

CÁLCULO VETORIAL

Aplicações na Engenharia Elétrica



Prof. Marcelo de A. Lima | Prof. Evison R. de Oliveira
Augusto D. de Oliveira | Amanda de M. Cordeiro | Ana Lígia M. Pinto
Edlley Ayslan B. Azevedo | Joel B. da S. Filho | Matheus Felipe G. Araújo

CÁLCULO VETORIAL:

Aplicações na Engenharia Elétrica

AUTORES: Marcelo de A. Lima, Evison R. de Oliveira, Augusto D. de Oliveira, Amanda de M. Cordeiro, Ana Lígia M. Pinto, Edlley Ayslan B. Azevedo, Joel B. da S. Filho, Matheus Felipe G. Araújo

GARANHUNS-PE

2025

C144 Cálculo vetorial: aplicações na Engenharia Elétrica / Marcelo de A. Lima...[et al]. -

99p.: il. col.

Produto educacional - Instituto Federal de Pernambuco. Pró-Reitoria de Ensino. Diretoria de Ensino. Campus Garanhuns, 2025.

ISBN 978-85-93339-13-4

1. Cálculo vetorial. 2. Matemática aplicada - engenharia elétrica. 3. Engenharia elétrica - cálculos matemáticos. I. Lima, Marcelo de A. II. Oliveira, Evison R. de. III. Oliveira, Augusto D. de. IV. Cordeiro, Amanda de M. V. Pinto, Ana Lígia M. VI. Azevedo, Edlley Ayslan B. VII. Silva Filho, Joel B. VIII. Araújo, Matheus Felipe G. IX. Título. X. Instituto Federal de Pernambuco.

CDD 515.63

Louise Machado Freire Dias –CRB4/2267

CÁLCULO VETORIAL: Aplicações na Engenharia Elétrica

Ilustração: *Edlley Ayslan Barbosa Azevedo*

Formatação: *Edlley Ayslan Barbosa Azevedo e Marcelo de Araújo Lima*

Ano: 2025

SUMÁRIO

SUMÁRIO	4
APRESENTAÇÃO.....	5
AGRADECIMENTOS.....	5
1. CAMPOS VETORIAIS	7
1.1 Definição De Campos Vetoriais	7
1.2 Módulo.....	9
1.3 Soma Vetorial	10
1.4 Multiplicação Por Escalar.....	12
1.5 Produto Escalar	14
1.6 Produto Vetorial.....	15
1.7 Operadores Vetoriais	17
1.8 Diferenças Entre os Operadores Vetoriais	23
2. SISTEMA DE COORDENADAS	25
2.1 Coordenadas Polares	26
2.2 Coordenadas Cilíndricas.....	29
2.3 Coordenadas Esféricas.....	32
2.4 Operadores Vetoriais Em Diferentes Coordenadas	37
3. INTEGRAIS DE LINHA	38
3.1 Integrais De Linha - Caso Escalar.....	39
3.2 Integrais De Linha - Caso Vetorial	44
3.3 Notações E Orientação.....	46
4. TEOREMA DE GREEN	51
5. INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE.....	58
5.1 Integrais De Superfície - Caso Escalar	58
5.2 Integrais De Superfície - Caso Vetorial	66
6. TEOREMA DE STOKES	70
7. TEOREMA DE GAUSS	75
8. APLICAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL NA ENGENHARIA ELÉTRICA	80
8.1 Conceitos Básicos Da Eletrostática	81
8.2 O fluxo magnético Φ	85
9. APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS DE LINHA.....	88
9.1 As Integrais De Linha No Eletromagnetismo.....	88
9.2 As Integrais de Linha aplicadas às Máquinas Elétricas.....	94
10. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE GREEN.....	103
10.1 O Teorema de Green.....	103
10.2 O Teorema De Green Na Relação Entre O Fluxo De Campo Elétrico Ou Magnético.....	104
Referências.....	105

APRESENTAÇÃO

Bem-vindo ao livro desenvolvido por estudantes do curso de Engenharia Elétrica do Instituto Federal de Pernambuco (IFPE) - *Campus Garanhuns*. Este material é o resultado da pesquisa intitulada "**CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE DISCIPLINAS TÉCNICAS DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DO IFPE - CAMPUS GARANHUNS**: Aplicações de Cálculo Vetorial".

A pesquisa foi desenvolvida pelos seguintes membros:

Coordenador do projeto: Prof. M.Sc. Marcelo de Araújo Lima – Prof. de Matemática do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Colaborador do projeto: Prof. M.Sc. Evison Rosalino de Oliveira – Prof. de Matemática do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Amanda de Moraes Cordeiro: estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Augusto Dias de Oliveira: estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Ana Lígia Monteiro Pinto: estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Matheus Felipe Gonçalves Araújo: estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Joel Bezerra da Silva Filho: estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

Edlley Ayslan Barbosa Azevedo: estudante do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE *Campus Garanhuns*;

AGRADECIMENTOS

Os estudantes citados foram contemplados com bolsas no edital de iniciação científica do IFPE na modalidade **PIBIC SUPERIOR**. Todas as bolsas foram pagas pelo IFPE *Campus Garanhuns*, ao qual, através da sua gestão, fazemos os nossos votos de gratidão

OBJETIVO DO LIVRO

O objetivo principal deste material é introduzir o cálculo vetorial para os estudantes dos cursos de Engenharia Elétrica, utilizando uma abordagem que transforma a linguagem complexa e técnica frequentemente utilizada em cursos de matemática em algo mais simples, didático e direto. Nosso propósito é facilitar a compreensão e aplicação dos conceitos de cálculo vetorial nas disciplinas técnicas do curso, ajudando a construir uma base sólida e prática para os futuros engenheiros.

DESMISTIFICANDO A MATEMÁTICA NA ENGENHARIA

É importante ressaltar que este material não busca, de forma alguma, desvalorizar a matemática tradicionalmente estudada nos cursos de Engenharia. Pelo contrário, nosso objetivo é desmistificar a ideia de que a matemática é uma disciplina isolada e sem aplicação prática. A matemática é fundamental para a engenharia, e através deste material, vamos mostrar como o cálculo vetorial é aplicado diretamente em diversas disciplinas técnicas do curso de Bacharelado em Engenharia Elétrica do IFPE - Campus Garanhuns.

CONHEÇA O DAVI!



**Olá pessoal! Me chamo
Davi, e estou muito
animado para
acompanhar vocês**

!

Para tornar nossos estudos mais interativos e dinâmicos, apresentamos Davi, um estudante de Engenharia Elétrica que vai nos acompanhar durante toda a jornada. Davi estará presente em nossas aulas, participando ativamente, tirando dúvidas e comentando as resoluções dos problemas. Ele será seu guia e colega, facilitando a compreensão dos conceitos e mostrando como eles se aplicam no dia a dia de um engenheiro eletricista.

Esperamos que este livro seja uma ferramenta valiosa em seus estudos e que, junto com o Davi, você consiga navegar pelos conceitos do cálculo vetorial de maneira mais clara e prática. Prepare-se para explorar as contribuições da matemática para a engenharia e descobrir como esses conhecimentos podem ser aplicados diretamente nas disciplinas técnicas do seu curso. Boa leitura e bons estudos!

1. CAMPOS VETORIAIS

1.1 Definição De Campos Vetoriais

Não dá para estudarmos o cálculo vetorial sem antes entendermos o que é uma função vetorial. Você já deve estar acostumado com funções escalares, do tipo $f(x, y)$, que recebem valores de variáveis (x, y ou z) escalares e, também, geram um escalar como resultado.

Por exemplo, a função:

$$f(x, y) = 2x + 3y$$

Aplicando o ponto (2,1), temos:

$$f(2,1) = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7, \text{ sendo } 7 \text{ um escalar.}$$

Ao aplicarmos pontos nessas funções escalares, obtemos um campo escalar.

Funções vetoriais, do tipo $\vec{F}(x, y)$, são funções, que assim como no caso escalar, recebem valores de variáveis escalares, porém, diferente delas, essas funções geram um vetor como resultado.

Basicamente, sendo D um conjunto de R^2 , **um campo vetorial em R^2** associa um ponto (x, y) de D em um vetor bidimensional, como mostra a figura abaixo.

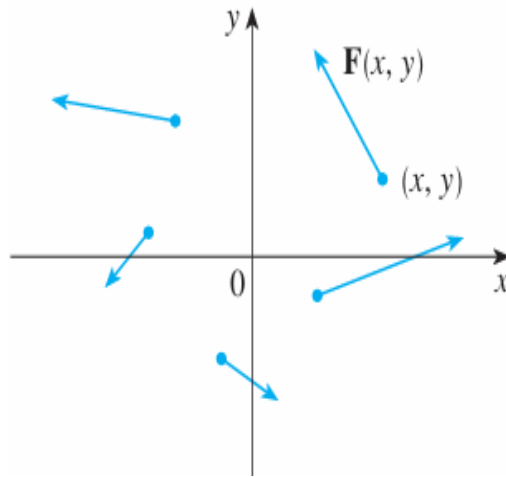


Figura 1.1 Campos vetoriais em R^2 do subconjunto D.

O mesmo acontece no R^3 , onde **um campo vetorial em R^3** associa um ponto (x, y, z) de um conjunto E em um vetor tridimensional, como mostra a figura abaixo.

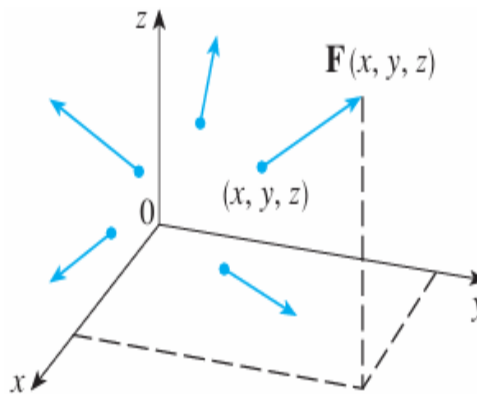


Figura 1.2 Campos vetoriais em R^3 .

Por exemplo, a função:

$$\vec{F}(x, y) = 2x\hat{i} + 3y\hat{j}$$

Aplicando o ponto (2,1), temos:

$$\vec{F}(2,1) = 2 \cdot 2\hat{i} + 3 \cdot 1\hat{j} = 4\hat{i} + 3\hat{j}, \text{ sendo } 4\hat{i} + 3\hat{j} \text{ um vetor.}$$



Pera aí, professor. Quer dizer que aplicando valores escalares as variáveis da função vetorial, eu gero um campo vetorial?

Isso mesmo, Davi! Ao aplicarmos vários pontos em funções vetoriais, obtemos campos vetoriais como esses:

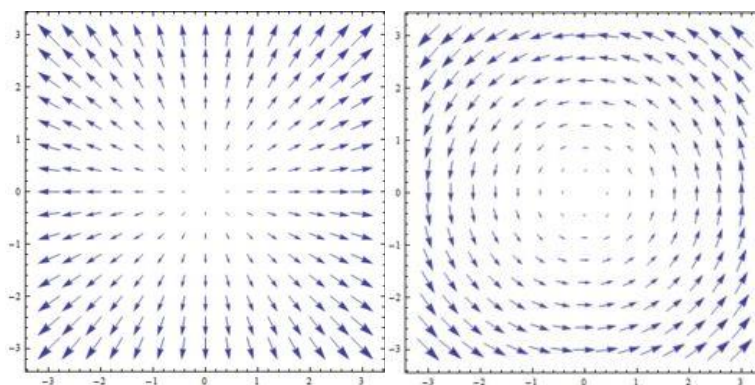


Figura 1.3 Campos vetoriais em R^2 obtidos a partir de funções vetoriais.

Agora que já temos a ideia do que é um campo vetorial, precisamos estudar alguns outros conceitos para que possamos entender suas propriedades.

Os vetores, assim como os números podem ser somados, subtraídos e multiplicados. Veremos agora como essas operações são feitas.

1.2 Módulo

O módulo, ou norma, de um vetor, pode ser interpretado como a distância entre a origem até a extremidade de um vetor. O módulo pode ser calculado das seguintes maneiras:

- No R^2 , sendo o vetor $\vec{u} = (x, y)$, temos que seu módulo $|\vec{u}|$ é dado por:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- No R^3 , sendo o vetor $\vec{v} = (x, y, z)$, temos que seu módulo $|\vec{v}|$ é dado por:

$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

1.3 Soma vetorial

Imagine que temos dois vetores, o vetor $\vec{u}$ e o vetor $\vec{v}$. Qual seria a soma deles?



Como assim,
professor?

Vê só, Davi, dá uma olhada na figura abaixo.

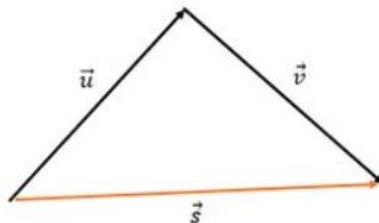


Figura 1.4 Soma vetorial pela regra do paralelogramo.

Pela figura, temos que $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v}$. Uma forma de fazer a soma de vetores é desenhando um vetor seguido do outro, respeitando seu sentido. Assim, a soma dos vetores será o vetor que vai da origem do primeiro até a extremidade do último vetor. Essa técnica de soma vetorial se chama **regra do paralelogramo**.

Se existe soma vetorial, pela lógica, também há a subtração vetorial, que se dá de maneira parecida. Se liga na figura abaixo.

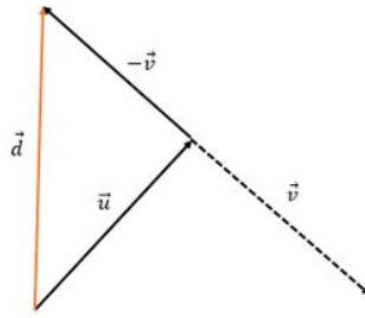


Figura 1.5 Subtração vetorial pela regra do paralelogramo.

Usando a regra do paralelogramo, temos que $\vec{d} = \vec{u} - \vec{v}$. A diferença da soma, é que invertemos o sentido de um vetor, já que $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Tem só um pequeno problema, professor. Eu sou péssimo em desenhar!!! O que eu faço agora!?

Fica calmo, Davi. Confesso que também não sou muito bom em desenhar, fora que em casos que envolvem vetores tridimensionais, o desenho de vetores pode ser mais complexo.

Nesse caso, podemos realizar a soma de vetores somando ou subtraindo as coordenadas de cada vetor. Por exemplo, seja o vetor $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e o vetor $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos que:

$$\vec{u} + \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

Além disso, a soma vetorial apresenta as seguintes propriedades:

- Comutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Associativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{a} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{a})$

1.4 Multiplicação Por Escalar

Davi, uma pergunta. Imagine que Edilson, um eletricista, tem que fazer uma ligação de 6 metros, mas ele só tem pedaços de 1,5 metros de fio de cobre, de quantos pedaços serão necessários?



Finalmente uma pergunta fácil! Se o Edilson precisa de 6 metros, então:

$$1,5 \times 4 = 6$$

Exatamente, Davi! E se eu te falar que a multiplicação de um vetor por um número real é tão fácil quanto esse problema?

Vê só, quando multiplicamos um vetor por uma constante real, sua direção não muda, apenas seu módulo e sentido podem ser alterados.

Imagine que um dos pedaços de fio de cobre é o vetor $\vec{u}$, que aponta para a direita e de módulo de 1,5 metros, ao multiplicar esse vetor por uma constante k , seu módulo é multiplicado k vezes. Se $k = 2$, seu módulo dobra e seu sentido permanece igual. Já se $k = -2$, o módulo ainda irá dobrar, porém, o seu sentido vai se inverter, como mostra a imagem abaixo.

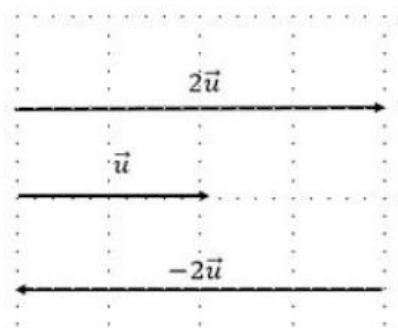


Figura 1.6 Pedaços de fio de cobre representados como vetores.

Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, temos que:

$$\vec{u} \cdot k = k \cdot (x_1, y_1, z_1) = (kx_1, ky_1, kz_1)$$

O produto entre escalares e vetores possui as seguintes propriedades:

- $a \cdot (b\vec{u}) = (ab) \cdot \vec{u}$
- $(a + b) \cdot \vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$
- $a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

Agora que já vimos isso tudo, que tal exercitarmos tudo o que vimos até agora?

Exemplo 1: Determine qual vetor possui o maior módulo, sendo $\vec{u} = (-3, 4, 0)$ e $\vec{v} = (2, 4, 4)$.

Solução:

Temos que:

$$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$$

Como $6 > 5$, temos que $\vec{v}$ é o vetor que possui o maior módulo.

Exemplo 2: Determine o módulo do vetor $\vec{w}$, dado por $\vec{w} = -5 \cdot (\vec{u} - 2\vec{v})$, sendo $\vec{u} = (2, 3, 0)$ e $\vec{v} = (15, 0, -6)$.

Solução:

Temos que:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= -5 \cdot [(2, 3, 0) - 2(15, 0, -6)] = -5 \cdot [(2, 3, 0) + (-30, 0, 12)] \\ &= -5 \cdot (-28, 3, 12) = (140, -15, -60)\end{aligned}$$

Logo:

$$|\vec{w}| = \sqrt{140^2 + 15^2 + 60^2} = \sqrt{23425}$$

1.5 Produto Escalar

Então Davi, acredito que você deva se lembrar lá da quarta ou quinta série, onde você aprendeu que $2 \cdot 5 = 10$ ou que $12 \cdot 3 = 36$, não é?

**Lembro sim, professor.
Aquilo é que era época boa!
Matemática simples e
descomplicada.**



Pois é Davi, tenho que concordar com você que a matemática do fundamental é bem mais simples do que a que a gente vê em cursos superiores, mas relaxa, estou aqui para descomplicar e facilitar seu aprendizado nessa fase da sua formação.

Voltando aos nossos estudos, multiplicar dois números reais é muito tranquilo, né? Mas e se eu te perguntar qual é o produto entre dois vetores? Tipo $\vec{u} = (1, 5, 6)$ e $\vec{v} = (-3, 4, 7)$.

**Poxa, professor. Eu até sei
multiplicar um vetor por
uma constante real e tal,
mas dois vetores? Isso eu**



Relaxa Davi, pode deixar que eu te explico. O produto entre dois vetores pode ser escalar ou vetorial. Inicialmente vamos estudar o caso escalar. Sejam dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$, o **produto escalar**, ou produto interno, entre esses vetores é representado por:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \text{ ou } \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

A forma normalmente mais usada é a do pontinho. Mas cuidado, porque mesmo que esse pontinho possa parecer que se trata de uma simples multiplicação entre dois números reais, não é bem assim. Seja $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, temos que:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

O resultado de um produto escalar gera um escalar, como o próprio nome sugere. O produto escalar possui as seguintes propriedades:

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{a})$
- $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\vec{u}|$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, se e somente se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formarem um ângulo de 90° graus entre eles.

1.6 Produto Vetorial

O **produto vetorial** entre os vetores é comumente representado por:

$$\vec{u} \times \vec{v}$$

Diferente do produto escalar, o resultado de um produto vetorial é um vetor. Mas como resolver isso? Para isso, vamos montar o determinante.



Mas como é que eu resolvo esse determinante?

Vê só Davi, nós vamos resolver o produto vetorial entre os vetores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ e $\vec{v} = (2, 3, 2)$. Na primeira linha do determinante, você deve colocar os vetores da base cartesiana que indicam x, y e z . No caso, chamaremos de $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ os vetores unitários nas direções de x, y e z , respectivamente.

Na segunda e terceira linha, você deve colocar as componentes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que devem estar em ordem.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \vec{u} \\ \leftarrow \vec{v} \end{matrix}$$

Daí, para resolver, faz-se como determinantes de matrizes.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} - (4\vec{k} + 3\vec{i} + 2\vec{j}) = \vec{i} + 0\vec{j} - \vec{k}$$

Assim, temos que:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (1, 0, -1)$$

O produto escalar possui as seguintes propriedades:

- $\vec{u} \times \vec{u} = 0$
- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{v}$
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, se e somente se um dos vetores ser nulo, ou os vetores serem colineares (formarem ângulo de 0° graus).
- $\vec{u} \times \vec{v}$ é ortogonal tanto a $\vec{u}$ quanto a $\vec{v}$.

Agora que conhecemos os produtos entre vetores, que tal exercitarmos?

Exemplo 3: Sendo $\vec{w} = 3 \cdot (\vec{u} + \vec{v})$, $\vec{x} = (4\vec{u} - \vec{v})$, $\vec{u} = (1, 3, 2)$ e $\vec{v} = (-1, 4, 0)$, determine o produto vetorial $\vec{w} \times \vec{x}$ e o produto escalar $\vec{w} \cdot \vec{x}$.

Solução:

Esse problema envolve todas as operações vetoriais vistas até aqui. Para começarmos, vamos determinar quem são os vetores $\vec{w}$ e $\vec{x}$. Temos que:

$$\vec{w} = 3 \cdot [(1, 3, 2) + (-1, 4, 0)] = 3 \cdot (0, 7, 2) = (0, 21, 6)$$

$$\vec{x} = [4(1, 3, 2) - (-1, 4, 0)] = [(4, 12, 8) + (1, -4, 0)] = (5, 8, 8)$$

Temos então que:

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = (0, 21, 6) \cdot (5, 8, 8) = 0 + 168 + 48 = 216$$

$$\vec{w} \times \vec{x} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 21 & 6 \\ 5 & 8 & 8 \end{bmatrix} = (168 - 48)i + (30 - 0)j + (0 - 105)k$$

Logo:

$$\vec{w} \cdot \vec{x} = 216$$

$$\vec{w} \times \vec{x} = (120, 30, -105)$$

1.7 Operadores Vetoriais

Nesse tópico conheceremos o operador “del” (∇), dado por:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Mesmo parecendo um vetor, o “del” é um operador, ou seja, ele realiza alguma tarefa, uma delas é determinar o **vetor gradiente** aplicando uma função escalar $f(x, y, z)$.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Mas afinal, o que é vetor gradiente de uma função? O gradiente de uma função multivariável de valores escalares, do tipo $f(x, y, z)$, denotado por ∇f , que contém todas as informações sobre suas derivadas parciais em um vetor. Para ficar mais claro, vamos fazer alguns exercícios para fixar melhor.

Exemplo 4: Determine o vetor gradiente da função $f(x, y) = x^2y + x$.

Solução:

Sendo $f(x, y) = x^2y + x$, calculando as derivadas parciais, temos que:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2xy + 1, x^2)$$

Exemplo 5: Determine o vetor gradiente da função $f(x, y, z) = yz + xz^3$

Solução:

Sendo $f(x, y, z) = yz + xz^3$, calculando as derivadas parciais, temos que:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (z^3, z, y + 3xz^2)$$

Uma interpretação do vetor gradiente é a seguinte: Imagine você parado no ponto $(x_0, y_0, z_0, \dots)$ no domínio de $f(x_0, y_0, z_0, \dots)$, o vetor ∇f diz a você em que direção você deve caminhar para aumentar o valor de mais rapidamente.

Já vimos o que o operador del pode fazer em um campo escalar, mas e em um campo vetorial? Sendo $\vec{F}(x, y, z) = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ um campo vetorial, a partir do produto escalar $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z)$, obtemos a **divergente** do campo $\vec{F}$, que representamos como $\text{div } \vec{F}$. Logo: $\text{div } \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \right)$



Mas afinal, para que serve esse tal de divergente, professor?

Davi, é simples, imagina que o campo vetorial que a gente tá analisando é o escoamento de um líquido. A divergente desse campo vai nos informar se esse líquido está “escoando” ou “jorrando”. Ficou confuso? Vamos ilustrar isso.

Campo vetorial, onde $\text{div } \vec{F} > 0$:

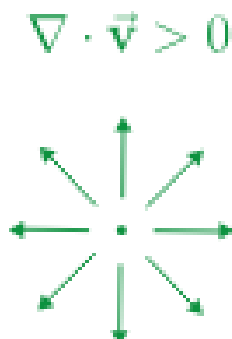


Figura 1.7 Campo vetorial onde $\text{div } \vec{F} > 0$.

Note que os vetores estão “saindo” do ponto central, pensando como o escoamento de um líquido, é como se ele se comportasse como uma fonte jorrando água.



Figura 1.8 Analogia a um campo vetorial onde $\text{div } \vec{F} > 0$.

Campo vetorial, onde $\text{div } \vec{F} < 0$:

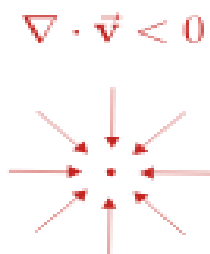


Figura 1.9 Campo vetorial onde $\text{div } \vec{F} < 0$.

Note que, agora, os vetores estão “entrando” do ponto central, pensando como o escoamento de um líquido, é como se ele se comportasse como um ralo escoando água.



Figura 1.10 Analogia a um campo vetorial onde $\text{div } \vec{F} < 0$.

Ainda há o caso onde a divergente de um campo vetorial é 0, nesse caso, é como se o “escoamento do líquido” não sofresse influência nenhuma, como mostrado abaixo.

Campo vetorial, onde $\text{div } \vec{F} = 0$:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0$$

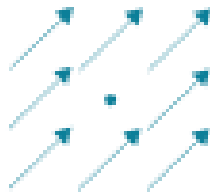


Figura 1.11 Campo vetorial onde $\text{div } \vec{F} = 0$.

Que tal um exercício para fixar tudo isso?

Exemplo 6: Determine $\text{div } \vec{F}$ no ponto $(2,1,0)$, sendo $\vec{F} = 2zy\hat{i} + 3x\hat{j} - \sin(z)\hat{k}$.

Solução:

Temos que:

$$\text{div } \vec{F} = \left(\frac{\partial(2zy)}{\partial x} + \frac{\partial(3x)}{\partial y} + \frac{\partial(-\sin(z))}{\partial z} \right) = (0 + 0 - \cos(z)) = -\cos(z)$$

$$\text{div } \vec{F}(2,1,0) = -\cos(0) = -1$$

Agora, no lugar de trabalharmos com o produto escalar, como no cálculo do divergente, faremos o produto escalar $\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z)$, onde obtemos o **rotacional** do campo vetorial $\vec{F} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$. O rotacional pode ser calculado por:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Daí, calculando o determinante desta matriz, temos que:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial y} z - \frac{\partial}{\partial z} y \right) \hat{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x} z - \frac{\partial}{\partial z} x \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} y - \frac{\partial}{\partial y} x \right) \hat{k}$$



Professor, se tanto o divergente, quanto o rotacional são obtidos por meio de produtos, qual a diferença entre eles?

Boa pergunta, Davi! Vê só, como já vimos, o divergente mede a taxa de variação volumétrica de um campo em torno de um ponto. Em termos mais simples, ele nos diz se um campo está "se espalhando" (divergindo) ou "se contraindo" (convergindo) em um ponto.

O rotacional, por sua vez, mede a circulação ou rotação local do campo em torno de um ponto. Ou seja, o rotacional nos diz o quanto e em que sentido o campo está "girando" ou "rodopiando" em torno de um ponto. Se associarmos o rotacional ao comportamento de um líquido, assim como fizemos com o divergente, teríamos o seguinte:

Campo vetorial, onde $\text{rot } \vec{F} > 0$:

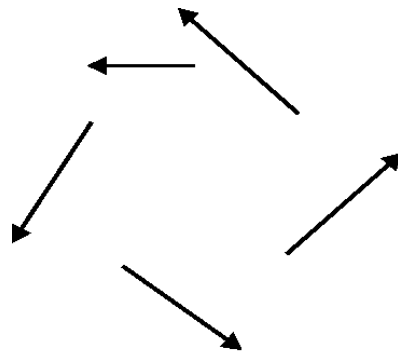


Figura 1.12 Campo vetorial onde $\text{rot } \vec{F} > 0$.

Analisando a figura 1.12 é possível notar que quando o rotacional de um campo vetorial é maior do que 0, sendo este o vetor 0, indica uma rotação local do campo em torno de um ponto no sentido anti-horário.

Campo vetorial, onde $\text{rot } \vec{F} < 0$:

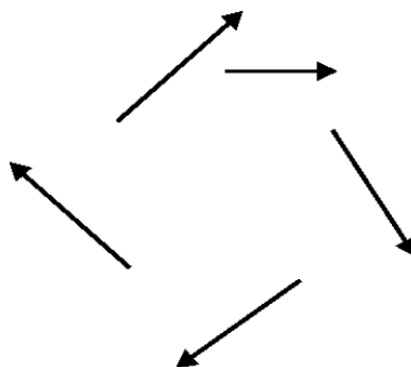


Figura 1.13 Campo vetorial onde $\text{rot } \vec{F} < 0$.

Analisando a figura 1.13 é possível notar que, diferente do caso mostrado na figura 1.12, quando o rotacional de um campo vetorial é menor do que 0, indica uma rotação local do campo em torno de um ponto no sentido horário.

É importante lembrar que o rotacional é um vetor, logo a ideia de “positivo” e “negativo” não se aplicam a ele. A interpretação de $\text{rot } \vec{F} < 0$ ou $\text{rot } \vec{F} > 0$ é a direção onde este vetor aponta.

Por meio das figuras 1.12 e 1.13 é simples perceber que a interpretação física do rotacional diferente de 0 de um campo vetorial associada a um líquido seria um vórtice (ou redemoinho), como mostra a figura 1.14.



Figura 1.14 Vórtice de água.

Campo vetorial, onde $\text{rot } \vec{F} = 0$:



Figura 1.15 Mar calmo.

Quando o rotacional de um campo vetorial é nulo, o chamamos de campo irrotacional, ou seja, não há rotação local ou redemoinhos como visto anteriormente. Como mostra a figura 1.15, a melhor associação a este comportamento são as águas do mar calmo.

1.8 Diferenças Entre os Operadores Vetoriais

Fala Davi, conseguiu entender tudo sobre os operadores vetoriais?



Entender, eu entendi professor. Mas ainda me confundo entre eles!

Pode ficar tranquilo que eu te ajudo, Davi. Vê só, para começar, vamos analisar a figura abaixo.



Figura 1.16 Operadores vetoriais.

Pela figura 1.16 fica fácil de perceber que o operador gradiente (∇f) recebe um campo escalar e devolve como resultado um campo vetorial, enquanto o operador divergente ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$) faz justamente o contrário, recebe um campo vetorial e devolve um campo escalar como resultado. Por fim, temos o rotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{F}$) que recebe um campo vetorial e também devolve um campo vetorial como resultado.

Em resumo:

Operação	Tipo da entrada	Tipo da saída	Interpretação física
Gradiente	Escalar	Vetor	Mede a taxa de variação máxima de um campo escalar e aponta na direção de maior variação.
Divergente	Vetor	Escalar	Mede o fluxo de saída ou entrada de um campo vetorial em um ponto. Está relacionado à presença de fontes ou sorvedouros.
Rotacional	Vetor	Vetor	Mede a tendência de rotação ou circulação de um campo vetorial em torno de um ponto. Indica se o campo gira ou não.
Gradiente	Escalar	Vetor	Mede a taxa de variação máxima de um campo escalar e aponta na direção de maior variação.

2. SISTEMA DE COORDENADAS

Até agora, você tem estudado e trabalhado com o **sistema cartesiano**, se baseando nas coordenadas x , y e z , não é isso Davi?

Exatamente, professor! Até agora, só usei esse tipo de coordenada, e para ser sincero, nem sei se existem outras.



Existem sim, Davi! Em geral, as coordenadas servem para nos localizar no espaço. Um exemplo bem simples da aplicação das coordenadas é o jogo Batalha Naval.

O jogo Batalha Naval é um jogo de tabuleiro em que dois jogadores tentam afundar os navios do oponente, posicionados em uma grade de 10x10. Cada coluna é marcada com letras (A-J) e cada linha com números (1-10). Os jogadores atacam anunciando coordenadas como B5 ou E7 para tentar acertar os navios do adversário.



Figura 2.1 Jogo batalha naval.

Se no lugar dos números e das letras usarmos os eixos y e x , iremos trabalhar com **coordenadas cartesianas**, ou também chamadas de **coordenadas retangulares**, que comumente usamos para localizar pontos, como no Batalha Naval, ou até demarcar distâncias percorridas. Agora, analise o gráfico abaixo. Como poderíamos localizar o ponto P ?

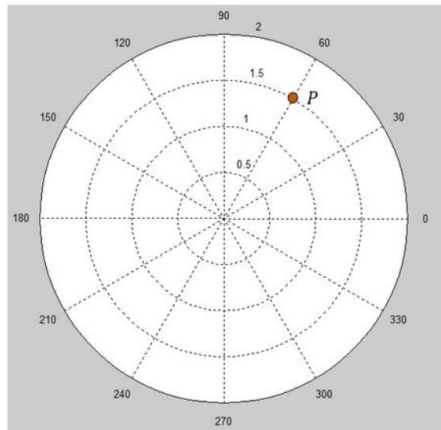


Figura 2.2 Gráfico em coordenadas polares.



Pera aí! Como assim existe um gráfico redondo?

Davi, pode ficar calmo. Deixa comigo que eu te explico tudo!

Para conseguirmos localizar o ponto P , utilizaremos as **coordenadas polares**.

2.1 Coordenadas Polares

As coordenadas polares são outro tipo de coordenadas, normalmente elas são usadas para localizar pontos em planos redondos. Para localizar um ponto em coordenadas polares precisamos saber a distância r do ponto até a origem do gráfico, e o ângulo θ entre a reta que o ponto forma com a origem e o eixo polar, como mostra a figura abaixo.

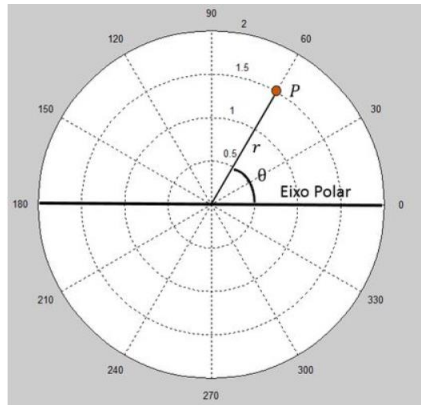


Figura 2.3 Gráfico em coordenadas polares.

Analisando a figura, notamos que a distância entre o ponto P e a origem é de $r = 1,5$, e o ângulo entre a reta que o ponto forma com a origem e o eixo polar é de $\theta = 60^\circ$. Assim, em coordenadas polares, podemos definir o ponto P como $P = (1,5, 60^\circ)$. Agora, podemos passar para um caso genérico.

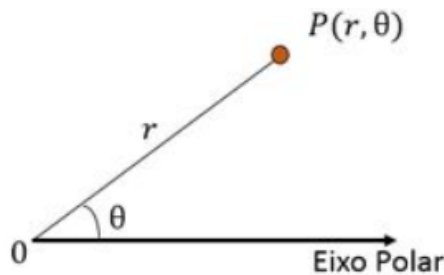


Figura 2.4 Ponto P em coordenadas polares.

Temos que r é a distância da origem ao ponto P e θ é o ângulo entre a reta que o ponto forma com a origem e o eixo polar. Onde:

$$r \geq 0 \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Há duas coisas que precisamos nos atentar. A primeira é que, em geral, usa-se radianos no lugar de graus quando se indica o ângulo θ . Já a segunda é que, as coordenadas em geral, como r ou θ , podem ser escritas com outras letras e símbolos, por isso é importante se atentar ao o que cada variável representa.



Professor, eu já aprendi sobre coordenadas polares. Mas e se eu estiver no sistema cartesiano e quiser passar para o sistema polar?

Ótima pergunta, Davi! Dá uma olhada na figura abaixo.

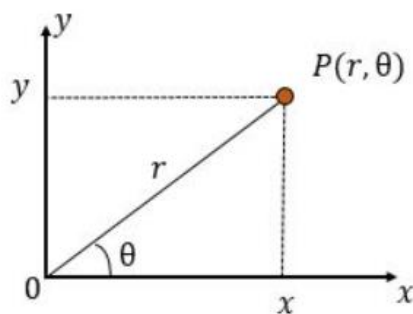


Figura 2.5 Ponto P no plano cartesiano.

Da figura, podemos tirar as seguintes conclusões:

$$x = r\cos(\theta)$$

$$y = r\sin(\theta)$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Assim como podemos fazer o contrário. Onde:

$$\tan(\theta) = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Agora, vamos exercitar.

Exemplo 7: Encontre uma equação em coordenadas polares para a curva cuja equação em coordenadas cartesianas é dada por $x^2 - y^2 = 16$.

Solução:

Temos que:

$$x = r\cos(\theta) \text{ e } y = r\sin(\theta)$$

Logo:

$$x^2 - y^2 = r^2\cos^2(\theta) - r^2\sin^2(\theta) = r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

Segundo a identidade trigonométrica $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, temos que:

$$r^2(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2\cos(2\theta) = 16$$

Daí:

$$r\sqrt{\cos(2\theta)} = 4$$

Exemplo 8: Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa.

“A equação (em coordenadas polares) $r = -4\cos(\theta)$ representa uma parábola.”

Solução:

Temos que:

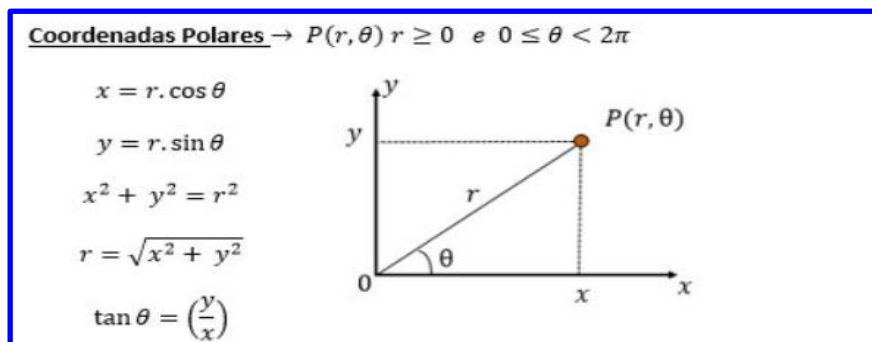
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$x = r\cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Daí:

$$r = -4\cos(\theta)$$
$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = -4 \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\Rightarrow x^2 + y^2 = -4x$$
$$\Rightarrow (x + 2)^2 + y^2 = 4$$

Assim, temos que, em coordenadas cartesianas, $r = -4\cos(\theta)$ é $(x + 2)^2 + y^2 = 4$. Porém, diferente do que o enunciado afirma a equação $(x + 2)^2 + y^2 = 4$ trata-se de uma circunferência de centro em $(-2, 0)$. Logo, a afirmação é falsa.

O resumo das coordenadas polares é:



2.2 Coordenadas Cilíndricas

Já vimos as coordenadas polares, que são uma forma de localizar pontos em espaços bidimensionais, mas e se eu quiser localizar pontos em uma terceira dimensão?

Por exemplo, Davi, imagine que em uma caixa d' água cilíndrica há um vazamento, como eu posso dar a localização exata do ponto de vazamento?



Podemos usar as coordenadas polares para determinar o ângulo e a distância do centro da caixa até o ponto de vazamento, que nesse caso será o raio da caixa. Após isso, basta determinarmos a altura desse ponto.



Figura 2.6 Caixa d' água cilíndrica.

Muito bem, Davi! É isso mesmo! O que você acabou de descrever é o princípio das **coordenadas cilíndricas**.

As coordenadas cilíndricas contam com r e θ , assim como as coordenadas polares, e além dessas, contam também com a coordenada z , que é a mesma das coordenadas cartesianas, que indica a altura. Analise a figura abaixo.

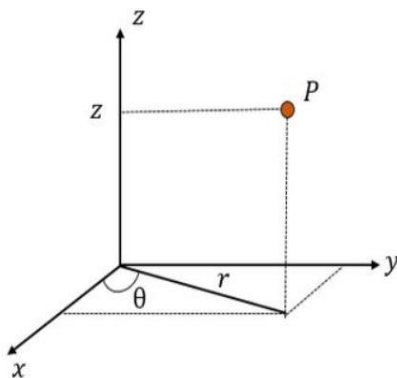


Figura 2.7 Ponto P em coordenadas cartesianas no $\mathbb{R}^3$.

Em coordenadas cilíndricas, o ponto P é representado como $P = (r, \theta, z)$. Assim como nas coordenadas polares, é possível converter coordenadas cartesianas em coordenadas cilíndricas.

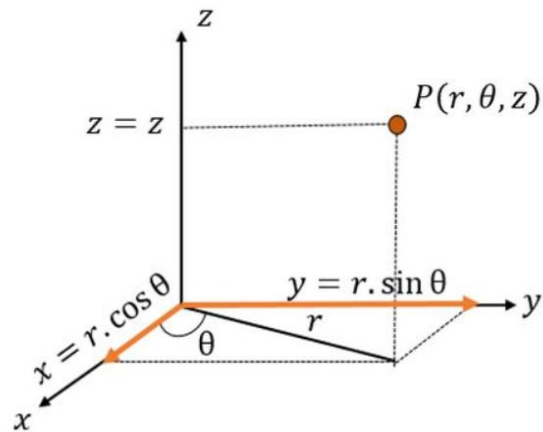


Figura 2.8 Ponto P em coordenadas cilíndricas.

Da figura acima, temos que:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Agora, vamos exercitar esses conceitos.

Exemplo 9: Encontre uma equação em coordenadas cartesianas para a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é dada por $z^2 \sin(\theta) = r^3$.

Solução:

Temos que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = z$$

$$y = r \sin(\theta) \Rightarrow \sin(\theta) = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Daí:

$$z^2 \sin(\theta) = r^3$$

$$\Rightarrow z^2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^3$$

$$\Rightarrow z^2 y = \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right)^4$$

$$\Rightarrow z^2 y = (x^2 + y^2)^2$$

Exemplo 10: Encontre uma equação em coordenadas cilíndricas para a superfície cuja equação em coordenadas cartesianas é dada por $x^2 - y^2 = 3z^2$.

Solução:

Temos que:

$$x = r \cos(\theta)$$

$$y = r \sin(\theta)$$

$$z = z$$

Daí:

$$x^2 - y^2 = r^2 \cos^2(\theta) - r^2 \sin^2(\theta) = r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$$

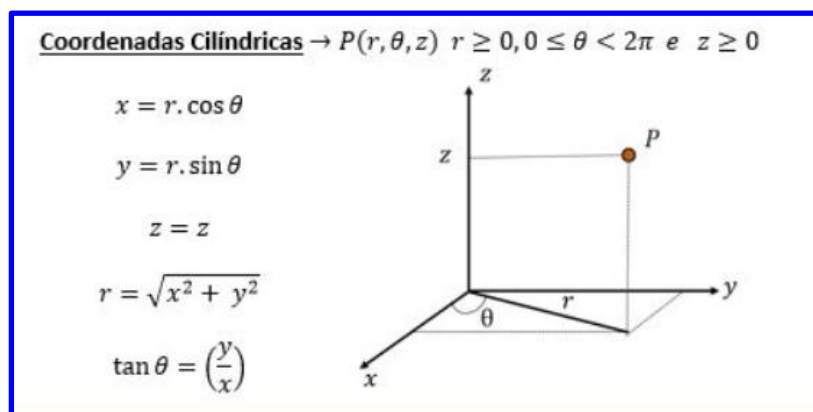
Segundo a identidade trigonométrica $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$, temos que:

$$r^2 (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) = r^2 \cos(2\theta) = 3z^2$$

Daí:

$$r \sqrt{\cos(2\theta)} = 3z^2 \text{ ou } z = \frac{r \sqrt{\cos(2\theta)}}{\sqrt{3}}$$

O resumo das coordenadas cilíndricas é:



2.3 Coordenadas Esféricas

Um dos livros mais vendidos no mundo é “O Pequeno Príncipe”, de Antoine de Saint-Exupéry. No livro, o personagem principal é um menino que vive no asteroide B-612. Esse asteroide é pequeno e tem apenas três vulcões (sendo um deles inativo) e uma rosa. A relação do pequeno príncipe com a rosa é central para a história e carrega profundos significados simbólicos.



Figura 2.9 O pequeno príncipe, do livro de Antoine de Saint-Exupéry, em seu asteroide.

Davi, imagine que o príncipezinho, no intuito de evitar que visitantes se queimassem, decidiu determinar a localização dos dois vulcões ativos de seu asteroide. Tendo o asteroide B-612 um formato esférico, como o príncipezinho poderia determinar as coordenadas da localização desses vulcões?



Sinceramente, eu não sei. Por se tratar de uma superfície esférica, não acho que seja possível usar coordenadas polares, cilíndricas ou cartesianas.

Você tem razão, Davi. Por conta do asteroide B-612 ter um formato esférico, seria muito difícil para o Pequeno Príncipe usar as coordenadas que vimos até agora para localizar os vulcões ativos. Nesse caso, para ajudarmos o príncipezinho usaremos **coordenadas esféricas**.

Vamos lá, imagine o asteroide B-612 bem no centro de um eixo. Imagine que um dos vulcões ativos seja o ponto P .

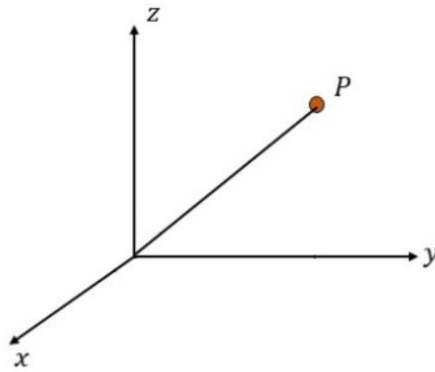


Figura 2.10 Ponto P no espaço R^3 .

Para conseguirmos a posição do vulcão, vamos precisar de três elementos:

- A distância ρ do ponto desejado até a origem.
- O ângulo θ entre os eixos x e y.
- O ângulo ϕ entre o vetor $\overrightarrow{OP}$ e o eixo z.

Com esses três elementos é possível determinar a posição de um dos vulcões ativos no asteroide.

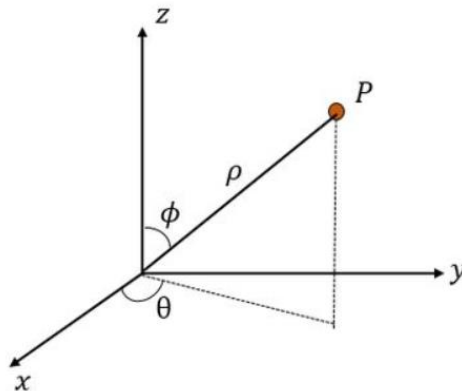


Figura 2.11 Coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas são comumente usadas em superfícies esféricas ou cônicas, possuindo três coordenadas (ρ, θ, ϕ) , onde:

$$\rho \geq 0$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq \phi \leq \pi$$

As coordenadas cartesianas podem ser escritas na forma de coordenadas esféricas da seguinte forma:

$$z = \rho \cos(\phi)$$

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi)$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$

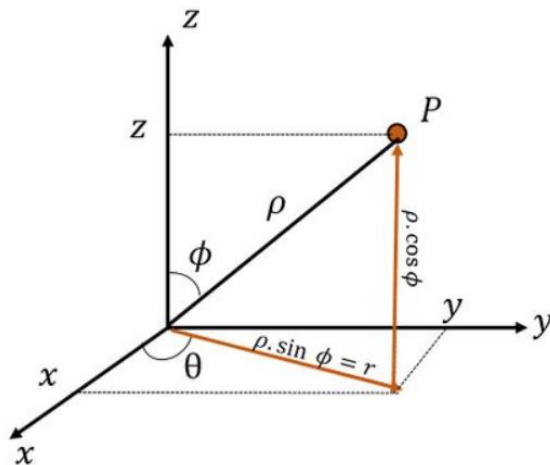


Figura 2.12 Ponto P em coordenadas esféricas.

Agora, que tal exercitarmos tudo isso?

Exemplo 11: As coordenadas esféricas estão diretamente relacionadas às coordenadas de latitude e longitude usadas na navegação. Um navio pirata ao mar está no ponto A que está localizado a 60° de longitude oeste e 40° de latitude norte. O navio viaja a uma ilha no ponto B que está a 40° de longitude oeste e 20° de latitude norte. Supondo que a Terra seja uma esfera com raio de 6370 Km , determine a menor distância que o navio pode viajar indo de A para B, sabendo que ϕ e θ correspondem a latitude e longitude, respectivamente.



Figura 2.13 Figura ilustrativa do exemplo 11.

Solução:

Inicialmente, precisamos interpretar o problema. O problema propõem que determinemos a menor distância entre os pontos A e B, para isso, inicialmente precisamos determinar a posição de cada ponto usando as coordenadas esféricas. Temos que:

$$A = (\rho_1, \theta_1, \phi_1) \text{ e } B = (\rho_2, \theta_2, \phi_2)$$

Sendo o raio da terra, aproximadamente, 6370 Km. Temos que $\rho_1 = \rho_2 = 6370$. Além disso, determinar longitude oeste e latitude norte indicam ângulos negativos em relação aos sentidos usados nas coordenadas esféricas. Nesse caso, temos que:

$$A = (6370, -60^\circ, -40^\circ) = (6370, 360^\circ - 60^\circ, 90^\circ - 40^\circ) = (6370, 300^\circ, 50^\circ)$$

$$\Rightarrow A = (6370, \frac{5\pi}{3}, \frac{5\pi}{18})$$

$$B = (6370, -40^\circ, -20^\circ) = (6370, 360^\circ - 40^\circ, 90^\circ - 20^\circ) = (6370, 320^\circ, 70^\circ)$$

$$\Rightarrow B = (6370, \frac{16\pi}{9}, \frac{7\pi}{18})$$

Em coordenadas cartesianas, temos que:

- Em A:

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi) = 6370 \cos(\frac{5\pi}{3}) \sin(\frac{5\pi}{18}) = 96,61$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) = 6370 \sin(\frac{5\pi}{3}) \sin(\frac{5\pi}{18}) = 8,85$$

$$z = \rho \cos(\phi) = 6370 \cos(\frac{5\pi}{18}) = 6369,26$$

- Em B:

-

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\phi) = 6370 \cos(\frac{16\pi}{9}) \sin(\frac{7\pi}{18}) = 135,17$$

$$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi) = 6370 \sin(\frac{16\pi}{9}) \sin(\frac{7\pi}{18}) = 13,21$$

$$z = \rho \cos(\phi) = 6370 \cos(\frac{7\pi}{18}) = 6368,55$$

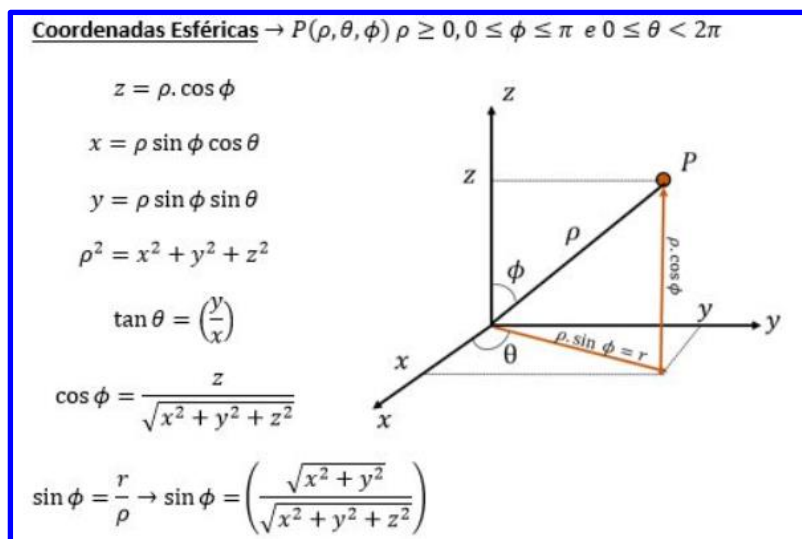
Assim, a menor distância entre A e B pode ser dada por:

$$|A - B| = \sqrt{(96,61 - 135,17)^2 + (8,85 - 13,21)^2 + (6369,26 - 6368,55)^2}$$

$$\Rightarrow |A - B| = 38,81$$

Ou seja, a menor distância entre o barco e a ilha é de 38,81 Km.

O resumo das coordenadas esféricas é:



2.4 Operadores Vetoriais em diferentes coordenadas

Já vimos os operadores vetoriais gradiente (∇f), divergente ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$) e rotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{F}$) em coordenadas cartesianas, porém, como visto neste capítulo, as coordenadas cartesianas nem sempre são as melhores de se trabalhar em determinadas situações. Assim, os operadores vetoriais podem ser utilizados em diferentes coordenadas, como mostrado nas tabelas abaixo.

Coordenadas	Gradiente ($\nabla f(x, y, z)$)
Cartesianas	$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
Cilíndricas	$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$
Esféricas	$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)$

Coordenadas	Divergente ($\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(x, y, z)$)
Cartesianas	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$
Cilíndricas	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}\right)$
Esféricas	$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial(\sin(\theta) F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}\right)$

Coordenadas	Rotacional ($\vec{\nabla} \times \vec{F}(x, y, z)$)
Cartesianas	$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{z}$
Cilíndricas	$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \right) \hat{r} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{z}$
Esféricas	$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \frac{1}{r \sin(\theta)} \left(\frac{\partial(\sin(\theta) F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r F_\phi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{\phi}$

3. INTEGRAIS DE LINHA

As integrais de linha têm papel importante tanto do ponto de vista teórico como prático. Se você é estudante de Engenharia Elétrica provavelmente se deparou com o conceito dessas integrais na disciplina de cálculo diferencial e integral, mas saiba que suas aplicações vão além e incluem outras disciplinas muito importantes no seu curso, como: Eletromagnetismo, Física, Circuitos Elétricos, Materiais Elétricos - onde são desenvolvidos conceitos de: trabalho, energia potencial, fluxo magnético, linhas de campo, campo elétrico, campo magnético, e muitas outras situações em que o comportamento de um campo vetorial ou campo escalar é estudado ao longo de uma curva. Mas calma! Estou aqui para te ajudar nessa jornada!

Até agora você deve ter estudado três tipos de integrais, as integrais simples, as duplas e as triplas. As integrais simples são calculadas num intervalo, as duplas numa região do plano e as triplas numa região do espaço tridimensional.

Relembraremos o processo de resolução utilizado na definição das três integrais já vistas fazendo um “passo a passo”:

Passo 1: Subdividir a região de integração em sub-regiões: intervalos, no caso da integral simples, retângulos, no caso da dupla e paralelepípedos no caso da tripla.

Passo 2: Considerar um ponto arbitrário $\mathbf{p}_i$ dentro da região.

Passo 3: Multiplicar o elemento de integração (dx, dA ou dV) pelo valor da função nesse ponto, $f(\mathbf{p}_i)$.

Passo 4: Considerar o somatório dos valores em cada região e calcular o limite quando o número de sub-regiões tende a infinito.

Vamos utilizar o mesmo procedimento para o caso do cálculo da integral ao longo de uma curva C.

3.1 Integrais De Linha - Caso Escalar

O conceito da integral de linha é muito semelhante ao da integral simples, que a gente já está acostumado. Por exemplo, vamos analisar a expressão abaixo:

$$\int_a^b f(x) dx$$

Já aprendemos que essa expressão significa que estamos fazendo o somatório das áreas infinitesimais de retângulos entre o eixo das abscissas e o gráfico da função $f(x)$ dentro de um intervalo $[a, b]$. No caso de $f(x)$ ser positiva, temos uma área desse tipo:

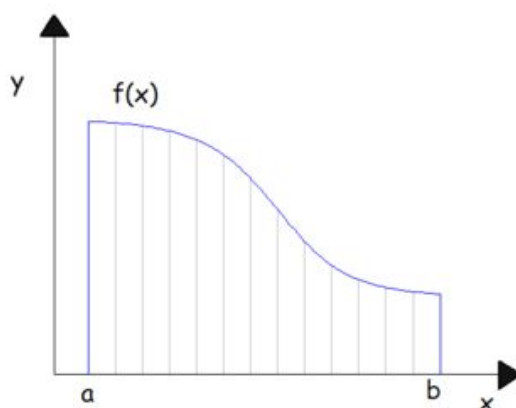


Figura 3.1 Função $f(x)$ dividida em muitos retângulos de área infinitesimal.

Considere agora um muro construído ao longo da curva C unindo dois pontos no plano xy e cuja altura é igual a uma função $z = f(x, y)$ contínua em S , onde S é uma região do plano contendo a curva C . Vamos achar a área desse muro?

A área do muro é limitada inferiormente pela curva C e superiormente pela função $f(x, y)$ (ver figura abaixo):

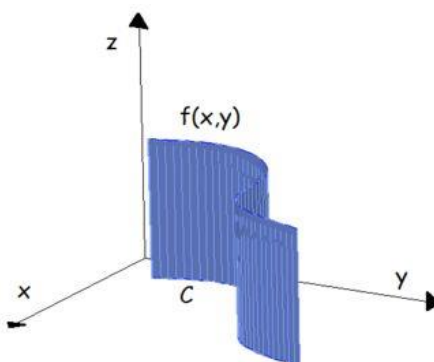


Figura 3.2 Função $f(x)$ dividida em muitos retângulos de área infinitesimal no R^3 .

Para resolver o problema vamos dividir a curva C obtendo n arcos pela introdução de pontos $P_0, P_1, P_2 \dots P_{n-1}, P_n$, entre os pontos inicial e final.

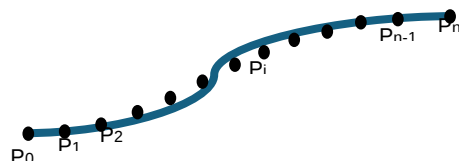


Figura 3.3 Curva C dividida em n arcos.

Consideremos o arco de curva entre os pontos P_{i-1} e P_i de comprimento ΔS_i , e a “tira” limitada inferiormente por esse arco de curva e superiormente pela função $f(x_i, y_i)$. Seja ainda (x_i, y_i) um ponto arbitrário neste intervalo.

Observe que assim obtemos um retângulo de base ΔS_i e altura $f(x_i, y_i)$ (altura do muro neste ponto). Dessa forma podemos aproximar a área desse retângulo pela área da “tira” ΔA_i .

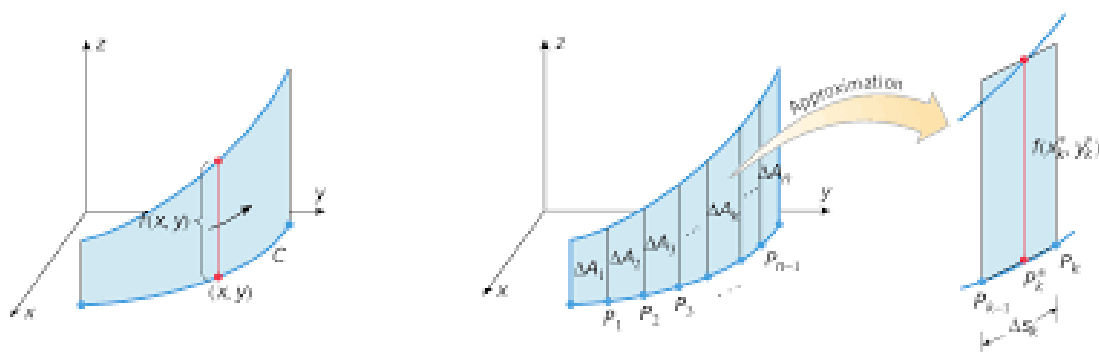


Figura 3.4 Aproximação da área e cada retângulo.



Professor, e se aumentarmos indefinidamente o número de tiras nesse arco?

Estou vendo que você está entendendo Davi, isso mesmo! Se aumentarmos o número de divisões, temos mais arcos, de modo que o comprimento de cada arco tende a zero, sendo

razoável admitir que o erro na aproximação da área também tende a zero. Dessa forma a área do muro é aproximadamente:

$$\text{Área do muro} \approx \sum_{i=1}^n (f x_i, y_i) \Delta S_i = \int_c f(x, y) ds$$

E agora você já sabe por que a integral é a chamada de integral de linha!



Professor, eu não entendi o que é esse “ds”.

Na verdade, é bem simples . Sendo ΔS_i o comprimento de intervalos da curva C , o ds trata-se de uma quantidade infinitesimal (muito pequena) do comprimento desta curva, ou seja, é quando o ΔS_i tende a 0. Para acharmos ds devemos observar que, sendo dS uma quantidade infinitesimal do comprimento da curva C , podemos supor que ela é a hipotenusa do triângulo retângulo, cujos catetos são dx e dy , como mostra a figura abaixo.

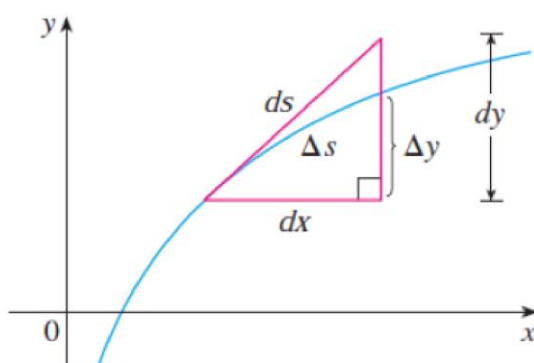


Figura 3.5 Determinação de ds .

Aplicando o Teorema de Pitágoras nesse triângulo, obtemos:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

Onde,

$$\{x = x(t); y = y(t)\}$$

Daí,temos que:

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Logo:

$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Parametrizando a curva C, temos que:

$$r(t) = [x(t), y(t)]$$

Assim, temos que:

$$\int_a^b f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b f(r(t)) \cdot |r'(t)| dt$$

Assim, encontramos a fórmula de uma integral de linha de um campo escalar.

Mas como resolver uma integral desse tipo? Vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 20: Calcule $\int_c f ds$, onde $f(x, y) = 2x^2 + y^2$ e C é a metade direita da circunferência $x^2 + y^2 = 16$.

Solução:

Para resolver esta integral, usaremos 4 passos que podem ser usados em qualquer outra integral de linha escalar.

Passo 1: Montar o problema

vejamos a fórmula:

$$\int_c f ds = \int_c 2x^2 + y^2 ds$$

Passo 2: Parametrizar a curva

Analisando as informações dadas pelo problema, temos que a curva C é a metade direita de uma circunferência de raio 4. Temos que a equação de uma circunferência é dada por:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Temos que a parametrização da circunferência é dada por:

$$x(\theta) = R \cos(\theta)$$

$$y(\theta) = R \sin(\theta)$$

$$r(\theta) = [R \cos(\theta), R \sin(\theta)] \Rightarrow r(\theta) = [4 \cos(\theta), 4 \sin(\theta)]$$

Para encontrarmos os intervalos θ devemos nos atentar ao que diz o enunciado. “C é a metade direita da circunferência $x^2 + y^2 = 16$ “. Esboçando esta curva, temos o seguinte:

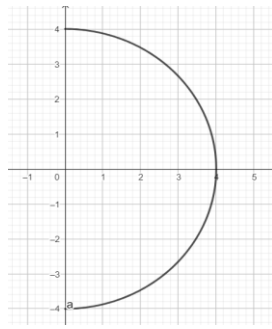


Figura 3.6 Esboço gráfico da a metade direita da circunferência $x^2 + y^2 = 16$.

Tomando o eixo das abscissas como referência, temos que:

$$\frac{-\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Passo 3: Calcular o $|r'(\theta)|$

Temos que:

$$r(\theta) = [4\cos(\theta), 4\sin(\theta)] \Rightarrow r'(\theta) = [-4\sin(\theta), 4\cos(\theta)]$$

Daí, temos que o módulo da derivada da curva parametrizada é dado por:

$$|r'(\theta)| = \sqrt{(-4\cos(\theta))^2 + (4\sin(\theta))^2} = \sqrt{16[\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2]} = 4$$

Passo 4: Substituir tudo na integral e escrever a função em termos de θ

Temos que:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2 \Rightarrow f(\theta) = 8\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2$$

Daí:

$$\int_c 2x^2 + y^2 \, ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (8\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2) 4 \, d\theta$$

No fim, temos uma integral de uma única variável que já estamos acostumados a resolver usando identidades e técnicas de integração que aprendemos até aqui. Resolvendo a integral, temos que:

$$\int_c 2x^2 + y^2 \, ds = 18\pi$$



Quer dizer que eu só preciso seguir esses passos , professor?

Exatamente, Davi! Seguindo esses quatro passos conseguimos resolver qualquer integral de linha escalar sem muitas dificuldades.

Entendi tudinho, professor! Mas e o caso vetorial, qual a diferença dele para o caso escalar?



Calma, Davi! Esse é justamente o próximo tópico que vamos estudar.

3.2 Integrais De Linha - Caso Vetorial



Nascem vetores? É tipo uma maternidade de vetores?

Não é bem assim, Davi. Vamos analisar os campos escalares, são funções que recebem valores escalares e retornam como resultado outro valor escalar. Já no caso dos campos vetoriais, eles também recebem valores escalares, mas retornam vetores como resultado. Um

exemplo de campo vetorial é a função $\vec{F}(x, y) = (2x, y^3)$, onde ao aplicarmos valores escalares para X e Y, geramos um vetor no R^2 .

Sendo $\vec{F}(x, y)$ um campo vetorial contínuo e definido em uma curva C, parametrizada por $\vec{\sigma}(t)$, então a **integral de linha de linha do caso escalar** de $\vec{F}$ ao longo da curva C é dada por:

$$\int_C \vec{F}[x(t), y(t)] \cdot \vec{\sigma}'(t) dt$$



Professor, é impressão minha ou essa fórmula é muito parecida com a da integral de linha do caso escalar?

Não é impressão não, Davi. Na integral de linha do caso vetorial, objetivo é encontrar a área que fica que fica abaixo de uma função f sobre uma curva C, a única diferença do caso vetorial é que a função $\vec{F}$ trabalhada é um campo vetorial.



Vixe, professor! Notei uma diferença, aquela derivada da parametrização, eu não deveria calcular o módulo dela igual no caso escalar ?

Você está se referindo ao termo $\vec{\sigma}'(t)$, não é isso? Realmente, diferente do caso escalar, dado por:

$$\int_a^b f(r(t)) \cdot |r'(t)| dt = \int_a^b f(x(t); y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

Isso se origina de uma simplificação a partir do vetor unitário tangente a curva C é dado por:

$$\frac{\vec{\sigma}'(t)}{|\vec{\sigma}'(t)|}$$

Originalmente, a integral de linha do caso vetorial é dada por:

$$\int_C \vec{F}[x(t), y(t)] \frac{\vec{\sigma}'(t)}{|\vec{\sigma}'(t)|} |\vec{\sigma}'(t)| dt$$

Simplificando, temos que:

$$\int_C \vec{F}(x, y) dr = \int_C \vec{F}[x(t), y(t)] \cdot \vec{\sigma}'(t) dt$$

3.3 Notações e Orientação

Uma integral de linha de um campo vetorial pode ser escrita como:

$$\int_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} \text{ ou } \int_C F_1 dx + F_2 dy$$

Para os casos com curvas fechadas, onde o ponto de partida é igual ao ponto final, podemos representar como:

$$\oint_C \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{r} \text{ ou } \oint_C F_1 dx + F_2 dy$$

Algo que devemos nos atentar é que, no momento em que resolvemos uma integral de linha vetorial, é que a curva que será parametrizada possui uma orientação. Vamos analisar duas curvas já parametrizadas:

- $C_1 : \vec{\sigma}_1(t) = (2t, 0), 0 \leq t \leq 3;$
- $C_2 : \vec{\sigma}_2(t) = (-2t, 0), -3 \leq t \leq 0;$

Note que ambas as curvas são retas que ligam os pontos (0,0) de (6,0), à primeira vista, até poderíamos dizer que as curvas são iguais, porém, é importante saber a diferença entre elas.

A curva C_1 parte do ponto $(0,0)$ até $(6,0)$, já a curva C_2 parte do ponto $(6,0)$ até $(0,0)$. Essa “direção” das curvas, chama-se **orientação**.

Assim, uma mesma reta ou curva pode ter dois sentidos diferentes, de que:

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Agora, que tal resolvermos uma questão?

Exemplo 21: Determine o trabalho exercido pela força $F(x,y) = (5x,y^2)$ ao longo da curva parametrizada $\vec{\sigma}(t) = (t^2, 3t)$, com $0 \leq t \leq 1$.

Solução:

Pode ficar tranquilo, Davi! Essa é uma questão muito fácil de resolver, vamos dividi-la em alguns passos:

Passo 1: Montar o problema

Da física, temos que o trabalho exercido por uma força em uma curva pode ser dado por:

$$W = \int_C \vec{F}(x,y) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}[x(t), y(t)] \cdot \vec{\sigma}'(t) dt$$

Pelo enunciado da questão, temos que $a = 0$ e $b = 1$. Além disso, também é dada a parametrização da curva C , onde $x = t^2$ e $y = 3t$.

Passo 2: Calcular $\vec{\sigma}'(t)$

Derivando a parametrização $\vec{\sigma}(t) = (t^2, 3t)$, temos:

$$\vec{\sigma}'(t) = \left(\frac{d(t^2)}{dt}, \frac{d(3t)}{dt} \right) = (2t, 3);$$

Passo 3: Aplicar $\vec{\sigma}'(t)$ na equação e reescrever a função $F(x,y)$ em função de t

Temos que:

$$W = \int_0^1 (5t^2, 9t^2) \cdot (2t, 3) dt$$

Fazendo o produto escalar, temos que:

$$W = \int_0^1 10t^3 + 27t^2 \, dt$$

Daí:

$$W = \left[\frac{10t^4}{4} + \frac{27t^3}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{5t^4}{2} + 9t^3 \right]_0^1 = \frac{23}{2} \text{ joules}$$

Viu só? Bastante simples e fácil! Vamos resolver outro exemplo:

Exemplo 22: Calcule $\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (2y, -z - x, x - z)$ e C é a interseção de $x^2 + y^2 = -2z$ com o plano $z = x$, percorrida no sentido horário.



Função de três
variáveis e
parametrização de
interseção de figuras,
agora complicou!

Solução:

Realmente, Davi, essa é uma questão um pouco mais complexa, mas nada que a gente já não tenha visto anteriormente. Assim como no exemplo 11, vamos resolver esse exemplo por passos:

Passo 1: Montar o problema

Não muito diferente do caso R^2 , em R^3 , temos que:

$$\int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}[x(t), y(t), z(t)] \cdot \vec{\sigma}'(t) \, dt$$

Por meio da parametrização da curva C, vamos determinar os intervalos de integração e $\vec{\sigma}'(t)$.

Passo 2: Parametrizar a curva C



Espera, professor! Eu me lembrei, a gente falou sobre parametrização de curvas na parte 1.3, né?

Isso aí, Davi! Vamos parametrizar essa curva C usando a mesma lógica usada no exemplo

4. Temos que a curva C é a interseção de $x^2 + y^2 = -2z$ com o plano $z = x$, daí, temos que:

$$x^2 + y^2 = -2z$$

Substituindo $z = x$, temos a seguinte circunferência:

$$x^2 + y^2 = -2x$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + y^2 = 0$$

Sabendo que $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$, temos que:

$$x^2 + 2x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 - 1 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 1$$

Pelas coordenadas polares, temos que:

$$\text{sen}(t)^2 + \text{cos}(t)^2 = 1$$

Daí, sendo:

$$y = \text{cos}(t);$$

$$(x + 1) = \text{sen}(t) \Rightarrow x = \text{sen}(t) - 1;$$

$$z = x = \text{sen}(t) - 1;$$

Temos então que:

$$\vec{\sigma}(t) = (\text{sen}(t) - 1, \cos(t), \text{sen}(t) - 1)$$

Como a curva possui sentido horário, temos que:

$$0 \leq t \leq 2\pi$$



Professor, não entendi essa parte sobre sentido horário.

Pode deixar que eu te explico, Davi. Primeiro, precisamos ter em mente que há uma circunferência $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ projetada no plano XY, que ao ser parametrizada é dada por $\text{sen}(t)^2 + \cos(t)^2 = 1$, daí $C = (\text{sen}(t) - 1, \cos(t))$. Como já foi visto anteriormente, essa circunferência pode variar de $2\pi \leq t \leq 0$, ou de $0 \leq t \leq 2\pi$. Vamos analisar o comportamento da curva C em $0 \leq t \leq 2\pi$ e em $2\pi \leq t \leq 0$ usando o software Geogebra, temos:

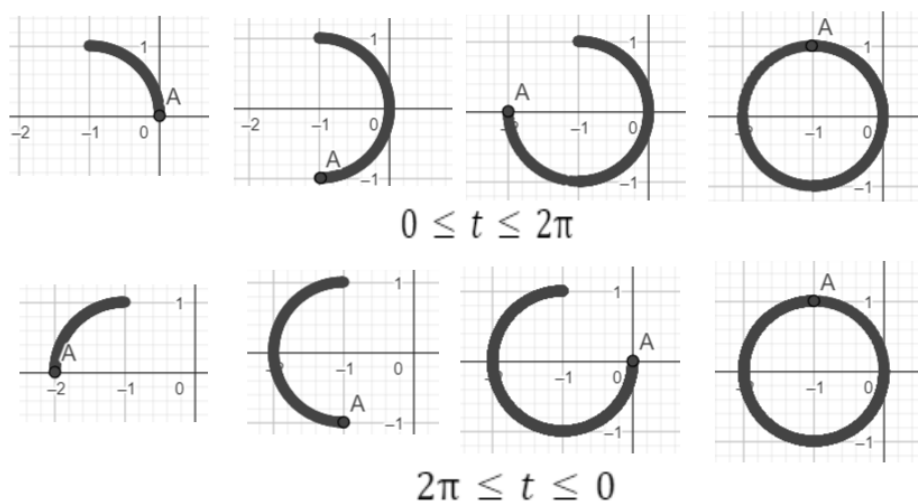


Figura 3.7 Comportamento da curva C.

Notamos então que em $0 \leq t \leq 2\pi$ a circunferência é plotada no sentido horário, enquanto em $2\pi \leq t \leq 0$ a circunferência é plotada no sentido anti-horário. Daí, concluímos que, para que a curva possua sentido horário, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Passo 3: Calcular $\vec{\sigma}'(t)$

Derivando a parametrização $\vec{\sigma}(t) = (\sin(t) - 1, \cos(t), \sin(t) - 1)$, temos:

$$\vec{\sigma}'(t) = \left(\frac{d(\sin(t)-1)}{dt}, \frac{d(\cos(t))}{dt}, \frac{d(\sin(t)-1)}{dt} \right) = (\cos(t), -\sin(t), \cos(t));$$

Passo 4: Aplicar $\vec{\sigma}'(t)$ na equação e reescrever a função $F(x,y,z)$ em função de t

Temos que:

$$\begin{aligned} & \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (2\cos(t), -2\sin(t) + 2, 0) \cdot (\cos(t), -\sin(t), \cos(t)) \, dt \end{aligned}$$

Fazendo o produto escalar, temos:

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} 2\cos^2(t) + 2\sin^2(t) - 2\sin(t) \, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 - 2\sin(t) \, dt = 2 \int_0^{2\pi} 1 - \sin(t) \, dt = 2[t + \cos(t)]_0^{2\pi} \\ &\Rightarrow \int_C \vec{F}(x, y, z) \cdot d\vec{r} = 4\pi \end{aligned}$$

4. TEOREMA DE GREEN

Que tal já começarmos esse tópico colocando a mão na massa? Calcule a seguinte integral:

$$\int_C (5y - e^{\sin(x)}) \, dx + (8x + \sqrt{4y^3 + 2}) \, dy$$

Onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 9$.

Bem, podemos até parametrizar essa curva no intuito de facilitar nossos cálculos, dessa forma vamos obter algo do tipo: $\vec{\sigma}'(t) = (3 \cos(t), 3 \sin(t))$, mas quando jogássemos isso no termo $e^{\sin(x)}$ íamos ter algo mega complicado de resolver.



Nesse caso, o jeito é desistir, né professor?

O que é isso, Davi? Isso nunca! O que vamos fazer será usar uma técnica muito útil na resolução de integrais de linha como essa, o **teorema de Green!**



Figura 4.1 George Green.

Desenvolvido pelo matemático George Green, mostrado na figura 5.1, o teorema de Green usa a seguinte equação:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Essa integral com uma circunferência no centro, trata-se de uma integral de linha de uma curva fechada, como o caso da circunferência C do nosso problema.

Sendo $F_1 = 5y - e^{\sin(x)}$ e $F_2 = 8x + \sqrt{4y^3 + 2}$, temos que:

$$\oint_C (5y - e^{\sin(x)}) dx + (8x + \sqrt{4y^3 + 2}) dy$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Pelo teorema de Green, vamos obter o resultado da integral da esquerda resolvendo a integral da direita.

Temos que:

- $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (5y - e^{\sin(x)}) = 5;$
- $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (8x + \sqrt{4y^3 + 2}) = 8;$

Daí:

$$\iint_D (8 - 5) dx dy$$

$$= \iint_D (3) dx dy$$



Mas o que é esse D?

Boa pergunta, Davi! O D é o nosso domínio de integração, é a região que fica dentro da curva C . No nosso caso ele vai ser um círculo.

Para calcular a integral pela definição, teríamos de parametrizar as três curvas, desse modo gerando três integrais. Na minha opinião, é muito trabalho, não acha?

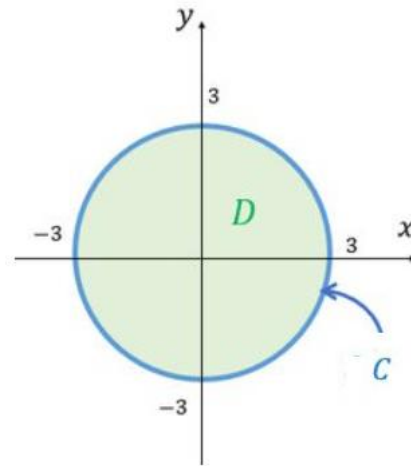


Figura 4.2 Região D contornada pela curva C.

Basicamente, a curva C é a fronteira que limita a região D . Uma observação importante é que: se a integral de linha leva em consideração a orientação da curva, o teorema de Green também deve levar. Mas como ele faz isso?

O teorema de Green requer que C seja uma **curva orientada positivamente**, em outras palavras, tenha sentido anti-horário, como mostrado na figura abaixo:

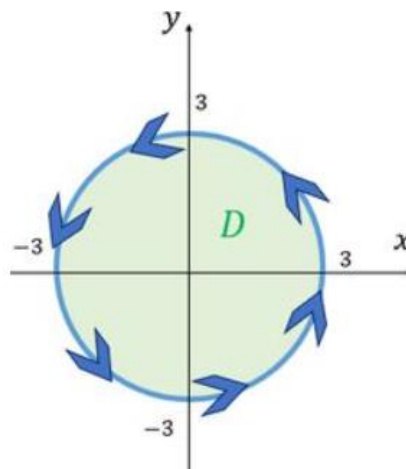


Figura 4.3 Sentido de orientação da curva C.

Sendo assim, nossa curva C deve estar no sentido anti-horário. Como o enunciado não especifica o sentido da curva, vamos definir que C está nesse sentido. Vale lembrar que, em questões como essa, sempre deve-se sinalizar o sentido da curva.

Então, nossa região D é:

$$x^2 + y^2 \leq 9$$

Aplicando o teorema de Green, temos que:

$$\oint_C (5y - e^{\sin(x)}) dx + (8x + \sqrt{4y^3 + 2}) dy$$
$$= \int \int_{x^2+y^2 \leq 9} 3 dx dy$$

Calculando a integral da direita, em coordenadas polares, temos que:

$$\int \int_{x^2+y^2 \leq 9} 3 dx dy = 3 \int_0^3 \int_0^{2\pi} r dr d\theta = 3 \cdot 2\pi \cdot \frac{(3)^2}{2} = 27\pi$$

Definição geral

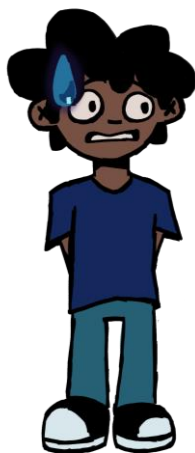
Vamos definir o teorema de Green para resumir tudo que foi feito no exemplo.

Sendo D uma região fechada no plano xy que possui uma fronteira C orientada positivamente, percorrida apenas uma vez, pelo teorema de Green, temos que:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

Onde $\vec{F}(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ é um campo vetorial que possui derivadas de primeira ordem contínuas em D . Além disso, $\vec{F}(x, y)$ precisa estar definido em toda região D .

E se a curva C não tiver sentido positivo?



Professor, eu tava aqui pensando... E se a curva C não estiver no sentido positivo?

Essa é uma ótima pergunta, para respondê-la faremos outro exercício. Calcule:

$$\int_C (3x^2 + y^2) dx + (5x^2 + 4y^2) dy$$

Onde C é a fronteira da região entre as curvas $x = 0$, $y = x^2$ e $y = 1$, percorrida no sentido horário.

Vamos começar esboçando a região descrita no enunciado, no sentido que ele nos fala.

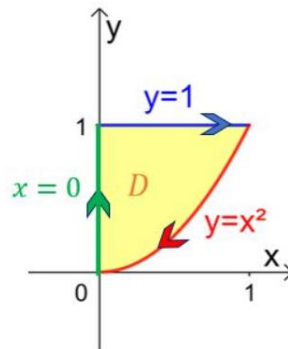


Figura 4.4 Região D limitada pelas curvas $x = 0$, $y = x^2$ e $y = 1$.

Para calcular a integral pela definição, teríamos de parametrizar as três curvas, desse modo gerando três integrais. Na minha opinião, é muito trabalho, não acha?



Pois pode parar de pensar, tem sim um jeito mais fácil, basta usarmos o teorema de Green. Antes que você me pergunte “Mas professor, e o sentido da curva C ? ele não é positivo!”, deixa eu terminar de explicar.

A questão aqui é Green vai nos dá o valor da integral no sentido inverso ao que a gente quer (C no sentido anti-horário), logo, para acharmos o valor da integral no sentido que desejamos (horário) basta multiplicar o resultado final por -1 .

Assim, temos:

$$\oint_C (3x^2 + y^2) dx + (5x^2 + 4y^2) dy$$

$$= - \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

Sendo $F_1 = 3x^2 + y^2$ e $F_2 = 5x^2 + 4y^2$, temos que:

- $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + y^2) = 2y;$
- $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (5x^2 + 4y^2) = 10x;$

Além disso, analisando a região D , temos que:

$$0 \leq x \leq 1$$

$$x^2 \leq y \leq 1$$

Daí:

$$\begin{aligned} - \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy &= - \int_0^1 \int_{x^2}^1 10x - 2y dy dx \\ &= - \int_0^1 [10xy - y^2]_{x^2}^1 dx = - \int_0^1 [10x(1 - x^2) - (1 - x^4)] dx \\ &= - \int_0^1 [10x(1 - x^2) - (1 - x^4)] dx = \int_0^1 (-x^4 + 10x^3 - 10x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{5x^4}{2} - 5x^2 + x \right]_0^1 = \frac{-1}{5} + \frac{5}{2} - 5 + 1 = -\frac{17}{10} \end{aligned}$$

Temos então que:

$$\oint_C (3x^2 + y^2) dx + (5x^2 + 4y^2) dy = -\frac{17}{10}$$

Resumo passo a passo do teorema de Green

Passo 1: Montar o problema verificando as condições de aplicação do teorema:

- C é uma curva fechada e orientada positivamente;
- $\vec{F}$ estar definido na região D ;

Passo 2: Achar os extremos de integração da integral dupla.

Passo 3: Calcular $\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$.

Passo 4: Montar a integral e calcular.

5. INTEGRAIS DE SUPERFÍCIE

Antes de começarmos a estudar as integrais de Superfície, precisamos lembrar do que são superfícies. Uma superfície pode ser definida como um objeto no espaço, assim é natural pensarmos que três variáveis são necessárias para descrevê-la.

Por exemplo, temos a equação $z = 1 - x - y$. Davi, olhando a figura abaixo, você concorda que se trata de uma superfície?

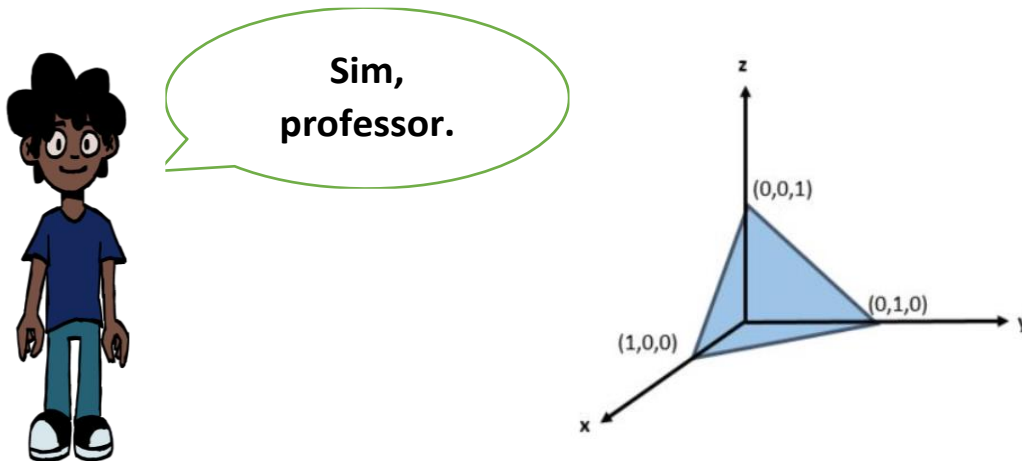


Figura 5.1 Superfície obtida a partir da equação $z = 1 - x - y$.

Sabendo o que é uma superfície, e tendo fresco na memória os conceitos de parametrização vistos anteriormente, podemos passar para o cálculo de integrais de superfície.

5.1 Integrais De Superfície - Caso Escalar

A integral de superfície se assemelha muito ao cálculo de áreas de superfície. Não lembra como é o cálculo de áreas de superfície? Não se preocupe, vamos revisar isso.

A área de uma superfície parametrizada por $\varphi(u, v)$, onde $(u, v) \in D$, pode ser calculada por:

$$A(S) = \iint_D \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv$$

Que a mesma coisa que:

$$A(S) = \iint_D |\vec{N}| \, du dv$$

Ou seja, a integral dupla do módulo do vetor normal à superfície no domínio da sua parametrização.



Oi????
É difícil assim? Eu não
entendi foi nada, Professor!

Fica tranquilo Davi, pode deixar que eu explico melhor!

Área de superfície

Vamos lá, imagine que dividimos o domínio de superfície regular em vários retângulos pequeninhos (sub-retângulos) R_{ij} . Para cada retângulo pequenininho, teremos áreas pequeninhas (sub-áreas) correspondentes na superfície, S_{ij} .

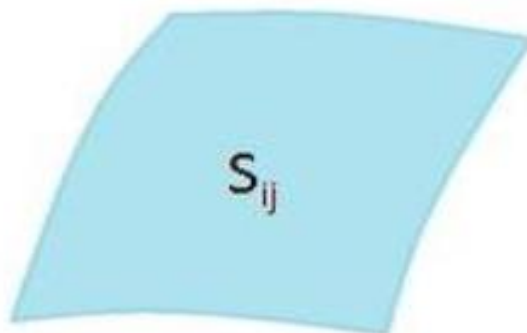


Figura 5.2 Sub-área S_{ij} .

Agora imagine que (u_i, v_j) é o vértice que fica no canto inferior esquerdo do pedacinho de área. Pela figura abaixo, vemos que os lados desse pedaço de área que partem do ponto (u_i, v_j) podem ser aproximados pelos seguintes vetores:

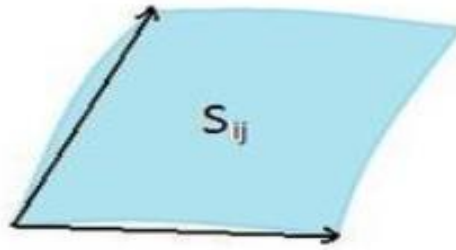


Figura 5.3 Vetores partindo do ponto (u_i, v_j) no vértice que fica no canto inferior esquerdo da sub-área S_{ij} .

Por sua vez, esses vetores podem ser aproximados por vetores tangentes à superfície no ponto escolhido, dados por $\Delta u \mathbf{r}_u$ e $\Delta v \mathbf{r}_v$, representados abaixo.

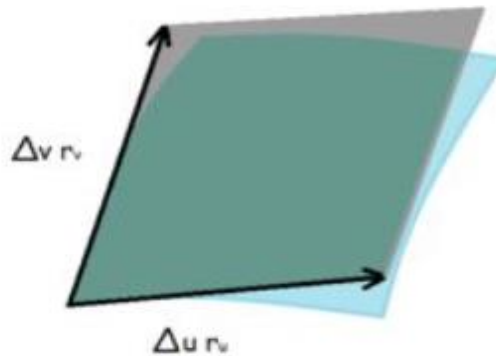


Figura 5.4 Vetores tangentes à superfície no ponto escolhido, $\Delta u \mathbf{r}_u$ e $\Delta v \mathbf{r}_v$.

O objetivo é aproximar a área azul, da superfície, com a área cinza, formada pelos vetores. Temos que o módulo do produto vetorial entre dois vetores é igual a área entre eles. Assim, podemos aproximar S_{ij} por:

$$|\Delta u \mathbf{r}_u \times \Delta v \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

Mas S_{ij} é só um pedacinho da área da superfície toda, nesse caso, vamos nos aproximar da área da superfície toda, S , por:

$$S \approx \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u \Delta v$$

A equação acima trata-se de uma aproximação, porém, como já feito nas integrais de linha, se tendermos o número de divisões m e n ao infinito, temos:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v = \iint_D \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv = A(S)$$

Assim, essa integral nos dá a área da superfície parametrizada por φ .

Agora, vamos resolver uma questão para fixarmos esse assunto.

Exemplo 23: Determine a área da esfera de raio a .

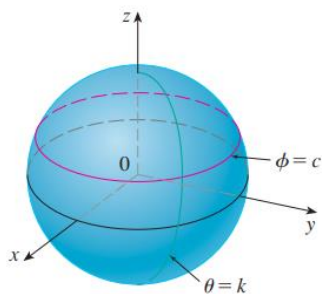


Figura 5.5 esfera de raio a .

Solução:

A equação de uma esfera de raio a é:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Nesta questão, usaremos coordenadas esféricas, onde temos que:

$$x = a \sin \phi \cos \theta, y = a \sin \phi \sin \theta \text{ e } z = a \cos \phi$$

Onde:

$$0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Daí, temos que:

$$r(\phi, \theta) = (a \sin \phi \cos \theta, a \sin \phi \sin \theta, a \cos \phi)$$

Fazendo o produto vetorial:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_f \times \mathbf{r}_u &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a \cos \phi \cos \theta & a \cos \phi \sin \theta & -a \sin \phi \\ -a \sin \phi \sin \theta & a \sin \phi \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= a^2 \sin^2 \phi \cos \theta \mathbf{i} + a^2 \sin^2 \phi \sin \theta \mathbf{j} + a^2 \sin \phi \cos \phi \mathbf{k}\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^4 \sin^4 \phi \sin^2 \theta + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4 \phi + a^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi} = a^2 \sqrt{\sin^2 \phi} = a^2 \sin \phi\end{aligned}$$

Davi, tenho uma pergunta para você. Você sabe qual a área de esfera de raio r ?



Essa eu sei!!!
A área de uma
esfera de raio r é:
 $4\pi r^2$

Isso mesmo, Davi! Ou seja, para a gente verificar nossa resposta, como na questão é pedida a área de uma esfera de raio a , a resposta que devemos encontrar é $4\pi a^2$.

Montando a integral, temos que:

$$A(S) = \iint_D |\mathbf{r}_\phi \times \mathbf{r}_\theta| dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi a^2 \sin \phi d\theta d\phi = a^2 \cdot 2\pi \cdot 2 = 4\pi a^2$$

Exemplo 24: Aryane é uma ótima confeitadeira, sua tia Maria José adora os bolos feitos por ela. Certo dia, Aryane fez um bolo de formato cilíndrico, de 30 cm de diâmetro e 9 cm de altura, com um furo de 8 cm de diâmetro no centro, para sua tia. A confeitadeira decidiu cobrir $\frac{3}{4}$ do bolo de sua tia com cobertura de chocolate, para isso ela comprou uma caixa de leite condensado.

Sabendo que cada caixa de leite condensado cobre uma área de 450 cm^2 , Aryane precisou comprar mais leite condensado?

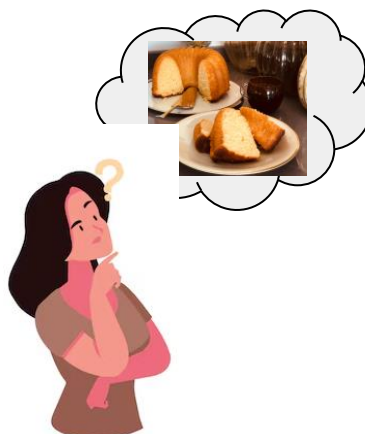


Figura 5.6 Figura ilustrativa do exemplo 24.

Solução: Analisando a questão, por se tratar de um bolo de formato cilíndrico, usaremos as coordenadas cilíndricas. Temos que a parte que será coberta por chocolate do bolo é dada por:

$$x = a \cos(\theta)$$

$$y = a \sin(\theta)$$

$$z = z$$

Como apenas $\frac{3}{4}$ do bolo será coberto, temos que:

$$4 \leq a \leq 15$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$$

$$z = 9$$

Daí:

$$r(a, \theta) = (a \cos(\theta), a \sin(\theta), 9)$$

Temos que:

$$r_a = \frac{\partial r}{\partial a} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$$

$$r_\theta = \frac{\partial r}{\partial \theta} = (-a \sin(\theta), a \cos(\theta), 0)$$

Fazendo o módulo do produto vetorial, temos que:

$$|r_a \times r_\theta| = a$$

Daí:

$$A(S) = \iint_D |r_u \times r_v| dS = \int_0^{2\pi} \int_4^{15} a d\theta da = 2\pi \cdot \left[\frac{15^2}{2} - \frac{4^2}{2} \right] = 209\pi \simeq 656,24 \text{ cm}^2$$

Como a área $A(S)$ que será coberta do bolo é maior que 450 cm^2 , Aryane deverá comprar pelo menos mais uma caixa de leite condensado para cobrir o bolo da sua tia.

Acabamos de rever como calcular a área de uma superfície, agora vamos imaginar que a superfície S tenha a seguinte equação vetorial:

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \text{ onde } (u, v) \in D$$

Como feito anteriormente, vamos dividir o domínio D em pequenos retângulos R_{ij} com dimensões Δu e Δv . Então, a superfície S também é dividida em pequenos retângulos correspondentes S_{ij} , como mostrado abaixo.

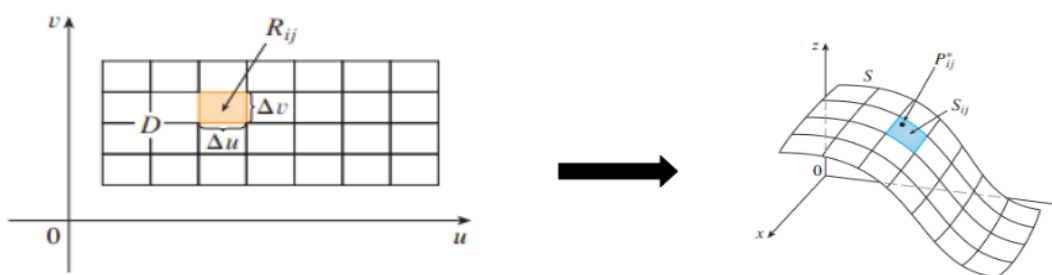


Figura 5.7 Superfície S sendo dividida em sub-áreas.

Calculando uma função f em um ponto P_{ij} de cada retalho, e multiplicando pela área ΔS_{ij} do retalho, formamos a soma de Riemann:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta S_{ij}$$

A seguir, tomamos o limite quando o número de pequenos retângulos aumenta e definimos a **integral de superfície de f na superfície S** como:

$$\int \int_S f(x, y, z) dS = \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(P_{ij}) \Delta S_{ij}$$

Como já visto na revisão sobre área de superfícies:

$$\Delta S_{ij} = |\Delta u r_u \times \Delta v r_v| = |r_u \times r_v| \Delta u \Delta v$$

Assim:

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(r(u, v)) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv$$

Vamos fixar isso com um exemplo.

Exemplo 25: Calcule a integral de superfície $\iint_S x^2 dS$, onde S é a esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução:

Assim como no exemplo 13, usaremos coordenadas esféricas, daí:

$$x = \operatorname{sen} \phi \cos \theta, y = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \text{ e } z = \cos \phi$$

Onde:

$$0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

No exemplo 13, $\|r_\phi \times r_\theta\| = a^2 \operatorname{sen} \phi$. No exemplo 14, sendo $a = 1$, temos $\|r_\phi \times r_\theta\| = \operatorname{sen} \phi$. Montando a integral, temos que:

$$\iint_S x^2 dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen} \phi \cos \theta)^2 \cdot \operatorname{sen} \phi d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\operatorname{sen} \phi)^3 (\cos \theta)^2 d\theta d\phi$$

Se $(\cos \theta)^2 = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$ e $(\operatorname{sen} \phi)^3 = \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi$, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 dS &= \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi \cos^2 \phi d\phi \int_0^\pi \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\ &= \left[-\cos \phi + \frac{\cos^3 \phi}{3} \right]_0^\pi \cdot \left[\frac{\theta + \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2}}{2} \right]_0^{2\pi} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$



Nossa, professor, achei bem tranquilo. Mas será que tem como fazer um resumo de como resolver integrais de superfície?

Posso sim, Davi, nem se preocupe! Vamos fazer um resumo sobre como resolver esse tipo de integral.

Passo a passo de como resolver integrais de superfície - Caso escalar

Passo 1: Analisar a questão e parametrizar a superfície.

Passo 2: Achar os extremos de integração da integral dupla.

Passo 3: Calcular $\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|$.

Passo 4: Montar a integral e calcular.

5.2 Integrais De Superfície - Caso Vetorial

Antes de definirmos as integrais de superfície de campos vetoriais, precisamos interpretar superfícies de forma vetorial. Seja S uma superfície regular, vamos definir que em cada ponto desta superfície há vetores perpendiculares à superfície, gerando um campo vetorial.

Como já visto anteriormente, o vetor normal à superfície parametrizada $\varphi(u, v)$ é dado por $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, então, para obtermos um campo de vetores normais unitários, basta que façamos da seguinte forma:

$$n(u, v) = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\|}$$

Porém, se a gente pensar direitinho, é fácil notar que, para cada ponto há dois vetores normais à superfície, um oposto ao outro. Nesse caso, temos dois vetores normais $n_1(u, v)$ e $n_2(u, v)$, dados por:

$$n_1(u, v) = -n_2(u, v)$$

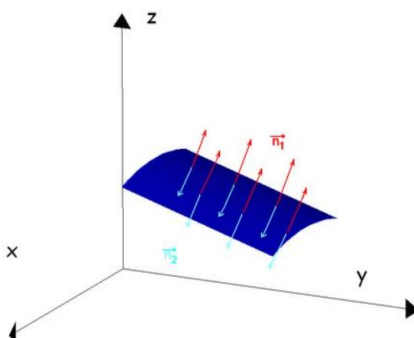


Figura 5.8 Vetores normais à superfície.

Para obtermos uma superfície orientada, basta fixarmos sobre S um desses campos vetoriais unitários.

Então, sendo $\vec{F}$ um campo contínuo, definido sobre a superfície S , definimos que a integral de superfície de $\vec{F}$ sobre S da seguinte forma:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Agora basta calcularmos esta integral. Sabemos que:

$$dS = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv, \text{ daí:}$$

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right|} \cdot \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| du dv \\ &= \iint_D \vec{F}(\varphi(u, v)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v} du dv \end{aligned}$$

Nesse caso, não precisamos calcular a normal unitária. A normal $\vec{n} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ já basta para calcularmos a integral do campo $\vec{F}$ sobre S .

Fluxo- Uma interpretação física

Vamos voltar a superfície S , agora, imaginando um fluido escoando através dela. Supondo que um campo vetorial $\vec{F}$ fornece a velocidade de escoamento do fluido em cada ponto. Queremos calcular o fluxo ϕ através da superfície S .



Beleza professor, mas o que é esse tal fluxo? Tenho a impressão de já ter ouvido sobre ele.

Sim, Davi! Você já deve ter ouvido sobre o fluxo em suas aulas de física. O termo "fluxo" refere-se a uma quantidade que mede a "passagem" de um campo vetorial através de uma superfície. É uma noção fundamental em várias áreas da física e da engenharia, como a dinâmica de fluidos, eletromagnetismo e outras disciplinas.

Se analisarmos um ponto qualquer, o vetor $\vec{F}$ tem um componente na perpendicular e um paralelo à superfície. Porém, partindo do conceito do fluxo, a única componente que nos interessa é a perpendicular, que atravessa a superfície.

Assim, o volume que passa por S por unidade de tempo é dado por:

$$\phi = \vec{F} \cdot \vec{n} \text{ área}(S)$$

Assim como fizemos anteriormente, podemos dividir a superfície S em pequenos retângulos S_{ij} e obtermos a soma de Riemann. Tomando o limite desta soma ao infinito, obtemos a integral de superfície.

$$\phi = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \vec{F}(\vec{P}_i) \cdot \vec{n}(\vec{P}_i) \Delta S_{ij} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

Agora, vamos aos exemplos:

Exemplo 26: Calcule o fluxo $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, sendo $\vec{F} = (x, y, x^2z)$ e S dada por $x^2 + y^2 = 4$, limitada pelos planos $z = 0$ e $z = 4$ e orientada com a normal para fora da superfície.

Solução:

Ao esboçarmos a superfície S , notamos se tratar de uma casca cilíndrica de raio 2 e 4 de altura, neste caso, usaremos coordenadas cilíndricas. Temos que:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos(\theta), y = 2 \sin(\theta) \text{ e } z = z \\ \Rightarrow \varphi(\theta, z) &= (2 \cos(\theta), 2 \sin(\theta), z) \end{aligned}$$

Onde:

$$\begin{aligned} 0 &\leq z \leq 4 \\ 0 &\leq \theta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Temos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-2\sin(\theta), 2\cos(\theta), 0) \text{ e } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = (0, 0, 1)$$

Dáí:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \times \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ -2\sin(\theta) & 2\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 0)$$

Montando a equação:

$$\begin{aligned} & \int_0^4 \int_0^{2\pi} (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 4z\cos^2(\theta)) \cdot (2\cos(\theta), 2\sin(\theta), 0) \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} 4\cos^2(\theta) + 4\sin^2(\theta) + 0 \, dz \, d\theta = \int_0^4 \int_0^{2\pi} 4 \, dz \, d\theta \\ &= 4 \cdot 4 \cdot 2\pi = 32\pi \end{aligned}$$

Exemplo 27: Determine o fluxo do campo vetorial $\vec{F}(x, y, z) = (z, y, x)$ através da esfera unitária $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Solução:

Vamos começar esboçando a esfera:

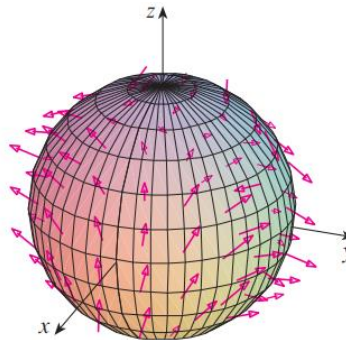


Figura 6.9 Figura ilustrativa do exemplo 27.

Utilizando coordenadas esféricas temos que:

$$\begin{aligned} x &= \sin(\phi) \cos(\theta), \quad y = \sin(\phi) \sin(\theta) \text{ e } z = \cos(\phi) \\ \Rightarrow \varphi(\phi, \theta) &= (\sin(\phi) \cos(\theta), \sin(\phi) \sin(\theta), \cos(\phi)) \end{aligned}$$

Onde:

$$0 \leq \phi \leq \pi \text{ e } 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Daí, temos que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = (\cos(\phi) \cos(\theta), \cos(\phi) \sin(\theta), -\sin(\phi)) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (-\sin(\phi) \sin(\theta), \sin(\phi) \cos(\theta), 0)$$

Temos então que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = (\sin(\phi)^2 \cos(\theta), \sin(\phi)^2 \sin(\theta), \sin(\phi) \cos(\phi))$$

Temos que:

$$\vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \times \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) = (\cos(\phi) \sin(\phi)^2 \cos(\theta) + \sin(\phi)^3 \sin(\theta)^2 + \sin(\phi)^2 \cos(\phi) \cos(\theta))$$

Montando a equação, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos(\phi) \sin(\phi)^2 \cos(\theta) + \sin(\phi)^3 \sin(\theta)^2 + \sin(\phi)^2 \cos(\phi) \cos(\theta) \, d\theta d\phi \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2(\cos(\phi) \sin(\phi)^2 \cos(\theta) + \sin(\phi)^3 \sin(\theta)^2) \, d\theta d\phi \\ &= 2 \int_0^\pi \cos(\phi) \sin(\phi)^2 \, d\phi \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \, d\theta + \int_0^\pi \sin(\phi)^3 \, d\phi \int_0^{2\pi} \sin(\theta)^2 \, d\theta \\ &= 0 + \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

Concluimos então que o passo a passo da resolução de uma integral de superfície do caso vetorial é muito semelhante com o caso escalar, com apenas algumas diferenças.

Passo a passo de como resolver integrais de superfície - Caso vetorial

Passo 1: Analisar a questão e parametrizar a superfície.

Passo 2: Achar os extremos de integração da integral dupla.

Passo 3: Calcular $\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}$, lembrando de observar a orientação de $\vec{n}$.

Passo 4: Montar a integral e calcular.

6. TEOREMA DE STOKES

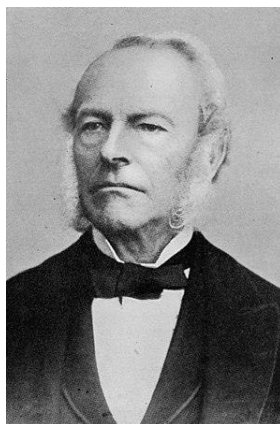


Figura 6.1 George Gabriel Stokes.

O **Teorema de Stokes**, desenvolvido pelo matemático George Gabriel Stokes(1819–1903), mostrado na figura 7.1, é como se fosse uma versão em terceira dimensão do Teorema de Green. Enquanto o Teorema de Green relaciona uma integral dupla sobre uma região plana D com uma integral de linha em torno de sua curva limite plana, o Teorema de Stokes relaciona uma integral de superfície sobre uma superfície S com uma integral em torno da curva da fronteira S (que é uma curva no espaço). Em resumo, enquanto o Teorema de Green é usado para resolver integrais de linha com curvas no plano, o Teorema de Stokes é usado para resolver integrais de linha no espaço.

Logo abaixo, há uma figura orientada pelo vetor normal unitário $\vec{n}$. Deste modo, a orientação de S induz a **orientação positiva da curva fronteira** C mostrada na figura abaixo.

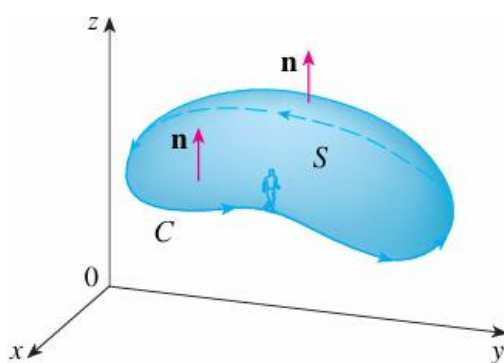


Figura 6.2 Superfície S limitada por uma curva C .



Professor, como eu vou saber a orientação dessa curva?

A orientação da curva C depende da orientação do vetor normal unitário $\vec{n}$. Para sabermos o sentido da curva, usaremos a **regra da mão direita**.

Com sua mão direita, imagine que seu polegar aponta na direção do vetor normal, e que as pontas dos outros dedos indicam a orientação da curva C . Se o vetor normal estiver para cima, a curva estará no sentido positivo se “girar” no sentido anti-horário, já se o vetor normal estiver para baixo, então a curva terá sentido positivo de “girar” no sentido horário.



Figura 6.3 Regra da mão direita.

Definição do Teorema de Stokes

Sendo S uma superfície orientada positivamente, se $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ é um campo vetorial definido em todo o domínio de integração e se a fronteira de S , chamada de C , está orientada no sentido positivo, pelo Teorema de Stokes, temos que:

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Sendo: $\vec{ds} = \vec{n} ds$.

Presta atenção aqui nesses detalhes, eles são as hipóteses do teorema:

1. A curva C da integral de linha é a fronteira da superfície S , ou seja, uma curva fechada.
2. O campo $\vec{F}$ é definido em todos os pontos do domínio, ou seja, não há singularidades. Singularidades são aqueles “bugs”, tipo divisões por 0, raiz quadrada de números negativos e etc.
3. A superfície deve ser orientada positivamente.



Até aqui eu entendi!

Pode ficar calmo, Davi, o teorema vai ser útil quando tivermos uma integral de linha no R^3 e não conseguirmos resolver de maneira direta. Neste caso, depois de confirmarmos que as três hipóteses acima são verdadeiras, poderemos aplicar o Teorema de Stokes. Vamos ao exemplo:

Exemplo 28: Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (-y^2, x, z^2)$ e C é a curva da interseção do plano $y + z = 2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 1$. (Oriente C no sentido anti-horário quando observado de cima).

Solução:

Ao esboçarmos o cilindro e sua interseção com o plano, como mostrado na figura abaixo, notamos que a curva fechada C trata-se de uma elipse.

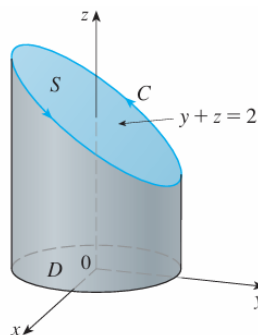


Figura 6.4 Esboço gráfico do cilindro e sua interseção com o plano.

Apesar de $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ poder ser calculada de maneira direta, é bem mais simples usar o Teorema de Stokes, dado por:

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{ds} = \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr}$$

Para começar, quem é esse cara dentro da integral dupla?

O termo $\text{rot}(\vec{F})$ trata-se do rotacional do campo vetorial $\vec{F}$, dado por:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Sendo:

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Daí:

$$\text{rot } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y^2 & x & z^2 \end{vmatrix} = (1 + 2y) \mathbf{k}$$

Apesar de haverem infinitas superfícies com fronteira C , a melhor escolha é a região elíptica S no plano $y + z = 2$. Se orientarmos S para cima, por consequência, induzimos C ao sentido positivo. Desse modo, admitindo que a equação de S é $z = 2 - y$, e sabendo que a projeção D que S forma no plano xy é $x^2 + y^2 \leq 1$, por coordenadas cilíndricas, temos que:

$$x = r \cos(\theta), y = r \sin(\theta) \text{ e } z = z$$

Onde:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$0 \leq r \leq 1$$

Daí:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} &= \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{ds} = \iint_D (1 + 2y) \cdot \vec{dA} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 + 2r \sin(\theta)) r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{2r^3}{3} \sin(\theta) \right]_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{2}{3} \cos(\theta) \right]_0^{2\pi} d\theta = \pi \end{aligned}$$

Exemplo 29: Calcule $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{ds}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, yz, xy)$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy .

Solução:

Ao esboçarmos o cilindro e a esfera, como mostrado na figura abaixo, é possível destacar a superfície S . A curva C , por sua vez, pode ser dada pela interseção das duas figuras. Temos que:

$$x^2 + y^2 = 4 - z^2$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

O que implica em $z^2 = 3 \Rightarrow z = \sqrt{3}$. Como $z > 0$, temos que a curva C é dada pelas equações $x^2 + y^2 = 1$ e $z = \sqrt{3}$. Parametrizando a curva, temos:

$$\varphi(\theta) = (\cos(\theta), \sin(\theta), \sqrt{3})$$

Onde:

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Derivando:

$$\varphi'(\theta) = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$$

Daí:

$$\vec{F}(\varphi(\theta)) = (\sqrt{3}\cos(\theta), \sqrt{3}\sin(\theta), \cos(\theta)\sin(\theta))$$

Assim, pelo Teorema de Stokes, temos que:

$$\begin{aligned} \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{ds} &= \oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(\theta)) \varphi'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta) - \sqrt{3}\cos(\theta)\sin(\theta) d\theta \\ &= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} 0 d\theta = 0 \end{aligned}$$

7. TEOREMA DE GAUSS



Figura 7.1 Carl Friedrich Gauss.

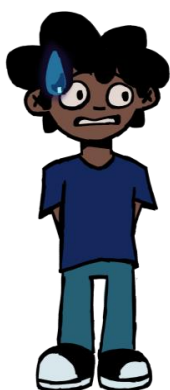
O **Teorema de Gauss**, ou **Teorema da Divergente**, desenvolvido pelo matemático Carl Friedrich Gauss (1777–1855), mostrado na figura 8.1, relaciona uma integral tripla sobre um volume W com uma integral de superfície sobre a sua fronteira, chamada de S . Enquanto os Teoremas de Green e Stokes relacionam integrais de linha com integrais duplas, o Teorema de Gauss relaciona uma integral de superfície complicada com uma integral tripla mais simples.

Sendo $\vec{F}(x, y, z) = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ um campo vetorial com derivadas parciais no R^3 e contínuo em W , o Teorema de Gauss é dado por:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} = \iiint_W \text{div}(\vec{F}) \cdot dV$$

Sendo:

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} \right)$$



Essas definições me deixam totalmente perdido! Tem como me dar uma ajuda professor?

Claro que sim! Pode deixar comigo! Assim como no Teorema de Stokes, vamos começar apontando as hipóteses do Teorema de Gauss.

Presta atenção aqui nas hipóteses do teorema:

1. A superfície S da integral de superfície é a fronteira do sólido W , ou seja, uma superfície fechada.
2. O campo $\vec{F}$ é definido em todos os pontos do domínio, ou seja, não há singularidades.
3. A superfície deve ser orientada positivamente, para isso, a normal deve apontar para fora.



Ahh, professor...
As hipóteses do Teorema de Gauss são quase iguais as do Teorema de Stokes. Né isso?

Sim, Davi! Você tem razão, os dois teoremas são muito parecidos nesse sentido. Agora, que tal aplicarmos esses conhecimentos na prática?

Exemplo 30: Calcule $\int \int_S \vec{F} \cdot \vec{ds}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $z = -1$, com a normal apontada para fora da superfície.

Solução:

Inicialmente, fazer um esboço dessa região, como mostra a figura abaixo.

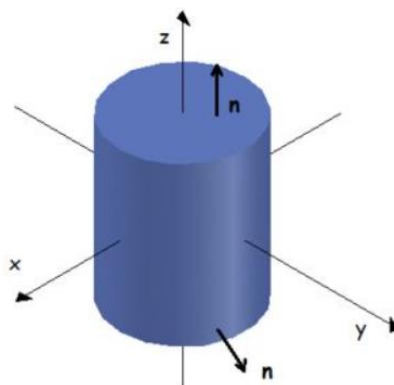


Figura 7.2 Esboço gráfico da região indicada pelo exemplo 30.

A superfície S que limita o sólido é fechada, e possui orientação positiva. Além disso, o campo $\vec{F}(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$ está definido em todo o domínio, logo, podemos aplicar o Teorema de Gauss. Temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \nabla \cdot \vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) \\ &= y^2 + x^2 + 0 = y^2 + x^2 \end{aligned}$$

O sólido W limitado pela superfície S é um cilindro dado por:

$$x^2 + y^2 \leq 1$$

Parametrizando esse cilindro, em coordenadas cilíndricas, temos:

$$x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta) \text{ e } z = z$$

Onde:

$$0 \leq r \leq 1$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$-1 \leq z \leq 1$$

Montando a equação, temos que:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \sin^2(\theta) + r^2 \cos^2(\theta)) \cdot r \, dr \, dz \, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} r^3 \, dr \, dz \, d\theta = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 = \pi \end{aligned}$$

Exemplo 31: Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds}$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy))$ e S é a superfície da região E delimitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ e os planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Solução:

Esboçando a região, obtivemos a figura mostrada abaixo.

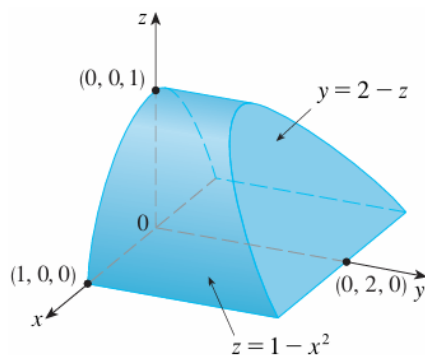


Figura 7.3 Esboço gráfico da região indicada pelo exemplo 31.

Calculando a divergente do campo, temos:

$$\text{div } \vec{F} = \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \right) = y + 2y + 0 = 3y$$

Temos que os limites de integração da região E são:

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 2 - z$$

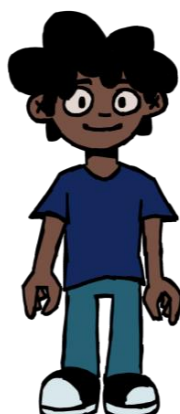
$$0 \leq z \leq 1 - x^2$$

Daí, aplicando o Teorema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{F} \cdot \vec{ds} &= \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \int_0^{2-z} 3y \, dy \, dx \, dz = 3 \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-z} dz \, dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \int_0^{1-x^2} (4 - 4z + z^2) dz \, dx = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \left[4z - 2z^2 + \frac{z^3}{3} \right]_0^{1-x^2} dx \\ &= \frac{3}{2} \int_{-1}^1 \frac{-x^6 - 3x^4 - 3x^2 + 7}{3} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 -x^6 - 3x^4 - 3x^2 + 7 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{368}{35} = \frac{184}{35} \end{aligned}$$

08. APLICAÇÕES DO CÁLCULO VETORIAL NA ENGENHARIA ELÉTRICA

Nas engenharias, o uso adequado de ferramentas é inestimável para o sucesso nos objetivos que se deseja alcançar. Entre inúmeros tipos, as ferramentas matemáticas são particularmente presentes nas construções de modelos para a avaliação de situações, muitas vezes, complexas. Ao representar situações reais e abstratas do mundo real por meio de modelos matemáticos, podemos compreender melhor as situações que nos rodeiam ao associá-las com coisas mais simples! Fantástico, não é Davi?



Sim, professor! A própria engenharia elétrica se baseia nesses modelos matemáticos para a solução de problemas, não é?

Exatamente, Davi! A partir deste capítulo, vamos nos concentrar na utilização das ferramentas matemáticas do cálculo vetorial– as quais são muito úteis e precisas para diferentes ocasiões em que lidamos com representações vetoriais dentro das engenharias e queremos relacioná-los a depender das suas direções e sentidos. Ao demonstrar suas aplicações e porque as utilizamos, queremos exibir a motivação por trás do estudo desta ferramenta tão versátil e genial!

Porém, é necessário primeiro realizar um apanhado de alguns conceitos básicos da eletrostática tratados nas disciplinas de Eletromagnetismo, Conversão de Energia e Máquinas Elétricas. Com esses conhecimentos devidamente alocados, pode-se compreender melhor o uso da matemática no estudo da engenharia e como ela se aplica. Não é mesmo, Davi



Mas calma aí, professor! Eu nem sequer cheguei nessas disciplinas ainda! Como eu vou entender o que vai ser passado?!

Não se preocupe quanto a isso. Todo o conteúdo tratado aqui será explicado direitinho, de forma que apenas seu conhecimento em Cálculo será suficiente para entender os assuntos. No entanto, se encontrar alguma dificuldade no entendimento de algum conceito, é sempre bom realizar um estudo sobre o tema de forma independente e pedir auxílio aos professores e colegas.

Nosso foco aqui é mostrar o porquê do estudo matemático é tão essencial para a Engenharia Elétrica! Então, vamos lá?

8.1 Conceitos básicos da Eletrostática

Dentro do contexto físico do eletromagnetismo, que estuda as relações, causas e consequências dos fenômenos elétricos e magnéticos, torna-se essencial o entendimento do comportamento dos campos elétricos e magnéticos. Estas regiões de influência física, dentre muitas coisas, são responsáveis pela perturbação de sistemas estáveis, estáticos ou dinâmicos, e pela realocação dos elementos que o compõem para um novo estado regido por determinadas características. As características mais importantes a serem discutidas são a intensidade, direção e sentido da influência desses campos eletromagnéticos; os dois últimos definidos por convenção científica. É fato que os humanos inventam os seus próprios problemas.

Tratando da área da eletrostática, que estuda os casos em que cargas elétricas estão em repouso em relação ao referencial espacial do observador (ponto importantíssimo, uma vez que o referencial tomado pode facilmente levar um problema eletrostático a um eletrodinâmico), muitas das influências físicas podem ser representadas por relações matemáticas. Quando há uma região no espaço com acúmulo de cargas elétricas de mesma polaridade, dizemos que ela está eletricamente carregada.

Achou complicado? Nesse caso, pense nisso como uma piscina de bolinhas onde a sua maioria é da cor vermelha, onde cada bolinha representa uma carga negativa. Ao se referir à piscina como “piscina vermelha”, você está usando a característica de ela estar cheia de bolinhas vermelhas para a definir, por metonímia. Do mesmo modo, chamar uma região de “carregada negativamente” usa a característica de ela estar com excesso de elétrons.

Quando isto ocorre, surge um campo vetorial de influência física em torno desta região carregada, partido dela, a qual dá-se o nome de **campo eletrostático**. Este campo de influência tem a característica peculiar de causar um deslocamento espacial das cargas elétricas em sua proximidade. Uma vez que a natureza tende a manter ou criar um equilíbrio nas suas forças, um

acúmulo de cargas positivas há de atrair as cargas negativas e vice-versa, de modo a nulificar o acúmulo de cargas idênticas. De forma contrária, um acúmulo de cargas idênticas tende a repelir demais cargas de mesma polaridade, evitando assim um crescimento natural deste acúmulo.

Este conceito acerca do movimento devido à interação de cargas elétricas é definido como força elétrica ($\mathbf{F_e}$). Pela Lei de Coulomb tratando de cargas pontuais, a força elétrica que atua entre elas é proporcional ao produto da intensidade das cargas que interagem, e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa. Por ser apenas proporcional, é múltiplo pelo fator $1/4\pi\epsilon_0$, que surge da conversão do sistema antigo de unidades CGS (centímetro-grama-segundo) para o SI. A conversão transforma a unidade de força dina (g.cm/s^2) em Newtons (kg.m/s^2) ao tratar das diferentes unidades de carga elétrica utilizadas. Assim, atuando na direção entre as cargas:

$$F_e = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dessa forma, o campo elétrico $\vec{E}$ originado de uma carga q_1 é uma grandeza física vetorial que diz a quantidade de força elétrica produzida pela interação entre duas cargas q_1 e q_2 , pela quantidade de carga que q_2 possui [N/C, Newtons por Coulomb] e pode ser algebricamente representado como:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F_e}}{q} \quad (8.1)$$

A influência deste campo elétrico pode ser representada visualmente como linhas de campo, que nada mais são do que setas que indicam a intensidade, direção e sentido do campo elétrico; linhas divergentes convencionadas para cargas positivas e linhas convergentes convencionadas para cargas negativas.

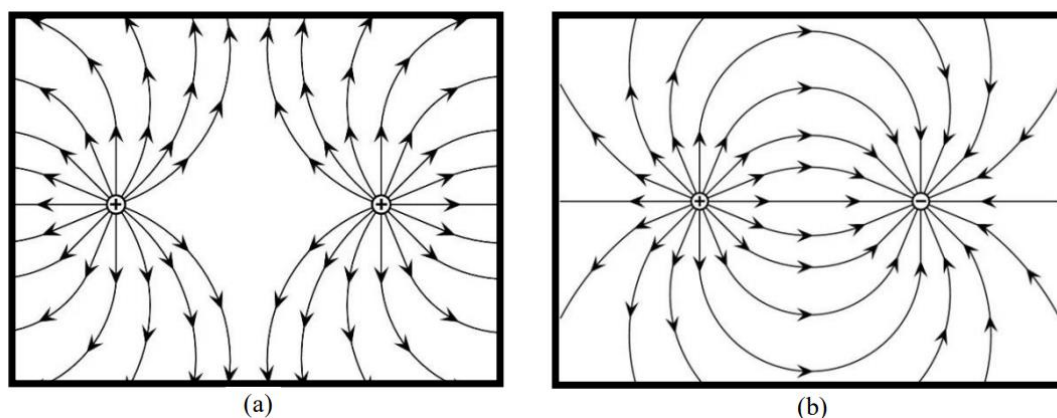


Figura 8.1 Linhas de campo da interação de cargas (a) iguais e (b) diferentes.

(Fonte: O que é campo elétrico? - Brasil Escola (uol.com.br))



Espera um pouco! Essas linhas...

**Elas possuem direção e sentido,
são vetores!!!**

Exatamente, Davi! Esses vetores, as chamadas linhas de campo, são representações gráficas usadas para saber o comportamento elétrico das cargas quando interagem com campos elétricos. Mas por que linhas? O que sua direção e sentido querem nos dizer?

A convenção do sentido dessas linhas de campo está diretamente relacionada com o comportamento de cargas imersas nesses campos e a direção do movimento sofrido por elas. Por exemplo, se uma carga positiva q_+ estiver dentro de um campo elétrico divergente, não nulo, criado por uma distribuição de cargas positivas, a força elétrica resultante fará com que esta carga q_+ se mova na mesma direção das linhas de campo e para longe do centro de distribuição de cargas. Por outro lado, se for o caso de uma carga negativa q_- no mesmo campo elétrico divergente, a força elétrica resultante fará com que ela se mova na direção contrária das linhas de campo e para perto do centro de distribuição de cargas.

Assim, as linhas de campo indicam a direção e o sentido da força sofrida por uma carga positiva quando interage com um campo elétrico.



**Nesse caso, essas linhas servem
de recurso visual para nos ajudar
a visualizar o comportamento
desses campos, né?**

Isso mesmo, Davi! Mas não apenas isso, esse recurso também é utilizado para a representação de campos vetoriais de forma mais visível para que possamos utilizar ferramentas matemáticas! Veremos isso nos tópicos seguintes.

Estas linhas de campo se estendem por todo o espaço, ficando menos intensas conforme se afastam do centro de carga pelo quadrado da distância. Esta queda de intensidade pode ser comparada com o jato espraído de uma mangueira de jardim! A sua intensidade ao se afastar por três metros seria o mesmo que se afastar por nove metros, em comparação com um campo inversamente proporcional simplesmente à distância.

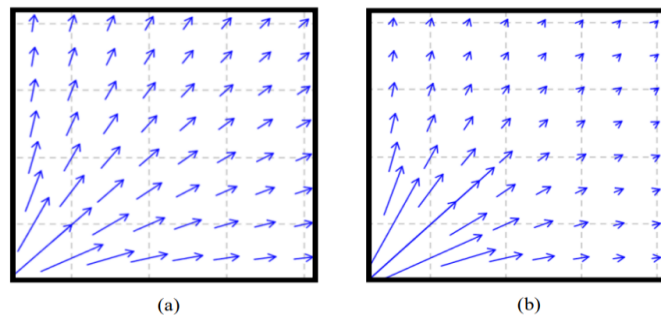


Figura 8.2 Campos vetoriais inversamente proporcional (a) à distância e (b) ao quadrado da distância.

Para cargas pontuais (de tamanho infinitesimal e, portanto, desprezível), têm intensidade inversamente proporcional ao quadrado da distância entre o ponto de observação e cada carga pertinente à situação tratada. Com base na equação 8.1, vetor campo elétrico $\vec{E}$ para uma carga pontual isolada q no vácuo é definido como:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (8.2)$$

Onde:

- q é a carga que gera o campo;
- ϵ_0 a permissividade elétrica do meio (para casos gerais, o vácuo é admitido como o meio);
- r é o módulo do vetor distância da carga ao ponto de interesse;
- $\hat{r}$ é o versor na direção radial, com origem na posição da carga;

Como já vimos no capítulo 2, em coordenadas cartesianas, podemos definir r então como:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Além disso, ainda pode-se definir um outro artifício físico e gráfico: as superfícies equipotenciais. Elas representam regiões no espaço onde, ao se deslocar tangencialmente sobre

elas, a influência elétrica sentida seria a mesma. Ou seja, estas regiões estão sob o mesmo potencial elétrico. Graficamente, estas superfícies são sempre perpendiculares às linhas de campo elétrico.

Quando, afetado por um campo elétrico não nulo, há um deslocamento espacial devido a forças elétricas, também há a mudança da região equipotencial em que se situa. Neste deslocamento, do potencial elétrico inicial V_a ao final V_b , houve então um deslocamento sobre uma diferença de potencial elétrico. Esta diferença de potencial é muito similar à diferença de potencial gravitacional e pode ser vista como análoga. Quanto maior for o seu valor, maior será a capacidade de transferir energia mecânica a um corpo. Assim, quanto maior for a diferença de potencial elétrico ou tensão elétrica ($V = \Delta V = V_a - V_b$) que existir em um campo elétrico, maior será a capacidade deste campo de realizar trabalho ao alterar a energia mecânica de cargas elétricas.

Para a maioria dos problemas da física, o referencial de potencial elétrico nulo é tomado numa distância infinita da carga ($r \rightarrow \infty$). Dessa forma, o potencial elétrico de uma carga pontual é uma grandeza escalar e é definido como proporcional à quantidade de carga e inversamente proporcional à distância da carga ao ponto de observação, podendo ser representado como:

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (8.3)$$

Com estes conhecimentos vivos na mente, podemos então prosseguir para observar como o entendimento destes conceitos é facilitado quando se compreende as aplicações do cálculo vetorial.

8.2 O fluxo magnético (Φ)

Agora que sabemos os conceitos básicos para o estudo dos campos elétricos gerados por acúmulo de cargas livres, é útil a discussão acerca de campo magnéticos para posteriores análises. Mais a frente, iremos discutir como as integrais de linha podem ser aplicadas no seu estudo e como estes interagem com outros campos de forma dinâmica para as mais diversas aplicações dentro da engenharia elétrica. Para isto, um dos pré-requisitos mais necessários é a compreensão do conceito de fluxo magnético e como este pode ser interpretado para a representação de fenômenos físicos através de ferramentas matemáticas.

De fato, é perceptível que há uma região de influência ao redor de objetos magnetizados, como ímãs, caracterizados por polo norte e sul. Pode-se, inclusive, realizar um paralelo desta

região com a observada nos objetos eletricamente carregados. Da mesma forma que há um campo elétrico para estes, também há um campo magnético para corpos magnetizados. Este campo também apresenta características similares ao ser observado com atenção. Ele exerce forças de atração e repulsão, sua intensidade pode ser representada por linhas de campo e ela diminui com o quadrado da distância. A sua representação por linhas de campo é muito importante neste tópico, uma vez que isto é o que usamos para definir o fluxo magnético (Φ).

O fluxo magnético pode ser interpretado com a intensidade de “influência” que determinado campo magnético têm em dada região do espaço. Quanto maior for o valor do fluxo, maior será a intensidade das linhas de campo. Ao observar a figura 1.2(b), pode-se então deduzir que o fluxo magnético é muito mais intenso próximo à origem do plano cartesiano do que nas extremidades da imagem. Em verdade, se o observador se afastar para o dobro da distância, a intensidade da influência percebida cairia por quatro vezes devido a relação quadrática inversa! Percebe-se que esta grandeza é escalar, pois só determina a intensidade medida e não se importa com direções e sentidos.

No entanto, o estudo vetorial é essencial para a física e as engenharias. Compreender o sentido e a direção das grandezas, muito além de sua magnitude, informa de onde estas grandezas “estão vindo” e “para onde vão”. Ou seja, pode-se determinar, para este caso, quais são e onde estão estas fontes de fluxo magnético, além de qual percurso estas linhas de campo podem tomar no espaço, visualizando assim a forma da sua região de influência. Nisto, é importante definir uma nova grandeza vetorial, chamada de *densidade de fluxo magnético* ($\vec{B}$). Este campo vetorial busca quantificar quanta influência magnética existe em um determinado ponto do espaço por unidade de área. Para isto, foi convencionado que neste campo as linhas de fluxo “saem” do polo magnético norte e “entram” se direcionando ao polo magnético sul.



Por unidade de área? Mas que área? Ela tem alguma coisa a ver com a característica vetorial deste campo?

Se você pensou nisso, está no caminho certo! A área em questão nada mais é do que uma superfície que está perpendicular à direção de passagem das linhas de campo, ou linhas de fluxo, no espaço. Para isto, pode-se imaginar um campo magnético que tem suas linhas de fluxo φ direcionadas para a direita de forma uniforme. Ou seja, há um polo norte à esquerda. Se determinarmos uma superfície de área A , perpendicular à direção da passagem deste fluxo, a magnitude da densidade de fluxo B será a razão entre o valor do fluxo e o valor da área.

$$B = \frac{\varphi}{A} \quad (8.4)$$

Neste caso, a representação vetorial deste campo de densidade de fluxo é na direção positiva do eixo x .

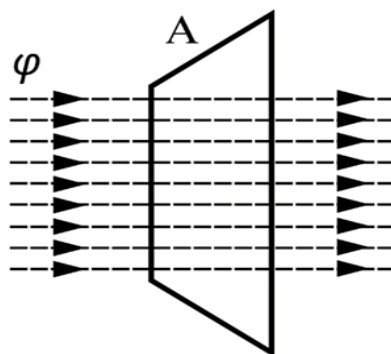


Figura 8.3: Passagem do fluxo φ através de uma superfície de área A .

Para um caso genérico, portanto, uma superfície de área aberta A qualquer e perpendicular a linhas de campo de uma densidade de fluxo $\vec{B}$ tomando qualquer forma, pode-se então determinar o fluxo magnético como a contribuição de todos dos produtos entre o campo $\vec{B}$ e o elemento de área $d\vec{A}$ através da integração de superfície:

$$\varphi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (8.5)$$

Esta relação é de extrema importância para as análises de campo magnéticos, principalmente naqueles que são variáveis no tempo, onde as manipulações matemáticas podem trazer grandes esclarecimentos acerca do funcionamento dos mais variados fenômenos físicos.

9. APLICAÇÕES DAS INTEGRAIS DE LINHA

9.1 As Integrais De Linha No Eletromagnetismo

E aí, Davi? Ainda tá comigo? Você conseguiu pegar tudo até aqui?



Oi professor! Tô aqui sim. O assunto é meio complicado, mas fui lendo e revisando os conteúdos vistos

Muito bem, Davi! Todo engenheiro precisa ser persistente mesmo, mandou bem! Nesse caso, vamos dar continuidade aos nossos estudos.

Trabalho e potencial elétrico

Em todas as áreas da engenharia, ainda mais da elétrica, há uma grande preocupação com o uso das energias disponíveis e o estudo de como ela pode ser transferida e transformada é do interesse de todos os que almejam esta profissão. Por isso, o conceito de trabalho é muito importante. Pense aqui, o trabalho e a energia são, essencialmente, a mesma coisa!



Mas como pode? Na realidade, o senhor pode começar relembrando o que é trabalho?

Pode deixar, Davi! Vê só, imagine arrastar uma caixa pesada pelo chão. Seu corpo gasta a energia química armazenada, originária da alimentação, e gera força nos seus braços para a empurrar. Nesta ação, se há o deslocamento da caixa, então ela recebe energia cinética que foi transformada pelo seu corpo. Nesta transformação de energias, seu corpo exerceu trabalho!

Basicamente sempre que há a mudança na energia de uma forma para outra ou quando ela é simplesmente transferida sem alteração, há trabalho sendo realizado.

Se uma partícula carregada eletricamente com carga q sofre um deslocamento quando imersa em um campo elétrico $\vec{E}$, pode-se averiguar que houve alteração na energia mecânica desta partícula e, conseqüentemente, trabalho foi realizado. O campo elétrico $\vec{E}$ é o responsável por esse trabalho. Para calcular o valor do trabalho quando esta partícula vai de um ponto A a um ponto B, pode-se então usar de algumas ferramentas matemáticas.

Por definição, o trabalho realizado - ou a quantidade de energia que foi transformada em um sistema - em um deslocamento entre dois pontos devido a uma força é igual ao produto escalar entre o vetor força e o vetor deslocamento. Mas você entende o que isso quer dizer? Sabe-se que o produto escalar entre dois vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$, que possuem um ângulo θ entre eles, pode ser representado como:

$$\vec{F} \cdot \vec{d} = Fd \cos(\theta) \quad (9.1)$$

Se os vetores forem paralelos, com $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$, o produto escalar tem seus valores máximo e mínimo, respectivamente. Se forem perpendiculares, com $\theta = \pm 90^\circ$, o produto escalar é nulo. Ou seja, o trabalho realizado por determinada força só existe quando há ao menos uma componente do deslocamento na mesma direção dessa força, e é proporcional ao produto do módulo destes componentes.

O sinal do trabalho obtido também nos traz informações! Se o deslocamento for no mesmo sentido da força ($\theta = 0^\circ$), o trabalho terá valor positivo; se for no sentido contrário ($\theta = 180^\circ$), valor negativo.

Tratando agora do deslocamento de determinada carga q ao longo de um caminho arbitrário C , podemos dividir este caminho em vetores de deslocamentos infinitesimais $\vec{dl}$, onde a carga estará sujeita a uma força $\vec{F}_e$ em cada posição, originária de um campo eletrostático $\vec{E}$.

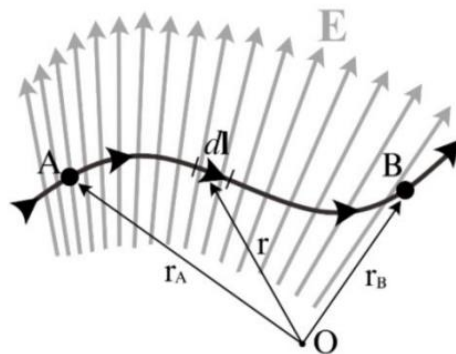


Figura 9.1 Deslocamento de uma carga q , do ponto A ao B e ao longo de uma curva C , através de um campo eletrostático $\vec{E}$.

Perceba que $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ são os vetores que indicam as distâncias dos pontos A e B até nossa origem arbitrada, enquanto o vetor $\vec{r}$ indica a distância da carga, em qualquer ponto, até a origem. Podemos definir o trabalho realizado ao longo do percurso C como a soma dos trabalhos realizados em cada fração $d\vec{l}$ deste caminho. Como esta curva pode ser representada por variáveis dependentes, como $C = f(x, y, z)$, podemos então escrever o trabalho total realizado pelo campo elétrico W como a soma destes produtos escalares infinitesimais ao longo de C , resultando na seguinte integral de linha:

$$W = \int_C \vec{F}_e \cdot d\vec{l} = -Q \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9.2)$$

Onde Q é o valor da carga que sofre o deslocamento. Se o trabalho assumir valor positivo, então o deslocamento é realizado pelo campo. Se assume valor negativo, o deslocamento é devido a uma força externa. O sinal negativo da equação apenas nos diz que o trabalho é realizado por um agente externo ao campo!

Vamos para o exercício? Praticando, podemos associar melhor as ideias e conceitos passados anteriormente!

Exemplo 32: Determine (a) o trabalho realizado ao deslocarmos uma carga Q pelo campo eletrostático $\vec{E}$, do ponto A ao ponto B e ao longo de um caminho C , onde o vetor deslocamento infinitesimal toma a forma genérica $d\vec{l}$, e (b) demonstre que o módulo do trabalho realizado é $W = QV_{AB}$, onde V_{AB} é a diferença de potencial entre os pontos A e B.

Solução:

a. Sabendo que cada região no espaço está sobre uma região equipotencial, pode-se dizer que o campo $\vec{E}$ produz uma força $\vec{F}_e$ que causa um deslocamento na carga Q , partindo da região A, de um ponto r_A , à uma região B, do ponto r_B de distância do nosso referencial espacial. Ou seja, há uma transferência de energia para a carga quando ela vai de uma região com determinado potencial V_A para uma outra região de potencial V_B . Da equação 9.2, o campo eletrostático de uma carga pontual:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

Para facilitar nossos cálculos, vamos utilizar coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) tanto para o campo elétrico quando para o vetor $d\vec{l}$. Tratando de um campo eletrostático criado por uma carga q , podemos encontrar o trabalho realizado neste deslocamento. O vetor do deslocamento infinitesimal toma a forma:

$$d\vec{l} = dr \hat{r} + d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}$$

Fazendo uso da equação 10.2, o trabalho realizado pelo campo elétrico é escrito como:

$$W = -Q \int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Q \int_A^B \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi})$$

Perceba o produto escalar dentro da integral. Mas, o que ele significa? Novamente, do conceito tratado de trabalho, esta operação vetorial indica que o trabalho resultante é igual a soma dos produtos entre as componentes dos vetores da força aplicada e do deslocamento sofrido. Ou seja, quanto maior for a força e/ou o deslocamento, maior será o trabalho realizado.

Não apenas isso, mas também informa que estas componentes devem estar na mesma direção para que haja trabalho. Assim, neste caso, para qualquer componente de deslocamento que não é na direção radial das linhas de campo de $\vec{E}$, não há trabalho feito pelo campo e essa componente é devido à alguma força externa a ele. Se há deslocamento na mesma direção das linhas de campo, mas no sentido oposto, então a força $\vec{F}_e$ gera trabalho, mas no sentido oposto ao movimento e tendendo a reduzir ele. Resolvendo o produto escalar, segue o resultado da integral.

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot (dr \hat{r} + d\theta \hat{\theta} + r \sin\theta d\phi \hat{\phi}) &= dr \\ \Rightarrow W &= -\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = Q \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right] \end{aligned}$$

b. Da equação 9.3, sabendo que os potenciais elétricos que uma carga pontual gera no ponto de observação, nos pontos A e B, são dados por $V_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$ e $V_B = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$, então:

$$W = Q[V_B - V_A] = QV_{AB} \quad (9.3)$$

que, em módulo, é o que queríamos demonstrar.

Se V_{AB} é negativo, o trabalho é negativo, o que indica que a força aplicada é externa e o campo atua contra o deslocamento. Se é positivo, então o trabalho é positivo e o campo atua a favor do deslocamento.

A partir do resultado do exemplo 32 e da equação 9.3, podemos associar o seguinte fato:

$$Q[V_B - V_A] = QV_{AB} = -Q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow V_{AB} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (9.4)$$

Ou seja, a integral de linha do campo elétrico, indo de um ponto B a um ponto A, é igual à diferença de potencial elétrico entre esses dois pontos! Mas o que isso quer dizer? Esta relação matemática pode ser relacionada com a capacidade inerente do campo elétrico em produzir trabalho ou, em outras palavras, de transferir energia em um determinado sistema. A diferença de potencial elétrico se mostra como esta capacidade de produzir trabalho, por unidade de carga, entre dois pontos do espaço permeado por um campo elétrico.

Esta integral de linha é de extrema importância então para demonstrar um fato. Quanto maior for o módulo da integral de linha da equação (9.4), maior então será o produto entre as componentes paralelas do campo elétrico e do caminho de deslocamento em questão, definido pelo produto escalar descrito na equação (9.1). Assim, maior será a contribuição do campo no deslocamento de um ponto A até um ponto B.

Conservação do Campo Eletrostático

Do exemplo 32, nota-se que a integral de linha depende apenas do valor de r , ou seja, das distâncias para com a origem do sistema de coordenadas. O trabalho realizado pelo campo eletrostático é indiferente à escolha do caminho tomado no deslocamento da carga elétrica

quando os pontos inicial e final são os mesmos. Este fato ocorre especialmente quando o campo vetorial que origina a força tratada é um campo conservativo.

É possível enxergar que caso a carga q percorra um caminho fechado (onde o ponto de chegada r_B é igual ao ponto de saída r_A), o trabalho realizado pelo campo elétrico é nulo.

$$W_{\text{caminho fechado}} = -Q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow -Q \oint_A^A \vec{E} \cdot d\vec{l} = -Q \left[\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} \right] = 0$$

Isto, também, ocorre notavelmente para os casos em que o campo vetorial tratado é um campo conservativo. Pode-se verificar isso de outra forma, mas também com o auxílio das integrais de linha. Fazendo uso do Teorema de Stokes, que diz que uma integral de superfície do rotacional de uma função vetorial é igual à integral de caminho fechado desta mesma função, tem-se:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Daí:

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Novamente, uma das características da maioria dos campos vetoriais conservativos é a de não possuir rotacionais. Assim, a ferramenta das integrais de linha, uma vez que descrevem o comportamento físico de movimentos causados por forças elétricas, pode ser usada para evidenciar que um campo eletrostático não causa rotações em cargas elétricas puntiformes. Isto ocorre devido à característica divergente dos campos eletrostáticos, que impossibilita a criação de torque em distribuições elétricas de mesma característica.

Vale notar que esta relação está válida apenas para campos estáticos originados por acúmulos de cargas livres. No deslocamento de um corpo carregado através do campo, há sim trabalho envolvido devido a alteração do estado das energias do sistema. No entanto, devido à convenção dos sinais relacionados com as relações entre as direções do movimento e da força aplicada, a soma dos trabalhos em um percurso fechado é sempre zero. Porém, para campos elétricos variantes no tempo, isto nem sempre é verdade e conclusões devem ser tomadas com cautela!

9.2 As Integrais de Linha aplicadas às Máquinas Elétricas

As Máquinas Elétricas são, em resumo, dispositivos que realizam trabalho na conversão da energia elétrica para outras formas de energia, ou a conversão destas para a energia elétrica. Exemplos podem ser citados como motores elétricos, geradores e transformadores, com as respectivas conversões de energia elétrica-mecânica, mecânica-elétrica e elétrica-elétrica. Os princípios de funcionamento destes dispositivos são estudados no curso de Bacharelado de Engenharia Elétrica, no IFPE Campus Garanhuns, nas disciplinas de Conversão de Energia e Máquinas Elétricas, com bases provindas das disciplinas de Cálculo 3, Eletromagnetismo e Sistemas Elétricos!



Ah, não! De novo com essas disciplinas?
Mas eu não me dou bem com elas, e
algumas eu ainda nem sequer cheguei a
cursar!

Calma, rapaz! Todos os temas serão tratados com calma, paciência e detalhadamente. E caso ainda não tenha alcançado estas matérias, não há problema. Nosso objetivo é mostrar a importância do estudo do Cálculo Vetorial e as inúmeras aplicações que existem na Engenharia. Se concentre nos conceitos trabalhados e nos seus significados!

Definição da Força Magnetomotriz (FMM)

O funcionamento de muitas máquinas elétricas está diretamente atrelado aos fenômenos da indução eletromagnética, pela **Lei de Faraday-Lenz**, e da interação entre campos eletromagnéticos no espaço. Em especial, nos transformadores, relés, motores e geradores, o fluxo de campo magnético é a base fundamental para seus funcionamentos, sendo de interesse especial. Em analogia aos campos elétricos, a “força” que causa o deslocamento das cargas

elétricas para a formação da corrente elétrica é a **Força Eletromotriz (FEM)**, dada em Volts. Tratando de campos magnéticos, a “força” que gera o fluxo magnético é a **Força Magnetomotriz (FMM)**, dada em ampères-espiras.



Ampères-espiras? Então a força que produz o fluxo magnético em uma máquina elétrica é proporcional a corrente elétrica que circula e ao número de espiras de um fio enrolado?

Exatamente! Quanto maior for o valor da intensidade de corrente I e o número de espiras em uma bobina de N enrolamentos, maior vai ser a intensidade do fluxo magnético originado! Similar com a FEM, que intensifica a corrente elétrica conforme sua intensidade do campo elétrico aumenta.

Não apenas isso, mas o material no interior (núcleo) deste conjunto de espiras (bobina) também está associado à intensidade do fluxo (ϕ). Se este núcleo for de um material que tenha alta permeabilidade magnética, denotada por μ , então será mais fácil que o fluxo magnético seja conduzido pela sua geometria. Além disso, materiais assim também se magnetizam fortemente, intensificando o valor do fluxo ao se tornarem ímãs com campo no mesmo sentido. Estes materiais são denominados ferromagnéticos,

A criação de uma intensidade de campo magnético ($\vec{H}$) pode ser associada à passagem de corrente elétrica a partir da Lei Circuital de Ampère, como:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{env} \quad (9.5)$$

onde i_{env} é a corrente envolvida pela curva fechada arbitrada, perpendicular à passagem de corrente. De fato, a interpretação matemática desta integral de caminho fechado pode assumir a mesma para o cálculo do trabalho realizado pelo campo elétrico no deslocamento de uma carga. Para ela, devido ao produto escalar, importam apenas as componentes tangenciais entre as linhas de campo magnético e a curva que engloba a passagem da corrente.

Vamos fazer um exercício simples que vai esclarecer as ideias a respeito deste tópico!

Exemplo 33: Determine, a partir da figura 9.2, qual é a intensidade do campo magnético $\vec{H}$ gerada no interior e no exterior deste enrolamento solenóide cilíndrico, de raio interno a e de comprimento infinito, quando é percorrido por uma corrente constante de valor I .

Solução:

Como abordado anteriormente e a partir da equação (9.5), o vetor intensidade de campo magnético pode ser determinado pela Lei Circuital de Ampère, como:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{env}$$

Onde i_{env} é a corrente envolvida pela curva fechada arbitrada, perpendicular à passagem de corrente.

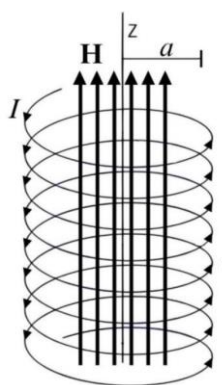


Figura 9.2 Solenóide do exemplo xx. O campo $\vec{H}$ é direcionado para cima, na direção positiva do eixo Z. Pode ser verificado pela Regra da Mão Direita ao observar o sentido da corrente

Percebe-se que, ao ser infinito (seus pólos norte e sul não podem ser alcançados), podemos admitir uma fração de comprimento do solenoide de valor L , que possui uma quantidade N de espiras. Para a escolha do caminho fechado a ser utilizado, levaremos em consideração que a integral é de um produto escalar. Ou seja, devemos escolher um caminho cujas linhas de campo magnético são tangentes à curva arbitrada. Ou melhor dizendo, um caminho que delimita uma superfície cuja seu vetor normal seja paralelo à direção da corrente.

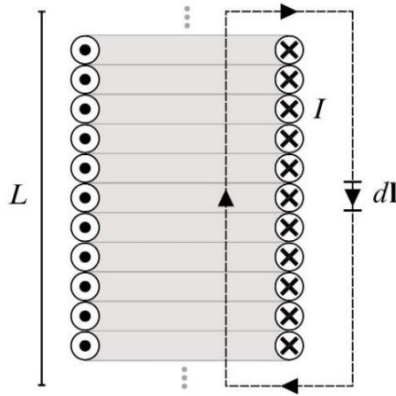


Figura 9.3 Curva de integração do exemplo 33. Os pontos indicam o sentido da corrente saindo da página, enquanto as cruces indicam a corrente entrando na página.

Para simplicidade, escolhemos uma curva retangular mostrada na figura 9.3. Ora, ao considerá-lo uniforme e constante, o campo $\vec{H}_{int}$ na parte interna do solenóide ($r < a$) segue o mesmo sentido e direção do caminho da esquerda ($\hat{K}$). Para a região exterior ($r > a$), como as linhas de campo devem ser contínuas e indo do polo norte para o sul, o campo $\vec{H}_{ext}$ tem mesma direção e sentido do caminho da direita ($-\hat{K}$). Como os caminhos de cima e de baixo são perpendiculares aos campos, o produto escalar é nulo para ambos.

A corrente i_{env} envolvida pela curva nada mais é do que o valor da intensidade de corrente i vezes o número de espiras N que a curva encarcera. Assim, temos:

$$\begin{aligned} Ni &= \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int \vec{H}_{int} \cdot d\vec{l}_{esquerda} + \int \vec{H}_{ext} \cdot d\vec{l}_{direita} \\ \Rightarrow Ni &= \int_0^L H_{int} \hat{K} \cdot d\vec{l} \hat{K} + \int_0^L H_{ext} (-\hat{K}) \cdot d\vec{l} (-\hat{K}) \\ &\Rightarrow Ni = L(H_{int} + H_{ext}) \end{aligned}$$

Pode-se notar uma coisa a partir disto. A soma entre as intensidades dos campos interno e externo é sempre constante, valendo Ni . Logo, os dois campos também são constantes. Porém, sabe-se que a intensidade do campo magnético no exterior do solenóide naturalmente diminui com o quadrado da distância, fazendo com que $H_{ext} \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$. Porém, se o campo é constante em qualquer ponto externo ao solenóide e H_{ext} é nulo no infinito, então é lógico que $H_{ext} = 0$ em qualquer ponto. Assim, com $H = H_{int}$, temos o resultado:

$$H = \frac{Ni}{L} \quad (9.6)$$

Conseguimos então definir qual é o campo magnético de um solenóide infinito, sendo ele constante e uniforme no seu interior e nulo no seu exterior. Mas, e aí, já percebeu?



Perceber o que? Nós encontramos o valor do campo magnético. Mas o que isso tem a ver com a força magnetomotriz?

Basta olhar com cuidado! A força magnetomotriz é definida como o produto entre o valor da intensidade de corrente e o número de espiras de determinado enrolamento condutor. Ou seja, da equação (9.6), a FMM pode ser escrita como:

$$F = Ni = \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (9.7)$$

Assim, a FMM necessária para produzir um fluxo magnético φ através de determinado meio pode ser determinada pela integral de caminho fechado do vetor campo magnético $\vec{H}$! Este conhecimento é especialmente aplicado ao funcionamento de máquinas elétricas que utilizam o fluxo magnético para operarem.

Considere o núcleo de material ferromagnético da figura 9.4. A quantidade de força magnetomotriz para fazer um fluxo φ permeá-lo é igual ao produto Ni . Citando o livro Máquinas Elétricas, de Fitzgerald e Kingsley:

“As dimensões do núcleo são tais que o comprimento do caminho de qualquer linha de fluxo é aproximadamente igual ao comprimento médio do núcleo l_c . Como resultado, a integral de linha (equação 1.10) torna-se simplesmente o produto escalar $H_c l_c$ do módulo de H vezes o comprimento médio l_c do caminho de fluxo. Assim, a relação entre a FMM e a intensidade de campo magnético pode ser escrita, na terminologia dos circuitos magnéticos, como $F = Ni = H_c l_c$, em que H_c é o módulo médio de H no núcleo”

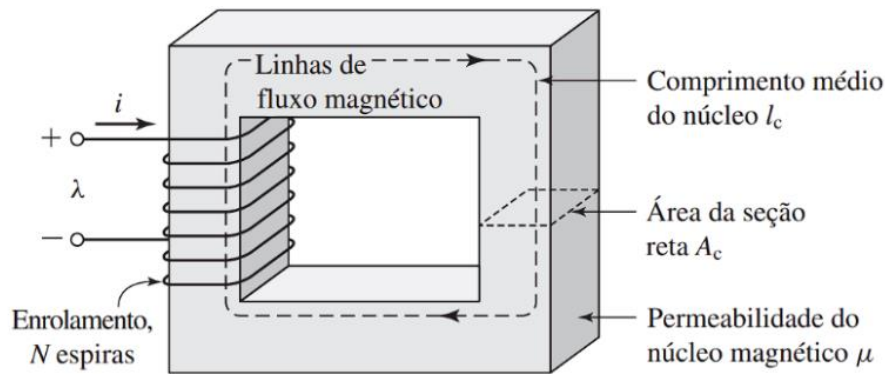


Figura 9.4 Circuito magnético simples, retirado de Máquinas Elétricas, de Fitzgerald e Kingsley. λ é o fluxo concatenado da bobina, onde $\lambda = N\phi$.

Ou seja, para qualquer seção de um circuito magnético, a FMM requerida para gerar determinado fluxo pode ser encontrada pela seguinte relação:

$$\mathcal{F} = Ni = Hc \, lc \quad (9.8)$$

Isto é especialmente válido para distribuições de campos magnéticos solenoidais! Quer dizer, para distribuições em que as linhas de fluxo estão em somente uma direção, como no caso de um solenóide infinito. Em qualquer “ramo” do núcleo, desprezando os efeitos de espraçamento devido a dispersão do fluxo, a força magnetomotriz é definida da mesma forma.

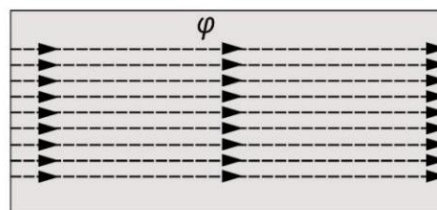


Figura 9.5 Exemplo de fluxo magnético solenoidal unidirecional e uniforme, para o qual é válida a equação (9.8).

Esta aplicabilidade das integrais de linha é essencial para avaliações de casos simples, como este, e para situações de geometrias mais complexas. Com esta ferramenta em mãos, pode-se associar o fluxo magnético ϕ com o vetor densidade de fluxo magnético $\vec{B}$, e este com relações de torque força magnética aplicada à dispositivos eletromecânicos, bem com tensões induzidas devido ao fenômeno da indução eletromagnética e afins. É, de fato, umas das ferramentas mais inestimáveis para a Engenharia Elétrica.

Determinação da Tensão Induzida (e)

Ainda no escopo das máquinas elétricas, como mencionado anteriormente, um dos fenômenos físicos mais explorados para seu funcionamento é a **indução eletromagnética**. Este princípio diz que, independentemente do referencial adotado, a variação de um fluxo magnético $\varphi(t)$ no tempo induz uma determinada força eletromotriz em materiais condutores, aqui denotada por $e(t)$. Havendo circulação da corrente originária da FEM induzida, esta ocorre de forma a se opor à variação do fluxo. Dessa forma, pode-se representar esta FEM induzida nos enrolamentos condutores de uma máquina elétrica pela seguinte equação:

$$e(t) = -\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -N \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (9.9)$$

Onde λ é o fluxo concatenado (ou seja, somado, acoplado ou ligado) por N espiras que contribuem com um fluxo φ cada uma. Com a FEM induzida, surge um campo elétrico que não é diretamente proveniente do acúmulo de cargas. Este campo, ao contrário do campo eletrostático antes estudado, não é conservativo!



Não é conservativo? Quer dizer que as leis de conservação de energia não são mais aplicáveis?

Calma, calma. Dizer que o campo elétrico originário de uma FEM é não-conservativo apenas implica que, ao deslocar uma carga imersa neste campo do ponto A ao ponto B, a quantidade de energia transferida depende do caminho! Em outras palavras, o trabalho realizado por esse campo não é o mesmo para deslocamentos em rotas diferentes. Dessa forma, se deslocarmos uma carga em um percurso fechado, diferentemente de um campo eletrostático, o trabalho realizado por unidade de carga não será nulo!

Podemos aqui estudar como as integrais de linha são aplicadas para encontrarmos meios de definir essa tensão induzida nestes dispositivos. Para o trabalho por unidade de carga em um caminho fechado e com apenas uma espira ($N = 1$), podemos então escrever como:

$$e = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (9.10)$$

Aqui vemos um ponto importantíssimo para a engenharia elétrica. O termo da esquerda indica a FEM induzida no material condutor, o termo do meio indica o trabalho por unidade de carga realizado ao movimentar uma carga por um caminho fechado, enquanto o lado direito indica a variação do fluxo magnético, permeando o condutor, no tempo. Estes três conceitos são, de fato, a mesma coisa!

Isto quer dizer que o trabalho realizado tem de vir de algum lugar. Neste caso, o trabalho é realizado pela energia que existe no campo magnético variável no tempo que induziu esta FEM. Assim, diversas máquinas elétricas utilizam disso para a geração, transmissão ou conversão de energia elétrica através da magnética, realizando a **variação da densidade de fluxo magnético** $\vec{B}(t)$ por meios elétricos e mecânicos.

Alguns casos podem ser explorados, a depender do referencial inercial ou não-inercial tomado. Citando o livro *Elementos de Eletromagnetismo*, de Matthew N. O. Sadiku:

“(...) a variação do fluxo magnético no tempo pode ser causada de três maneiras:

- 1. quando se tem uma espira estacionária em um campo magnético $\vec{B}$ variável no tempo;*
- 2. quando se tem a área de uma espira variável no tempo em um campo magnético $\vec{B}$ estático;*
- 3. quando se tem a área de uma espira variável no tempo em um campo magnético $\vec{B}$ variável no tempo.”*

Para estes casos, podemos adotar a espira como referencial inercial, o campo $\vec{B}$ como inercial, ou trabalhar com ambos não-inerciais. O primeiro caso é uma notável aplicação da indução eletromagnética em transformadores, onde podemos adotar o enrolamento de espiras como referencial inercial. O segundo caso pode ser observado aplicado às máquinas elétricas de corrente contínua, ou CC, quando têm os enrolamentos do rotor em movimento devido ao campo estacionário do estator. Por fim, o último caso é muito observado em máquinas elétricas de corrente alternada, ou CA, onde o enrolamento do rotor está em movimento enquanto o campo $\vec{B}$ do estator é girante e varia no tempo.

Aplicando o Teorema de Stokes no termo do meio da equação (9.10):

$$e = \int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

A partir da equação 9.5, temos:

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (9.11)$$

Note que, como mencionado, o rotacional do campo elétrico induzido é não nulo, reafirmando que o trabalho realizado provém do campo $B(t)$. A partir destas relações, podemos então determinar a tensão induzida nos casos abordados. O seguinte exercício trará uma visão melhor das aplicações possíveis, podendo posteriormente ser complementadas ao gosto do leitor!

Exemplo 34: O transformador da imagem x.8 é alimentado no seu lado primário (à esquerda, de enrolamentos $N_1 = 600$), com uma fonte de tensão alternada tal que $e_1 = 120 \cos(377t) \text{ V}$. Pelas características do núcleo magnético, a densidade de fluxo magnético que permeia o enrolamento secundário (à direita, de enrolamentos $N_2 = 1100$) é:

$$\vec{B}(t) = 50 \cos(377t) \hat{k} \text{ mT}$$

Assumindo que $B(t)$ é uniforme dentro do enrolamento e sabendo que o campo elétrico induzido $\vec{E}_{ind}$ é sempre perpendicular ao campo $\vec{B}$, determine (a) a tensão induzida e_2 no lado secundário deste transformador, (b) o rotacional induzido pela mudança do campo magnético e (c) o campo elétrico máximo induzido $E_{m\acute{a}x}$ ao longo do condutor. Considere que os enrolamentos são retangulares tais que $x=10 \text{ cm}$ e $y=15 \text{ cm}$.

Determine:

- A. A tensão induzida e_2 no lado secundário deste transformador.
- B. O rotacional $\nabla \times \vec{E}$ induzido pela mudança do campo magnético. Considere que os enrolamentos são retangulares tais que $x = 10 \text{ cm}$ e $y = 15 \text{ cm}$.

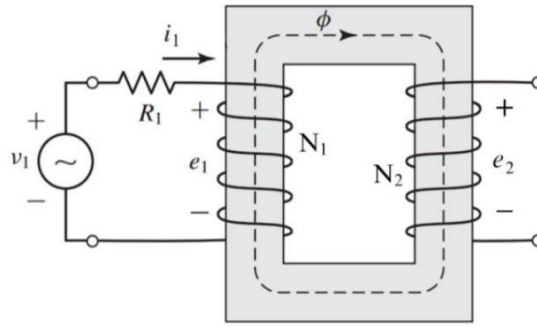


Figura 9.6 Transformador do exemplo xx.

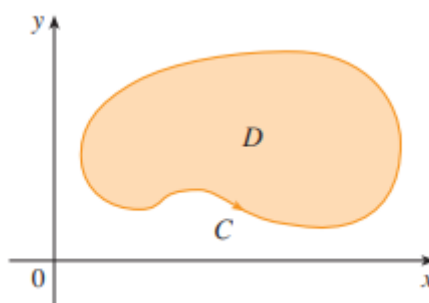
10. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE GREEN

10.1 O Teorema de Green

No capítulo 5 deste material estudamos sobre o teorema de Green, uma técnica muito utilizada na resolução de integrais de linha, dado pela seguinte equação:

$$\oint_C F_1 dx + F_2 dy = \int \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA$$

O teorema de Green fornece a relação entre uma integral de linha ao redor de uma curva fechada simples C e uma integral dupla sobre a região do plano D delimitada por C , como mostra a figura 11.1.



Eu lembro de usarmos esse teorema na resolução de integrais de linha, mas ele também tem aplicações físicas?

Tem sim Davi, afinal de contas, o estudo da física é um modo de associar fenômenos e comportamentos físicos com a matemática e seus conceitos teóricos.

Além das aplicações matemáticas que já conhecemos, o teorema de Green desempenha um papel crucial na resolução de problemas envolvendo campos elétricos, magnetismo e fluxo de calor em problemas de geometria diferencial e de física matemática.

10.2 O Teorema De Green Na Relação Entre O Fluxo De Campo Elétrico Ou Magnético

O teorema de Green é um teorema fundamental da física teórica, que estabelece uma relação entre o fluxo de campo elétrico ou magnético em uma superfície fechada e a densidade de carga ou corrente elétrica presente dentro dessa superfície.

Matematicamente, o teorema de Green pode ser expresso como:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

REFERÊNCIAS

STEWART, J. **Cálculo : Volume 1**. São Paulo (Sp): Thomson, 2008.

STEWART, J. **Cálculo: Volume 2**. São Paulo: Cengage Learning, 2017.

A STEINBRUCH; PAULO WINTERLE. **Geometria Analítica**. São Paulo: Mcgraw-Hill, 2006.

DAVID, D. J. **Eletrodinâmica**. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2011.

Cálculo com o operador nabla. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/Calculo/livro-cv/cv-cx00e1culo_com_o_operador_nabla.html>.

ALEXANDRE DE ARAÚJO, G.; JÚNIOR, S. **Teoremas de Green, Gauss e Stokes e algumas aplicações**. [s.l.: s.n.]. Disponível em: <<https://repositorio.ufersa.edu.br/server/api/core/bitstreams/f6221568-a62a-4481-baf5-147a5ca63e87/content>>.

Quem foi Carl Friedrich Gauss» Colégio Bastos Maia. Disponível em: <<https://www.bastosmaia.com.br/quem-foi-carl-friedrich-gauss/>>. Acesso em: 26 set. 2024.

George Green. Disponível em: <<https://geniuses.club/genius/george-green>>. Acesso em: 26 set. 2024.

LUIS FELIPE VIEIRA. **Sir George Gabriel Stokes e suas notáveis conquistas**. Disponível em: <<https://cristaosnaciencia.org.br/george-gabriel-stokes/>>. Acesso em: 26 set. 2024.

Fala estudante...

Você já se perdeu nos livros de cálculo vetorial? Se sim, este material é para você!

Com uma linguagem simples e direta, ajudamos a descomplicar os conceitos matemáticos e mostramos como aplicar o cálculo vetorial em problemas reais do curso de Engenharia Elétrica do IFPE – Campus Garanhuns.

Resultado da pesquisa "CONTRIBUIÇÕES DA MATEMÁTICA PARA O DESENVOLVIMENTO DO ENSINO DE DISCIPLINAS TÉCNICAS DO CURSO DE ENGENHARIA ELÉTRICA DO IFPE – CAMPUS GARANHUNS: Aplicações de Cálculo Vetorial", este livro é o seu aliado para entender e usar cálculo vetorial sem dor de cabeça.

