O TRATADO DE ARQUIMEDES SOBRE ESFERAS E CILINDROS: uma revisão bibliográfica sobre suas relações de áreas e volumes

Lydiana de Sousa Tavares
lydianatavares@gmail.com
Bruno Lopes Oliveira da Silva
bruno.lopes@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo analisar as contribuições de Arquimedes em seu tratado "Sobre a Esfera e o Cilindro", com ênfase nas relações de superfícies e volumes estabelecidas entre esses sólidos. A pesquisa adota uma abordagem histórica e bibliográfica, fundamentada nas obras de Boyer (2012), Contador (2013), Eves (2004) e Garbi (2010) para contextualizar os avanços matemáticos promovidos por Arquimedes e sua relevância para o desenvolvimento da geometria. A análise destaca as proporções matemáticas apresentadas no tratado, como o volume da esfera corresponder a dois terços do volume do cilindro circunscrito, e aborda o uso de conceitos da Física. Esses resultados evidenciam a importância do pensamento arquimediano para a geometria clássica e seu impacto duradouro na matemática moderna. Por fim, o trabalho ressalta o valor de integrar a história da matemática como ferramenta pedagógica, oferecendo uma abordagem mais significativa e contextualizada para o ensino e a aprendizagem.

Palavras-chave: Arquimedes. Esferas e Cilindros. História da Matemática.

ABSTRACT

This study aims to analyze Archimedes' contributions in his treatise On the Sphere and Cylinder, with an emphasis on the relationships between the surfaces and volumes of these solids. The research adopts a historical and bibliographical approach, grounded in the works of Boyer (2012), Contador (2013), Eves (2004), and Garbi (2010) to contextualize the mathematical advancements promoted by Archimedes and their relevance to the development of geometry. The analysis highlights the mathematical proportions presented in the treatise, such as the volume of the sphere being two-thirds of the volume of the circumscribed cylinder, and discusses the application of concepts from Physics. These results underscore the importance of Archimedean thought for classical geometry and its enduring impact on modern mathematics. Finally, the study emphasizes the value of integrating the history of mathematics as a pedagogical tool, offering a more meaningful and contextualized approach to teaching and learning.

Keywords: Archimedes. Spheres and Cylinders. History of Mathematics

1. INTRODUÇÃO

A história da matemática é um recurso inestimável que molda a maneira como entendemos e ensinamos essa ciência fundamental. Ao explorar os registros da matemática, os estudantes não apenas testemunham sua evolução ao longo do tempo, mas também reconhecem a riqueza das contribuições de inúmeros indivíduos, tanto homens quanto mulheres, que desempenharam papéis cruciais em seu desenvolvimento. Desde os antigos sistemas numéricos até as teorias complexas da era moderna, cada avanço matemático é um testemunho do poder da mente humana e da capacidade de resolver problemas.

A história da matemática serve como uma ponte entre o passado e o presente, conectando os alunos com os pensadores e pioneiros que moldaram o panorama matemático ao longo dos séculos. Ao aprender sobre os desafios enfrentados por esses visionários, os estudantes são inspirados a enfrentar seus próprios obstáculos com determinação e criatividade. Além disso, ao reconhecer a diversidade de perspectivas e contribuições na história da matemática, os alunos são levados a valorizar a inclusão e a igualdade de gênero na busca pelo conhecimento matemático.

O estudo da matemática, ao longo dos tempos, não apenas enriquece nossa compreensão da disciplina, mas também informa e aprimora as práticas de ensino. Ao apresentar contextos históricos, os educadores fornecem aos alunos uma visão mais ampla e contextualizada dos conceitos matemáticos, tornando-os mais acessíveis e relevantes. Ademais, ao destacar os erros e as controvérsias que marcaram a história da matemática, os alunos são incentivados a adotar uma abordagem crítica e reflexiva em relação aos problemas matemáticos, promovendo uma compreensão mais profunda e significativa da disciplina.

Sobre a introdução de contextos históricos da matemática em sala de aula, concordamos com Chaquian (2015, p.13) quando afirma que:

> A inserção de fatos do passado pode ser uma dinâmica bastante interessante para introduzir um determinado conteúdo matemático em sala de aula, tendo em vista que o aluno pode reconhecer a Matemática como uma criação humana que surgiu a partir da busca de soluções para resolver problemas do cotidiano, conhecer as preocupações dos vários povos em diferentes momentos e estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente.

Dessa forma, incorporar acontecimentos históricos no ensino de Matemática pode trazer mais vivacidade ao ensino desta disciplina, possibilitando relacionar conceitos e métodos matemáticos de diferentes épocas com os temas que estão sendo apresentados aos estudantes.

Diante desse contexto histórico, é necessário destacar a importância dos gregos para a matemática e, também, a relevância das contribuições dos habitantes da Grécia Antiga para o desenvolvimento desta ciência. É evidente que a matemática já vinha sendo estudada por outros povos, como os babilônios, egípcios e mesopotâmios, que também contribuíram para o progresso da disciplina. Os gregos vivenciaram o período helenístico, que se estendeu de 800 a.C. até 336 a.C., marcado por uma significativa evolução cultural, intelectual e científica. Muitos dos conceitos fundamentais da matemática têm suas raízes nas ideias, desenvolvimentos e descobertas dos gregos, que começaram a discutir e apresentar a disciplina de forma mais ampla.

É evidente que os gregos dessa época desempenharam um papel ímpar no desenvolvimento e avanço da matemática, deixando um legado histórico que ressoa até os dias atuais. Nomes como Euclides, autor da obra "Elementos", que definiu os princípios básicos da geometria euclidiana; Pitágoras, que enunciou o "Teorema de Pitágoras", descrevendo a relação entre os lados de um triângulo retângulo; Arquimedes, renomado por suas contribuições em geometria e mecânica; e Hiparco, reconhecido por suas contribuições na astronomia e na matemática aplicada, são apenas alguns exemplos dos grandes sábios da época, cujas contribuições transcenderam a matemática para outras áreas, como a astronomia e a física.

Dentre os grandes nomes da matemática da antiga Grécia, destaca-se Arquimedes, nascido por volta de 287 a.C. na cidade grega de Siracusa e falecido em 212 a.C. Foi um dos mais importantes matemáticos, engenheiros e físicos da história, contribuindo significativamente em diversas áreas, incluindo geometria, estática e hidrostática. Considerado por muitos como um gênio à frente de seu tempo, deixou um legado que continua a influenciar a ciência e a tecnologia moderna. Embora muitas de suas obras tenham se perdido ao longo do tempo, algumas sobreviveram, como seus estudos sobre áreas e volumes de corpos sólidos, incluindo a relação entre o volume da esfera, do cone e do cilindro, demonstrando seu brilhantismo e sua contribuição duradoura para o campo da matemática (Galvão, 2008, p.152).

O texto que apresentamos foi construído utilizando a metodologia de revisão bibliográfica, que, como definida por Severino (2007), é uma pesquisa que utiliza dados já categorizados por outros autores e pesquisadores. Assim, a revisão bibliográfica é parte fundamental para a escrita de textos científicos como um trabalho de conclusão de curso. Buscando responder à pergunta norteadora “como a obra de Arquimedes “Sobre a Esfera e o Cilindro” apresenta as relações entre áreas e volumes dos sólidos cilindros e esferas e qual o método que foi utilizado por Arquimedes para obter essas relações?” apresentaremos, a seguir, os objetivos para esse trabalho:

Objetivo Geral

Apresentar as relações entre áreas e volumes de esferas e cilindros sob a perspectiva histórica da obra Sobre Esferas e Cilindros de autoria de Arquimedes.

Objetivos Específicos

- Discorrer sobre vida e obra de Arquimedes destacando suas contribuições para o desenvolvimento da matemática;
- Destacar o papel da história na construção do conhecimento matemático;
- Apresentar os resultados sobre áreas e volumes de cilindros e esferas que estão publicados na obra "Sobre Esfera e Cilindro", publicado por volta de 250 a.C., de Arquimedes de Siracusa.

A seguir, apresentaremos a metodologia que nos conduziu na construção deste Trabalho de Conclusão de Curso.

2. METODOLOGIA

Nosso Trabalho de Conclusão de Curso foi estruturado seguindo a metodologia de revisão bibliográfica, que é aquela desenvolvida a partir de material já elaborado, como livros, teses, dissertações e artigos científicos (GIL, 2008). Assim, esse tipo de pesquisa tem por finalidade atualizar conhecimentos científicos, observar o desenvolvimento de um assunto, resumir textos publicados que tratam de objetos relacionados ao tema, analisar e avaliar informações anteriormente publicadas, recolher e analisar as principais contribuições teóricas sobre um determinado fato, assunto ou ideia.

Tomamos como referência para a escrita deste texto as publicações de Eves (2004), Contador (2013), D'Ambrósio (1999), Chaquian (2015) e Garbi (2010), onde, por meio de leituras, resumos e fichamentos, buscamos dialogar com estes autores na construção do Trabalho de forma a atender os objetivos propostos. Nosso texto está dividido em 6 (seis) seções e as referências onde apresentamos todas as obras citadas neste Trabalho de Conclusão de Curso.

Passaremos a dissertar sobre Arquimedes de Siracusa, matemático grego que contribuiu de forma significativa com as ciências de forma geral, e, de forma grandiosa, com a matemática.

3. ARQUIMEDES: VIDA E LEGADO

Arquimedes, possivelmente o maior gênio da humanidade, nasceu em 287 a.C. em Siracusa, Sicília, e encontrou seu fim trágico durante o saque de Siracusa em 212 a.C, durante o cerco dos romanos à esta cidade.

Ele foi um multifacetado grego, destacando-se como matemático, filósofo, físico, engenheiro, inventor e astrônomo. Considerado por alguns estudiosos como pioneiro na matemática das probabilidades, Arquimedes deixou um legado de provas e deduções geométricas devido à predominância da geometria na matemática grega da época.

Contador (2013, p.9) relata que:

> Na época de Arquimedes, a matemática grega em nada se assemelhava com o conceito atual que temos dessa disciplina. Na grande maioria dos casos, um matemático grego era, na realidade, um geômetra, daí o porquê de Arquimedes ter nos deixado tantas provas e deduções de caráter geométrico.

Acreditando na mensurabilidade de tudo, Arquimedes desenvolveu um sistema de numeração próprio para suas descobertas, utilizando o alfabeto grego, onde as letras minúsculas representavam números e as maiúsculas letras, evoluindo posteriormente para um sistema exponencial para lidar com números de grande magnitude, pois, em sua época, a Grécia ainda não tinha um sistema numérico definido.

Seus trabalhos abrangeram várias áreas, incluindo Geometria Plana, Geometria Sólida, Astronomia, Aritmética, Mecânica e Hidrostática. Enviado para estudar em Alexandria aos onze anos, Arquimedes teve acesso à vasta biblioteca da cidade, frequentada por renomados sábios da época como Euclides, possivelmente um de seus professores.

Arquimedes é reconhecido por contribuições significativas, incluindo o cálculo de π, a quadratura da parábola e a investigação pioneira da espiral, além de antecipar conceitos modernos de limites e integração sendo, talvez, a mais notável de suas contribuições feitas à matemática (Eves, 2004).

A morte de Arquimedes é envolta em diversas versões, mas é amplamente aceito que ele foi morto por um soldado romano durante o cerco a Siracusa pelo General Marcelo. Em um momento de profunda concentração, Arquimedes, mergulhado em seus raciocínios, foi fatalmente atingido por uma lança, encerrando assim a vida de um dos maiores pensadores da história.

Seus feitos durante o cerco, incluindo inovações militares como catapultas e polias, mantiveram Siracusa resistente por quase três anos. No entanto, uma falha na segurança permitiu que o exército inimigo invadisse a cidade, resultando na trágica morte de Arquimedes.

Arquimedes deixou um legado eterno, não apenas por suas invenções mecânicas, mas também por suas contribuições teóricas à matemática e à ciência. Seu trabalho continua a inspirar e influenciar até os dias de hoje, evidenciando sua genialidade além de seu tempo e sua profunda criatividade, que permeiam suas obras e perpetuam seu legado para a humanidade.

4. ARQUIMEDES E SUAS OBRAS

Nesta seção, apresentaremos as obras conhecidas e atribuídas a Arquimedes, destacando seus títulos e fornecendo algumas características das produções relacionadas a seus trabalhos. Ao escrever esta seção, tomamos como referência os trabalhos de Eves (2004), Contador (2013), Boyer (2012) e Stewart (2019). Destacamos que não apresentaremos os anos de publicação das obras que serão relacionadas nesta seção, uma vez que, por característica de serem fatos da história da matemática, não existe um consenso dessas informações entre os autores pesquisados. D'Ambrosio (1999, p. 35) observa que "a relação de fatos, datas e nomes depende de registros, que podem ser de natureza muito diversa: memórias, práticas, ...". Essa diversidade de fontes pode levar a variações nas datas atribuídas a eventos e figuras históricas.

Os títulos das 12 (doze) produções imputadas a Arquimedes, em uma ordem cronológica provável, estão indicados a seguir:

1. Sobre o Equilíbrio dos Planos
2. A Quadratura da Parábola
3. Sobre Esfera e Cilindro
4. Sobre Espirais
5. Sobre Conoides e Esferoides
6. Sobre Corpos Flutuantes
7. Sobre as Medidas do Círculo
8. O Arenário
9. O Método
10. Livro de Lemas
11. Stomachion
12. O problema dos Bois

Apresentaremos, a partir deste momento, a descrição das obras relacionadas anteriormente, destacando aspectos relacionados à Matemática e às Ciências.

4.1 Sobre o Equilíbrio dos Planos

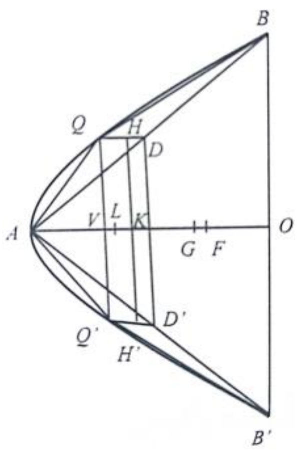
A obra de Arquimedes, intitulada "Sobre o Equilíbrio dos Planos", consiste em dois livros distintos, nos quais são apresentados resultados fundamentais no campo da estática, que é o ramo da mecânica dedicado ao estudo das condições que permitem que um corpo permaneça em repouso.

O primeiro livro é composto por 15 proposições. Nele, Arquimedes estabeleceu os conceitos básicos e fundamentais sobre o equilíbrio dos corpos, utilizando como referência uma balança de braços iguais.

O segundo livro, composto por 10 proposições, expande o estudo sobre o equilíbrio, desta vez aplicado a figuras planas, com destaque para segmentos de parábola. Arquimedes dedicou parte de seu trabalho à determinação do centro de gravidade desses segmentos, como pode ser observado na proposição 8. Nesta proposição, demonstrou-se que o centro de gravidade está localizado sobre o diâmetro do segmento, dividindo-o em duas partes na proporção de 3 para 2.

“Proposição 8: Se AO for o diâmetro de um segmento parabólico e G o seu centro de gravidade, então $AG = \frac{3}{2} \times GO$.” Contador (2013, p. 70)

Figura 1 - Segmento parabólico na obra de Arquimedes



Fonte: Contador (2013)

4.2 A Quadratura da Parábola

Na obra "A Quadratura da Parábola", ou *Tetragonismós parabolês*, composta por 24 proposições, Arquimedes dedicou-se a resolver o desafiador problema da determinação da área de um segmento qualquer de uma parábola, também conhecido como quadratura da parábola.

Partindo dos princípios da estática, Arquimedes inscreveu um triângulo no segmento parabólico e, seguindo determinadas regras, passou a inscrever vários outros triângulos. Recorrendo ao método da exaustão de Eudóxo, ele demonstrou que a área do segmento parabólico deve ser igual a $\frac{4}{3}$ da área do primeiro triângulo inscrito, com a mesma base e vértice no ponto onde a curva é tangente à base.

4.3 Sobre Esfera e Cilindro

O tratado "Sobre Esfera e Cilindro", ou *Perì sphaíras kaí kylídron*, é composto por dois livros contendo 53 proposições. Dentre todas as obras de Arquimedes, essa foi a que ele tanto se orgulhou, a ponto de fazer inscrever em sua tumba uma figura da esfera inscrita em um cilindro circular reto.

Nesse tratado, Arquimedes assegura rigorosamente que a área da superfície de uma esfera é quatro vezes a área de qualquer círculo máximo (como o equador de uma Terra esférica); que seu volume é dois terços do volume de um cilindro que se encaixa exatamente ao redor da esfera; e que a área de qualquer segmento esférico cortado por um plano é a mesma que a do segmento correspondente do cilindro.

Para realizar esse trabalho, Arquimedes utilizou o conceitos físicos da estática. Ele demonstrou que a área da superfície de uma esfera de raio r é de $4\pi r^2$ e seu volume é dado por $\left(\frac{4\pi r^3}{3}\right)$. Sobre esse trabalho iremos dissertar, com mais especificidade, na seção 4 do nosso texto.

4.4 Sobre Espirais

O tratado "Sobre Espirais", ou *Perì helíkon*, é considerado um dos mais difíceis, composto por 28 proposições. É um trabalho geométrico cujo principal objetivo foi estudar a curva gerada pelo movimento uniforme de uma reta, ou raio vetor, que gira num plano enquanto um ponto se desloca sobre a reta a partir de um centro situado na própria reta.

Além de estudar as propriedades fundamentais da curva, Arquimedes encontrou também a área compreendida entre dois vetores. Na proposição 24 deste trabalho, Arquimedes demonstrou que a área delimitada pela espiral em sua primeira volta a partir da linha inicial é igual a um terço da área do primeiro círculo. Ele também obteve resultados relevantes ao estudar a tangente à espiral.

4.5 Sobre Conoides e Esferoides

O tratado "Sobre Conoides e Esferoides", ou Perì Konoeidéon Kaì sphairoeidéon, é composto por 32 proposições. Nele, são apresentados os resultados relativos à área da elipse inteira, aos volumes dos segmentos cortados de um elipsóide, parabolóide ou hiperbolóide de revolução em torno de um eixo principal. Além disso, aborda-se o problema de seccionar uma esfera com um plano.

Esta obra investiga algumas das propriedades dos sólidos gerados pelas cônicas, aos quais Arquimedes deu o nome de "conoides". É importante ressaltar que os conceitos aplicados por Arquimedes para o cálculo de volumes o aproximaram muito do que conhecemos hoje sobre o cálculo integral.

4.6 Sobre Corpos Flutuantes

A obra "Sobre os Corpos Flutuantes" é composta por dois livros. O Livro I contém 9 proposições de um total de 96 e representa a primeira aplicação da matemática à hidrostática. Com este trabalho, Arquimedes lançou as bases da moderna hidrostática, oferecendo uma teoria completa sobre corpos flutuantes, sendo uma obra tão abrangente que pouco restou a ser desenvolvido.

Duas proposições se destacam nesse trabalho:

“Proposição 5: Um sólido mais leve que um fluido ficará imerso de forma que o peso do sólido será igual ao peso do fluido deslocado.” Contador (2013, p.172)

“Proposição 7: Um sólido mais pesado que um fluido, quando submerso, atingirá o fundo e o sólido será, quando pesado no fluido, mais leve que seu peso real, de um tanto igual ao peso do fluido deslocado.” Contador (2013, p. 173)

O Livro II demonstra uma análise matemática sofisticada e detalhada sobre a posição de equilíbrio de segmentos de paraboloides quando colocados em fluidos, mostrando que a posição de equilíbrio depende das gravidades específicas relativas do paraboloide sólido e do fluido em que flutua.

4.7 Sobre as medidas do círculo

Este trabalho, intitulado "Sobre as Medidas do Círculo" ou *"kýklon métresis",* é dedicado à geometria plana. Considerado um dos mais populares no período medieval, este livro é composto por três proposições, sendo a terceira a mais famosa, pois estabelece a relação entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro com o seguinte resultado: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Através do método da exaustão, Arquimedes fornece uma prova de que a área do círculo é igual à de um triângulo retângulo em que os catetos são a circunferência e o raio do círculo, fornecendo algumas aproximações racionais de raízes irracionais.

“Proposição 3: A proporção da circunferência de qualquer círculo para o seu diâmetro é menor que $3\frac{1}{7}$ e maior que $3\frac{10}{71}$.” Contador (2013, p. 186)

Observamos que Arquimedes buscou um valor para π por meio do estudo de polígonos regulares inscritos e circunscritos, com suas duplicações do número de lados.

4.8 O Arenário

O "Arenário" ou "*Arenarius*" é o tratado no qual Arquimedes, partindo do menor elemento, um grão de areia, dedicou-se a calcular o maior, o universo, conseguindo assim estimar quantos grãos de areia seriam necessários para preencher o Universo.

O universo concebido por Arquimedes era uma esfera oca com o raio igual à distância entre a Terra e o firmamento celeste. Vale ressaltar que Arquimedes se baseou no conceito de Universo de Aristarco, predominante em sua época. Foi nesta obra que ele apresentou um novo sistema numérico que lhe permitiu lidar com números muito grandes e realizar cálculos precisos.

Foi através deste trabalho que Arquimedes percebeu a necessidade de um sistema de numeração mais adequado, uma vez que apenas o sistema de numeração arcaico estava disponível. Ele desenvolveu um sistema numérico mais avançado, onde a unidade correspondia a 10 mil em nosso sistema, denominando esta unidade de "miríade".

4.9 O Método

A obra intitulada "O Método", ou *"Ephódion"*, cujo título completo é "Sobre Teoremas Mecânicos, Métodos para Eratóstenes", foi recuperada pelo dinamarquês Johan Ludvig Heiberg. Trata-se de um trabalho de grande importância e interesse, pois revela uma particularidade do pensamento de Arquimedes que não é vista em outros trabalhos.

Esta obra, no modelo que possuímos, abrange a maior parte do texto de cerca de 15 proposições, e é destinada como uma carta a Eratóstenes, renomado matemático e diretor da Universidade de Alexandria.

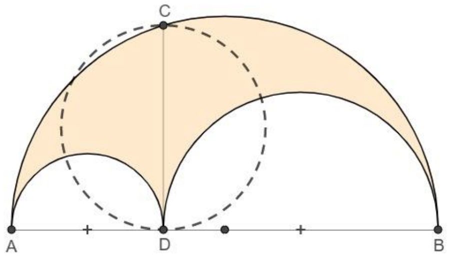
Por meio deste trabalho, Arquimedes apresentou como desenvolveu seus métodos e quais técnicas foram empregadas. Demonstrou vários resultados relacionados à estática e à determinação do centro de gravidade de diversas figuras, tais como cone, cilindro e prisma. Além disso, expôs a fórmula para calcular a área e o volume da esfera, assim como o método do equilíbrio.

4.10 O Livro dos Lemas

O Livro dos Lemas, também conhecido como *Liber Assumptorum* em latim, é uma obra que foi preservada em uma versão escrita em árabe e posteriormente traduzida para o latim. O texto consiste em 15 teoremas geométricos mais sofisticados. Dentre esses teoremas, destaca-se a Proposição 5, também conhecida como "Os Círculos Gêmeos de Arquimedes":

“Se dois círculos E e F, forem inscritos tangentes ao arbelo e ao segmento CD, um em cada lado, então os dois círculos serão congruentes.” Contador (2013, p. 228)

Figura 2 - Arbelo no Livro dos Lemas



Fonte: Silva e Queiroz (2022)

4.11 Stomachion

O trabalho Stomachion é uma espécie de jogo geométrico, um quebra-cabeças geométrico. Essa obra tem origem em dois manuscritos incompletos que foram copiados de manuscritos anteriores que se perderam. O material utilizado para construir o quebra-cabeça foi o marfim, e consiste em um conjunto de 14 peças poligonais planas, com a particularidade importante de que podem ser unidas para formar um quadrado.

É impressionante que existam 17.152 maneiras distintas de montar um quadrado utilizando apenas as 14 peças do quebra-cabeça. Através desse trabalho, muitos estudiosos alegam que Arquimedes pode ter sido o primeiro homem a criar e trabalhar com a Análise Combinatória.

4.12 O Problema dos Bois

Sobre essa obra, O Problema dos Bois, existem dúvidas quanto à sua procedência, mas normalmente é atribuída a Arquimedes. Este assunto traz um problema relacionado a quatro cores presentes em uma determinada quantidade de bois. A primeira parte do problema leva a um sistema de sete equações indeterminadas com oito incógnitas. Na segunda parte, são adicionadas mais duas condições, informando que certo par de incógnitas tem como soma um quadrado perfeito e que outro par de incógnitas tem como soma um número triangular.

É possível perceber o quanto foi difícil para Arquimedes resolver este problema, lembrando que neste período não existiam símbolos algébricos. Portanto, o resultado é apresentado geometricamente, representando a soma dos quadrados dos números inteiros até n termos.

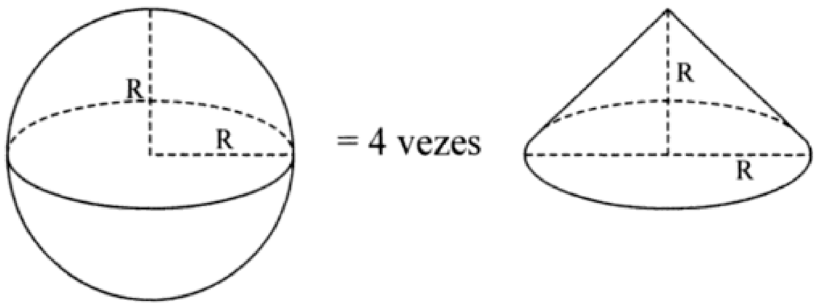
Este problema criado por Arquimedes está associado à teoria dos números e foi lançado como um desafio aos matemáticos da época.

5. A ESFERA E O CILINDRO SOB O OLHAR DE ARQUIMEDES

Como descrito na seção 4.3 de nosso texto, em seu tratado "Sobre Esfera e Cilindro, Arquimedes imaginou a esfera como um sólido obtido pela rotação de um polígono regular com um número par de lados em torno de um diâmetro, fazendo o número de lados do polígono crescer indefinidamente. Por meio de criativas relações geométricas, Arquimedes consegue provar que a área da superfície da esfera é igual a 4 (quatro) vezes a área de seu círculo máximo, ou ainda, na notação atual, $4\pi r^2$, onde r representa o raio do círculo máximo da esfera.

Uma vez estabelecida a área da esfera, Arquimedes se preocupou em calcular o volume dessa mesma esfera e, na proposição 34 do tratado, afirmou que o volume de qualquer esfera é igual a 4 (quatro) vezes o volume do cone que tem como altura o raio da mesma e como base seu círculo máximo (GARBI, 2010). Na linguagem atual, a essa proposição pode ser descrita pela expressão $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Figura 3 - Volume da esfera comparada ao volume do cone



Fonte: Garbi (2010)

Geraldo Ávila, em seu artigo “Arquimedes, a esfera e o cilindro”, publicado na Revista do Professor de Matemática de número 10 (RPM – 10), nos apresenta uma característica das obras de Arquimedes e, também, traz a reflexão sobre como Arquimedes teria chegado às suas descobertas (Ávila, 1987, p. 10):

> “Esse livro está vazado em estilo rigoroso, num encadeamento preciso de postulados, definições e teoremas. Aliás, esse é o estilo das demais obras de Arquimedes que chegaram até nós e que são conhecidas desde a Idade Média. Tão grande é a preocupação com o rigor e com a estruturação lógica das demonstrações, que o leitor sequer percebe como o autor teria chegado a suas descobertas. Aliás, isso é frequente em Matemática, pois os caminhos da descoberta quase sempre são diferentes dos processos da demonstração. Em consequência disso, os estudiosos das obras de Arquimedes muitas vezes manifestaram surpresa diante de seus escritos, sentindo-se frustrados por não conseguirem entender como ele fez muitas de suas descobertas. Houve até quem suspeitasse que ele usasse algum processo de descoberta que propositadamente escondera da posteridade.”

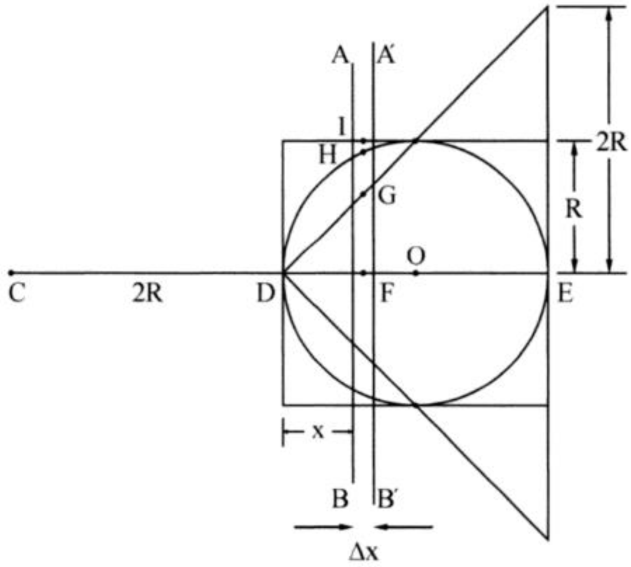
Os caminhos utilizados por Arquimedes para fazer suas descobertas, incluindo as relações para a esfera, estão descritos na obra conhecida como “O Método”, que foi apresentada nesse Trabalho na seção 4.9. Nessa publicação, o prefácio contém uma carta enviada a Eratóstenes de Alexandria (276 a.C. – 194 a.C.), onde Arquimedes relata suas ideias e métodos aplicados. É interessante observar do prefácio que a abordagem para algumas questões da Geometria era feita por meio de conceitos e relações da Física, como os presentes em Estática. O recorte da carta escrita a Eratóstenes está publicado no artigo do Geraldo Ávila na RPM – 10 (Ávila, 1987, p. 10):

> *Arquimedes a Eratóstenes,*
>
> *Saudações.*
>
> *Enviei-lhe em outra ocasião alguns teoremas descobertos por mim, meramente os enunciados, deixando-lhe a tarefa de descobrir as demonstrações então omitidas... Vendo em você um dedicado estudioso, de considerável eminência em Filosofia e um admirador da pesquisa matemática, julguei conveniente escrever-lhe para explicar as peculiaridades de um certo método pelo qual é possível investigar alguns problemas de Matemática por meios mecânicos... Certas coisas primeiro se tornaram claras para mim pelo método mecânico, embora depois tivessem de ser demonstradas pela Geometria, já que sua investigação pelo referido método não conduzisse a provas aceitáveis. Certamente é mais fácil fazer as demonstrações quando temos previamente adquirido, pelo método, algum conhecimento das questões do que sem esse conhecimento... Estou convencido de que ele será valioso para a Matemática, pois pressinto que outros investigadores da atualidade ou do futuro descobrirão, pelo método aqui descrito, outras proposições que não me ocorreram.*

Assim, diante da exposição e retomando o objetivo desse Trabalho de Conclusão de Curso, resgatando uma passagem de destaque da História da Matemática, apresentaremos, tomando como referência o texto “A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática, de Gilberto Garbi (2010), as ideias e demonstrações publicadas por Arquimedes sobre volumes e áreas para a esfera.

Partiremos, conforme a figura 4 a seguir, de uma esfera de raio r, de um cilindro circunscrito a esfera e de um cone parcialmente inscrito e parcialmente circunscrito à mesma esfera. Na imagem apresentada na figura 4, é possível observar a relação descrita por meio de um corte desse grupo de elementos geométricos. O corte indicado foi feito por um plano que contém o centro da esfera e o eixo DE do cilindro.

Figura 4 - Cálculo do volume da esfera



Fonte: Garbi (2010)

Sejam AB e $A'B'$ planos perpendiculares ao eixo DE e Δx a distância entre eles. Os planos indicados são tomados de forma que cortem os três sólidos em "fatias muito finas" e cujos volumes, de forma aproximada, sejam proporcionais a seus respectivos "pesos" e exibidos a seguir.

- "fatia" do cone:

$$\pi(FG)^2\Delta x = \pi x^2 \Delta x \qquad (5.1)$$

- "fatia" da esfera:

$$\pi(FH)^2\Delta x = \pi(DE)(FE)\Delta x = \pi x(2r - x)\Delta x \qquad (5.2)$$

- "fatia" do cilindro:

$$\pi(FI)^2\Delta x = \pi r^2 \Delta x \qquad (5.3)$$

As aproximações tomadas para os volumes das "fatias" foram feitas pelo volume de um cilindro, já conhecido à época de Arquimedes e, para a expressão obtida no volume da "fatia" da esfera, destacamos o uso de relações métricas no triângulo retângulo DHE, de modo que $(FH)^2 = DF \cdot FE$.

A partir desse momento, o conceito de **momento de rotação** dos "pesos" foi utilizado por Arquimedes. As "fatias" do cone e da esfera são penduradas no ponto C (figura 4), enquanto a "fatia" do cilindro permanece em sua posição inicial, ou seja, a uma distância x do ponto D. Retomando que o momento de uma força em relação a um ponto é *o produto dessa força por sua distância ao ponto de referência*, o momento dos "pesos das fatias" de cada um dos "lados" do ponto D pode ser escrito como:

- "fatia" do cone mais "fatia" da esfera, no sentido anti-horário, multiplicadas por $2r$:

$$2r\pi x^2 \Delta x + 2r\pi x(2r - x)\Delta x = \boldsymbol{4\pi x r^2 \Delta x} \quad (5.4)$$

- "fatia" do cilindro, no sentido horário, multiplicada por x:

$$\boldsymbol{x\pi r^2 \Delta x} \quad (5.5)$$

Então, de acordo com as duas últimas expressões, qualquer que seja a posição que seja feito o corte dos planos AB e $A'B'$ (para qualquer x), a relação entre os momentos será de 4 para 1 e, fazendo os planos AB e $A'B'$ deslocarem-se de forma contínua do ponto D ao ponto E e repetindo a "operação" de colocar "fatias" do cone e da esfera no ponto C, teremos, ao final dessas "operações", todas as partes que compõe esses dois sólidos e a soma de todas as partes os constituirão. Visto de outra maneira, o momento no sentido anti-horário de rotação será proporcional à soma dos dois volumes. Analogamente, as "fatias" do cilindro, todas iguais, variarão sobre DE mas, para cada uma de suas "fatias" à esquerda do ponto O, existe outra "fatia" igualmente distante deste ponto e a sua direita e, para efeito de momento de rotação, todo o "peso" do cilindro pode ser concentrado no ponto O. Uma vez que esse "peso" é proporcional ao volume do cilindro, a relação já determinada de 4 para 1 nos mostra que, para a existência do equilíbrio da esfera e do cone localizados no ponto C, seria necessário localizar 4 cilindros no ponto O e podemos interpretar essas informações por meio da seguinte expressão:

$$2r\left(V_{esfera} + V_{cone}\right) = 4(r \cdot V_{cilindro}) \quad (5.6)$$

Ou ainda:

$$V_{esfera} = 2V_{cilindro} - V_{cone} \quad (5.7)$$

Mas,

$$V_{cilindro} = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3 \quad (5.8)$$

e

$$V_{cone} = \frac{1}{3}\pi(2r)^2 \cdot 2r = \frac{8}{3}\pi r^3 \quad (5.9)$$

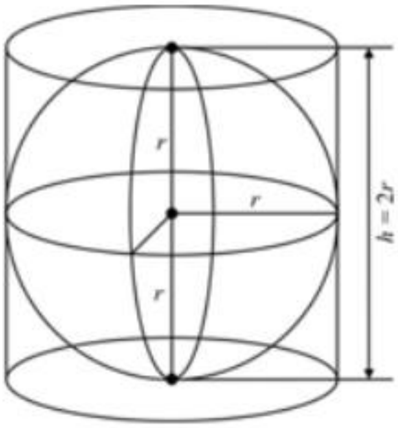
Temos:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (5.10)$$

Onde chegamos à expressão para o cálculo do volume de uma esfera de raio r, em notação atual.

Ainda, na obra Sobre a Esfera e o Cilindro, Arquimedes apresenta um compêndio das relações entre áreas e volumes do cilindro e da esfera, inscrevendo uma esfera em cilindro equilátero (sua altura é igual ao diâmetro da base). A figura 5 nos mostra a situação de ponto de partida de Arquimedes:

Figura 5 - Área total e volume do cilindro em relação à esfera



Fonte: Garbi (2010)

Em termos matemáticos, podemos escrever:

- Área total do cilindro:

$$= 2\pi r h + 2\pi r^2 = 6\pi r^2 \qquad (5.11)$$

$$= \frac{3}{2}(4\pi r^2) \qquad (5.12)$$

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \text{Á}\boldsymbol{rea\ da\ Esfera} \qquad (5.13)$$

- Volume do cilindro:

$$= 2\pi r^3 \qquad (5.14)$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \qquad (5.15)$$

$$= \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}} \cdot \boldsymbol{V_{esfera}} \qquad (5.16)$$

De onde concluímos que a área total e o volume do cilindro são, respectivamente, $\frac{3}{2}$ da área e do volume da esfera. Estabelecidas essas relações, Arquimedes pode enunciar o seguinte teorema: **“O cilindro é uma vez e meia a esfera, em área e volume”.**

Ávila (1987, p.1), destaca que:

> entre o muito que inventou parece-me que o que mais apreciava era a demonstração da proporção que há entre o cilindro e a esfera nele contida, pelo que pediu a seus parentes que, quando morresse, mandassem colocar sobre sua sepultura um cilindro contendo uma esfera com uma inscrição da proporção pela qual o que contém excede o conteúdo" (Plutarco). Cícero quando servia na Sicília como questor, encontrou uma lápide com uma esfera inscrita num cilindro, pelo que julgou haver descoberto o túmulo de Arquimedes. Cuidou então de restaurá-lo, já que ele se encontrava totalmente abandonado.

Esse é um fato da Histórica da Matemática de grande importância para a construção do conhecimento matemático e destaca, também a genialidade das ideias e das contribuições de Arquimedes para a ciência.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como principal objetivo explorar as contribuições matemáticas de Arquimedes em seu tratado Sobre a Esfera e o Cilindro, com ênfase para as relações de cálculo de áreas e volumes entre esses sólidos. A pesquisa nos permitiu observar, por meio de uma revisão bibliográfica, o quanto Arquimedes era além de seu tempo e como foi um grande gênio de sua época, evidenciando suas contribuições para a humanidade.

A partir dessa pesquisa, foi possível, compreender as relações estabelecidas por Arquimedes em diversas obras, de onde destacamos o fato de que o volume da esfera corresponde a dois terços do volume do cilindro que a circunscreve. Além dessa grande descoberta, outras também muito importante como: cálculo do valor de π, as ideias iniciais do pré-cálculo integral, o estudo do centro da gravidade entre outras descobertas que influenciaram outros campos como a Engenharia, Física e Astronomia.

Embora este trabalho tenha explorado de forma abrangente o tratado de Arquimedes, reconhecemos as limitações do nosso texto, uma vez que nos concentramos nas ideias de Arquimedes para as relações entre áreas e volumes exibidas em seu tratado Sobre Esferas e Cilindros.

Futuras pesquisas podem investigar como o tratado de Arquimedes pode ser utilizado como recurso pedagógico para o ensino de geometria e volumes. Além disso, podem ser estudadas as demais obras de Arquimedes e suas aplicações, a fim de evidenciar a importância do conhecimento histórico da matemática na antiguidade e as grandes descobertas que são essenciais para os estudos atuais.

Por fim, este trabalho reafirma a importância de Arquimedes como um dos maiores pensadores da matemática antiga e destaca como suas contribuições continuam a inspirar estudiosos e educadores nos dias de hoje. Assim, aguarda-se que com essa pesquisa venha a motivar o interesse pela história da matemática e suas grandes descobertas e contribuições dos grandes gênios da antiguidade.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. Arquimedes, a esfera e o cilindro. **Revista do Professor de Matemática**, v. 10, p. 10. 1987. Disponível em: https://rpm.org.br/cdrpm/10/3.htm. Acesso em: 20 dez. 2024.

BOYER, C.B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

CONTADOR, P.R.M. **Arquimedes:** O mito e sua obra. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.

CHAQUIAM, M. **História da matemática em sala de aula:** proposta para integração aos conteúdos matemáticos. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

D'AMBROSIO, U. **A história da matemática**: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 97-115.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas, SP: Unicamp, 2004.

GALVÃO, M.E.E.L. **História da Matemática:** dos números à geometria. Osasco: Edifieo, 2008.

GARBI, G. G. **A rainha das ciências:** um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social**. São Paulo, SP: Atlas, 2008. p.75-88.

SEVERINO, A.J. **Metodologia do trabalho cientifico.** 23. ed. São Paulo: Cortez, 2007.

SILVA, B.; QUEIROZ, M. Arquimedes: Arbelos e as Circunferências Gêmeas. Anais: Encontro de Matemática Pura e Aplicada, v. 2,2022, ISSN n° 2764-8966.

STEWART, I. **Desbravadores da Matemática:** Da alavanca de Arquimedes aos fractais de Mandelbrot. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2019.