pretendido pelo professor é que os alunos se envolvam, conjecturando, para realizarem a tarefa proposta. Por conseguinte, esse objetivo se encaminha para o que Vaz & Jesus (2014, p. 5) assinalam sobre o processo de investigação e a distinção entre tarefa e atividade, uma vez que a tarefa é proposta pelo professor e a atividade é realizada pelo aluno.

Como o objetivo geral deste estudo foi elaborar uma sequência didática na qual são abordadas atividades com os conceitos matemáticos de Análise Combinatória e Probabilidade no GeoGebra, o Problema 1 teve os conhecimentos de combinatória levantados a partir do Princípio Multiplicativo. Este, por sua vez, corresponde a decisão da tomada de elementos, em que, se uma decisão D_1 pode ser tomada de x maneiras, e, se, uma vez tomada a decisão D_1 , a decisão D_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões D_1 e D_2 é o produto de x com y , ou xy (MORGADO, CARVALHO, CARVALHO & FERNANDEZ, 2016, p. 16).

Assim, a distribuição dos blocos pode ocorrer entre a decisão D_1 e D_2 . Na solução proposta, feita no GeoGebra, a decisão D_1 foi o número três, porém poderia ter sido quatro, dois ou seis, ou ainda um e doze. Respectivamente, a decisão D_2 foi o número quatro, do mesmo modo esta decisão D_2 poderia ser três, seis ou dois, e, também, doze e um, o que nos leva ao posicionamento numérico e a manipulação com diferentes tipos de problemas.

Nesse contexto, priorizou-se mais os processos do que o produto. Desta forma, investigou-se os processos por trás dos problemas e suas soluções no GeoGebra. Com isso, acredita-se que, para o processo e produto, os alunos devem ser incentivados a alterar, explorar e manipular os parâmetros do ambiente para

examinar possíveis resultados. Partindo desse ideal, o Problema 2 explora as competências três, quatro e cinco da BNCC em que as habilidades consistem em:

(EM13MAT315) Reconhecer um problema algorítmico, enunciá-lo, procurar uma solução e expressá-la por meio de um algoritmo, com o respectivo fluxograma.

(EM13MAT406) Utilizar os conceitos básicos de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, de eventos equiprováveis ou não, e investigar as implicações no cálculo de probabilidades (BRASIL, 2018, p. 529, p. 531 e p. 533).

Na segunda situação, temos a resolução de um problema real ou que é possível de se acontecer no cotidiano do aluno. Assim, a contextualização do problema na sala de aula provoca as suas resoluções mais facilmente, visto que aguça a curiosidade, uma vez que a tarefa proposta pelo professor faz com que, na resolução da atividade, o aluno desenvolva diferentes processos cognitivos.

Modernizar a educação sempre significou colocá-la em um novo tipo de meio mais eficaz. O Problema 2 analisava a resolução em Análise Combinatória, manipulando a permutação com elementos repetidos. Entretanto, esse problema pode ser resolvido por meio do algoritmo e fluxograma. Mas para isso, temos, como professores, que conhecer o alunado e seus supostos conhecimentos prévios, para que tal solução possa ser desenvolvida por meio do respectivo fluxograma.

Além, disso o aluno, ao usar o GeoGebra, constrói, de forma exploratória, a linguagem de programação no *software* e o pensamento computacional, juntamente com diferentes processos cognitivos.

Qual seria o evento mais equiprovável? O rapaz chegar até sua namorada de forma rápida e precisa, pois já tem a noção do caminho que seguira entre os blocos do parque? Ou que este mova-se aleatoriamente, sem saber como chegara até ela? Respalda-se nas ideias de Bortolossi (2020), a tarefa e a atividade proposta no problema dois pode estimular parte do cérebro. A ideia do movimento/deslocamento do rapaz induz ao pensar geometricamente-espacial, que, segundo os estudos do autor, são ativados quando ocorre a ideia de movimento ao visualizar fotos/fatos estáticos.

Logo, sequencialmente, o Problema 3 recorre aos passos anteriores nas atividades e segue a mesma linha de pensamento, envolvendo as competências três

e cinco, junto com as habilidades da BNCC. Contudo, temos, neste problema ainda, a habilidade EM13MAT511, que se repete mais outras duas habilidades:

(EM13MAT311) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade de eventos aleatórios, identificando e descrevendo o espaço amostral e realizando contagem das possibilidades.

(EM13MAT312) Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. (BRASIL, 2018, p. 529).

Nesse direcionamento, o Problema 3 aborda uma maior complexidade, seja do aluno ou do professor. A aleatoriedade com a qual o aluno pode fazer a distribuição dos arbustos permite uma exploração de conteúdos da geometria e o levantamento de hipótese, tais como - e se o polígono não decorresse de um quadrado ou quadrilátero como seria essa distribuição em diferentes espaços geométricos? - questionamentos que não sabemos se ou acreditamos que talvez os alunos possam fazer ou não.

Entretanto, na resolução proposta, são desenvolvidos o cálculo da probabilidade a partir de um evento aleatório. Nessa resolução, o aluno, utilizando-se do GeoGebra, pode fazer diversos experimentos aleatórios sucessivamente, tendo a tecnologia como sua ferramenta e instrumento para averiguação dos dados fornecidos.

A contextualização dos problemas, para desenvolvimento dos conceitos de combinatória e probabilidade, potencializa o ensino. As informações são passadas nos problemas, mas não de forma explícita, uma vez que queremos que os alunos mobilizem seus conhecimentos e investiguem o que há por detrás de cada informação passada e o que pode ser usado na resolução do problema.

Nessa perspectiva, o professor tem o ofício de mediar os conhecimentos e viabilizar os caminhos para que os alunos construam seus conhecimentos. Desse modo, é necessário que se crie cultura tecnológica dentro do processo de aprendizado. De fato, ocorre essa necessidade onde é preciso que se criem mecanismos de aprimoramento na formação inicial de professores para o trabalhar com a tecnologia e com o ensino dos conteúdos de Probabilidade e Combinatória.

Diante dos resultados apresentados e dada a natureza desta pesquisa e sua questão norteadora, juntamente com o método misto, seguindo-se, simultaneamente, a coleta de dados quantitativos e qualitativos, temos a integração

dos dados coletados na estratégia transformadora sequencial. Assim, como é próprio desse método, temos uma visão e reivindicação do que envolve o problema de pesquisa e quais são as ideologias e estruturas processuais que estão por trás do ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos de Análise Combinatória e Probabilidade.

A partir da revisão da literatura, observa-se as dificuldades do ensino destes conteúdos na Educação Básica. Com isso, os resultados nos levaram as seguintes hipóteses sobre os professores, o sistema educacional e os alunos da Educação Básica: a) os professores são vítimas de um ciclo vicioso - não aprenderam análise combinatória e probabilidade, logo, não vão ensinar. b) estes possuem dificuldades de romper com os procedimentos tradicionais de aula expositiva. c) não tem informação quanto as demais alternativas de ensino – por limitações desconhecidas. d) possuem opiniões sobre os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade baseadas em frases que ouvem dizer sobre a aprendizagem e suas dificuldades de ensino. e) os professores, em muitos casos, seguem textos didáticos não adequados - não produzem suas próprias perguntas, limita-se a copiar as propostas nos livros didáticos. f) não possuem acesso a uma bibliografia adequada, o que ocasiona um maior apego ao livro didático, o único material que conhecem a abordar o assunto. g) sabem que mudanças na forma de ensino podem acarretar repressão por parte dos pais dos alunos. h) sentem falta do apoio de lideranças das autoridades no desenvolvimento de caminhos para o ensino de Análise Combinatória e Probabilidade no seu encorajamento para o desbravamento desses caminhos.

Na hipótese “f”, devemos considerar as limitações do professor, uma vez que muitos trabalham com jornadas duplas ou condições desfavoráveis e limitações de tempo para elaborar, pesquisar, estudar, construir e desenvolver atividades que envolvam os alunos. Além desses fatores, tem-se que cumprir com o ensino de um currículo que abrangem múltiplas competências, habilidades e conteúdo.

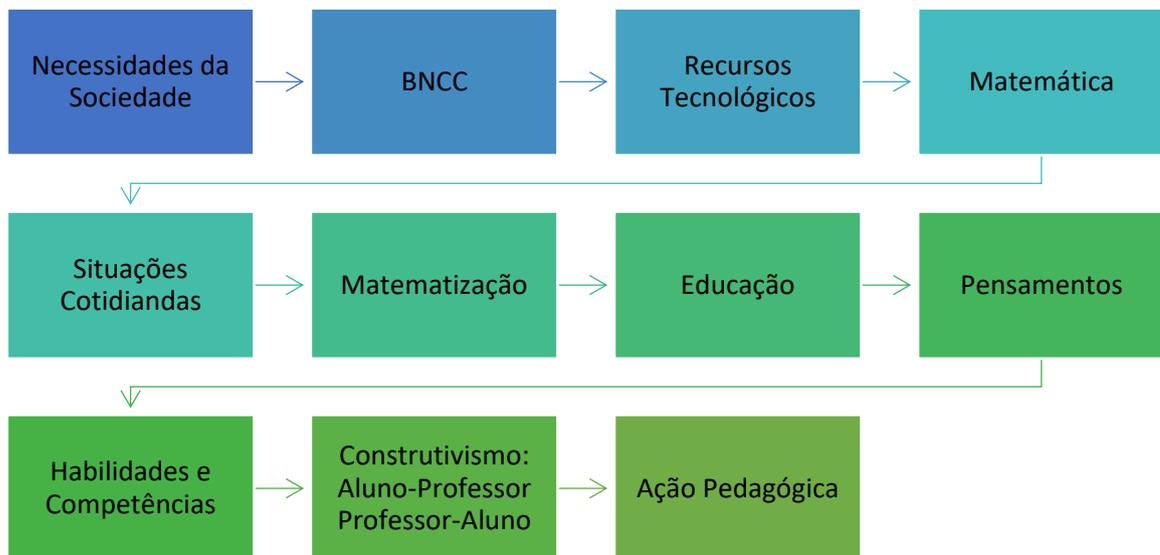
Há um consenso entre os pesquisadores de que a formação inicial dos professores de Matemática no Brasil é inadequada ou insuficiente. No entanto, é necessário avaliarmos toda a dimensão do país e suas diversas características. O ensino remoto fez exatamente isso, mostrou que a educação não é igualitária e de qualidade, sendo que o ambiente educacional pode se constituir em um espaço

físico e/ou virtual, gerando um impacto direto no rendimento acadêmico dos estudantes.

Nesse direcionamento, as atividades apresentadas fazem a união entre o construtivismo, o conhecimento matemático e o conhecimento tecnológico. Os dados abordados, se relacionando diretamente com a pirâmide da Educação Matemática, considerando a matematização do entorno dos estudantes, através de uma situação cotidiana, buscando o desenvolvimento da base em vez do topo da pirâmide.

Nesse sentido, de acordo com Alsina (2010), construímos atividades matemáticas ricas na exploração de competências e habilidades. Associando-se ao currículo e suas propostas construtivistas, trazemos as atividades com o propósito de superar as dificuldades que ocorrem no ensino de Análise Combinatória e Probabilidade. Nessa lógica, este estudo segue uma sequência que está sendo representada pelo fluxograma indicado na Figura 10. Desta maneira, diante da necessidade da sociedade e seu currículo, os recursos tecnológicos para o ensino se alinham na construção da ação pedagógica, que fica como proposta no trabalho.

Figura 10 – Fluxograma com princípios desenvolvidos.



Fonte: Construção do autor.

Desse modo, acreditamos que atingimos os objetivos e respondemos à questão norteadora da pesquisa, uma vez que contemplamos a resolução de uma

necessidade da sociedade fazendo uma ponte entre a realidade e as orientações educacionais estabelecidas em nosso país.

Nesse contexto, os recursos tecnológicos, como o *software* GeoGebra, mobilizam o ensino da matemática, mesmo nas situações do ensino remoto, híbrido e presencial. Contudo, desenvolvemos a solução no computador, entretanto, os passo a passos podem ser utilizados também no aplicativo disponibilizado para smartphone. Este foi o antigo inimigo dos professores que passou a ser peça fundamental no ensino remoto, para que este ocorra. Mesmo em sua forma mínima de ensino, o professor pode utilizar essas atividades para que os alunos aprendam “a fazer” e cogitem no “querer saber” da matemática que está implícita na situação.

Não podemos, entretanto, como professores, ignorar os fatos decorrentes da desigualdade social que faz com que muitos estudantes fiquem fora das salas de aulas e que, infelizmente, não recebem esse mínimo de ensino, o que vem a prejudicar o desenvolvimento desses alunos na construção e desenvolvimento dos diferentes tipos de pensamento matemático, das habilidades e competências.

A ação pedagógica, proposta através da sequência didática, busca o construtivismo entre o professor e os alunos no conhecimento matemático. A mensagem didática que se coloca nessas atividades pode auxiliar os professores no ensino com o objetivo de visualizar os conceitos desenvolvidos em sala de aula de forma menos conteudista e superando o momento disruptivo no ensino. Acreditamos na credibilidade das estratégias utilizadas e apresentadas no trabalho. Nesse entendimento, o diálogo entre o professor e os alunos, de fato, possibilitam o trabalho do professor e o desenvolvimento do aluno.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

*“O mesmo caminho que sobe e desce”
Heráclito de Éfeso 6 a.C.*

Dado o exposto, o GeoGebra apresenta possibilidades para que os professores de matemática desenvolvam atividades de ensino em diferentes ambientes de aprendizagem e cria uma rede de apoio a aprendizagem. A inserção do conhecimento matemático com o conhecimento tecnológico, juntamente com o construtivismo podem, de fato, contribuir para o estabelecimento de novos paradigmas e abrir, por conseguinte, oportunidade para o desenvolvimento de novas práticas pedagógicas que promovam o desenvolvimento de alunos e professores.

Levando em conta o que foi observado neste trabalho, as abordagens e discursões apresentadas, a formação de professores e o uso de tecnologias, consideramos a perspectiva teórica como a lente sobre o estudo e sua estratégia transformadora sequencial. Tendo em vista que as implementações dos dados coletados se apresentaram em duas fases, uma mostrando e discutindo as correlações do ensino de Análise Combinatória e Probabilidade, a problemática desse ensino e o desenvolvimento de um currículo mais a formação dos professores e a ação do construtivismo nesse cenário. No outro momento, temos a construção das atividades e sua interligação-analítica com o momento anterior.

Este trabalho apresenta, em seus resultados, benefícios que vão favorecer a comunidade que está sendo estudada, ou seja, a comunidade de professores e educadores matemáticos. Ao apresentarmos a sequência didática e as relações que os Problemas 1, 2 e 3 tem com as habilidades e competências da BNCC, acrescentamos uma possibilidade para o ensino da matemática e uma tentativa de contribuir nessa direção um ensino mais efetivo e condizente com a realidade dos alunos.

Nos campos da Educação Matemática, as reflexões que surgem e podem advir são amplas. Nessa área, esperamos contribuir com estudos futuros e a divulgação desta pesquisa, bem como, a aplicação dos problemas e da metodologia em sala de aula.

REFERÊNCIAS

- ALSINA, Àngel. La 'pirámide de la educación matemática': una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. © **Aula de innovación educativa**, 2010, núm. 189, p. 12-16, 2010.
- BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. (Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais)**. Brasília: MEC/SEB. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.
- _____. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEB. Vol. 2: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006, 135p.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Base nacional comum curricular**. Brasília, DF, 2018.
- Bortolossi, H. J. Movimentos, Pensamentos e GeoGebra: alguns aspectos neurocientíficos no ensino e aprendizagem da Matemática. In: BASNIAK, Maria Ivete; RUBIO-PIZZORNO, S (Orgs.). *Perspectivas teórico-metodológicas em pesquisas que envolvem tecnologia na Educação Matemática: o GeoGebra em foco*. São Paulo: Pimenta Cultural, 2020.
- BORBA, R. E. S. R.; SOUZA, L.; CARVALHO, J. Desafios do ensino na Educação Básica de Combinatória, Estatística e Probabilidade. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana–Em Teia**, v. 9, n. 1, 2018.
- DE FREITAS VAZ, Duélcio Aparecido; DE JESUS, Paulo Cesar Cruvinel. Uma sequência didática para o ensino da Matemática com o software Geogebra. **Revista EVS-Revista de Ciências Ambientais e Saúde**, v. 41, n. 1, p. 59-75, 2014.
- DOS SANTOS, Rodrigo Medeiros. Balanço das Pesquisas sobre Formação/prática de Professores que ensinam Estatística, Probabilidade e Combinatória. **Zetetike**, v. 25, n. 1, p. 204-219, 2017.
- Caetano, P. A. S. Paterlini, R. R. **Jogo dos Discos: Módulo I**. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. - (Matemática na prática. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática)
- CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto**. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.
- FLICK, Uwe. **Introdução à pesquisa qualitativa-3**. Artmed editora, 2008.
- FURTADO, Artálio Barbosa. **Estatística, Análise Combinatória e Probabilidade no Ensino Médio: uma abordagem com o auxílio do software GeoGebra**. 2019.
- GOMES, E. G. da S.; CARVALHO, A. B. G. P. de. As estratégias dos docentes com o uso de tecnologias digitais no contexto pandêmico da covid-19. **Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana–Em Teia**, v. 11, n. 2, 2020.

Kilpatrick, Jeremy (1996). Fincando estacas: uma tentativa de demarcar a Educação Matemática como campo profissional e científico. **Zetetiké**, vol 4, nº5, jan/jun de 1996, pp. 99-120. Acesso em 15 de mar. Disponível em <https://www.periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646867/13768>.

SILVA, Marcela Souza. Perspectivas de licenciandos em Matemática em relação a utilização das tecnologias digitais na Educação básica. 147 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2020.

SOUZA, R.; CALEJON, L. Uso da tecnologia da informação e comunicação em uma sequência didática incluindo software GeoGebra no ensino da estatística descritiva. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 10, n. 4, p. 227-244, 2019.