INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE PERNAMBUCO - *CAMPUS* BARREIROS

DEPARTAMENTO DE DESENVOLVIMENTO EDUCACIONAL

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

JAKLINE MARIA ALVES SOARES DA SILVA

UM ESTUDO DE QUESTÕES DA OPEMAT SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Barreiros/PE

2023

JAKLINE MARIA ALVES SOARES DA SILVA

UM ESTUDO DE QUESTÕES DA OPEMAT SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Coordenação da Especialização em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco – *Campus* Barreiros, como requisito para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Raul Bueno Lins Campos

Barreiros/PE

2023

Sistema de Bibliotecas Integradas do IFPE (SIBI/IFPE) – Biblioteca do *Campus* Barreiros
Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S586u Silva, Jakline Maria Alves Soares da.
Um estudo de questões da OPEMAT sobre análise combinatória / Jakline Maria Alves Soares da Silva. – 2023.
31 f. : il.

Orientador: Prof. Me. Raul Bueno Lins Campos.
Monografia (Especialização em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, *Campus* Barreiros, 2023.

1. Análise combinatória – Estudo e ensino. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Análise combinatória - Problemas, questões, exercícios. 4. Matemática – Olimpíadas. 5. Análise matemática – Problemas, questões, exercícios. I. Campos, Raul Bueno Lins, orientador. II. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco. III. Título.

CDD 511.6

Bibliotecária: Iara Maria Felix Silva - CRB-4 /1504

JAKLINE MARIA ALVES SOARES DA SILVA

UM ESTUDO DE QUESTÕES DA OPEMAT SOBRE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Trabalho aprovado. 27 de novembro de 2023.

____
Professor Me. Raul Bueno Lins Campos – Orientador
(IFPE - Campus Barreiros)

____
Professor Dr. Douglas Lopes Bernardo – Coorientador
(IFPE - Campus Barreiros)

____
Professor Dr. Gerson Geraldo Chaves
Avaliador 1 - (IFPE - Campus Barreiros)

____
Professora Ma. Ivone Gomes Rodrigues
Avaliador 2 - (IFPE - Campus Barreiros)

Barreiros/PE

2023

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de vivenciar todas estas coisas, reconheço que sua vontade é soberana sobre minha vida e que sem sua permissão nada eu seria ou faria.

Ao meu esposo Israel por todo amor, incentivo e companheirismo nessa minha jornada.

Aos meus pais, Jaime e Ivanilda por toda correção no tempo oportuno, pela doação de seu amor e cuidado a mim e a meus filhos, bem como toda ajuda, incentivo e compreensão.

Aos meus filhos Isaac e Isabelly por todo carinho e ânimo que me dão nos mínimos gestos.

A minha amiga Joselita por todo incentivo, empatia e encorajamento na vida académica.

Aos colegas e amigos da turma 2023.1 por toda a cumplicidade, partilha de descobertas, aprendizados e amadurecimento.

A todo corpo docente do curso de Especialização em Matemática pela partilha de conhecimento, pelo comprometimento e incentivo durante as aulas.

Em especial, ao professor Raul Bueno pela orientação, direcionamento, paciência e atenção ofertada durante o desenvolvimento da dissertação, bem como nas aulas.

Ao Professor Douglas pela coorientação, incentivo, direcionamento e paciência.

Por fim, deixo registrado os meus agradecimentos a todos que me permitiram viver esse processo, bem como a todos com quem pude compartilhar momentos de descobertas e aprendizados. Minha estimativa é poder encerrar este ciclo com êxito para que novas possibilidades e novos caminhos sejam traçados.

RESUMO

Podemos encontrar em muitas situações do cotidiano aplicações da Matemática, porém, ao adentrarmos o ambiente da sala de aula, vemos alunos ainda desinteressados em relação a essa disciplina que é tão importante para equacionar diversas situações do dia-a-dia. Pensando em deixar a Matemática mais atrativa para os alunos e motivá-los no que tange ao conhecimento aplicável dessa área, existe no estado de Pernambuco a OPEMAT (Olimpíada Pernambucana de Matemática), que promove formação para professores, fomentando dessa forma o estímulo de docentes e discentes a exercerem a aplicação dos conceitos matemáticos de forma constante. Diante disso, esse trabalho tem por finalidade analisar questões de análise combinatória das provas da OPEMAT, fazendo a comparação do gabarito da prova com a resolução por um método alternativo, que pode vir a ser mais fácil para o aluno. Neste trabalho abordamos formas diferentes de resolver 4 questões que correspondem ao segundo nível da prova da OPEMAT. Após as resoluções foi possível observar que existem possibilidades de chegar ao mesmo gabarito oficial usando outros mecanismos. Com isso, foi possível concluir que o aluno, utilizando diferentes técnicas podem resolver com mais facilidade questões de análise combinatória, mostrando também que é importante praticar a resolução de questões, para que o estudante adquira mais familiaridade com a resolução de problemas e consiga ter diversos meios e experiências para resolver questões de Matemática com mais facilidade.

Palavras-chave: OPEMAT; análise combinatória; Matemática; resolução de questões.

ABSTRACT

We can find applications of mathematics in many everyday situations, however, when we enter the classroom environment, we see students who are still uninterested in this subject, which is so important for solving different everyday situations. Thinking about making mathematics more attractive to students and motivating them with regard to applicable knowledge in this area, there is OPEMAT (Olimpíada Pernambucana de Matemática) in the state of Pernambuco, which promotes training for teachers, thus encouraging the stimulation of teachers and students to constantly apply mathematical concepts. Therefore, this work aims to analyze combinatorial analysis issues of the OPEMAT tests, comparing the test answer sheet with the resolution using an alternative method, which may be easier for the student. In this work we address different ways of solving 4 questions that correspond to the second level of the OPEMAT test. After the resolutions, it was possible to observe that there are possibilities of reaching the same official template using other mechanisms. With this, it was possible to conclude that the student, using different techniques, can more easily solve combinatorial analysis questions, also showing that it is important to practice solving questions, so that the student acquires more familiarity with problem solving and can have different means and experiences to solve math questions more easily.

Keywords: OPEMAT; combinatorial analysis; Mathematics; resolution of issues.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Matemática está presente constantemente na vida das pessoas, porém o fato de aplicá-la no dia-a-dia ainda assusta alguns indivíduos, e essas dificuldades muitas vezes são advindas de uma aprendizagem defasada que ocorre muitas vezes na escola. Com isso, os estudantes criam uma pré-concepção de que a Matemática é muito complexa, contribuindo para um distanciamento dos estudantes com relação à disciplina. Assim, eles não conseguem desenvolver habilidades e significado para os conceitos vivenciados durante as aulas.

Diante desse fato, o docente pode desenvolver a Matemática de forma mais atrativa para seus alunos, de modo que, oportunize a compreensão e aplicação em diferentes situações do seu cotidiano. Até porque, a contextualização da disciplina, é uma ferramenta eficaz para a promoção de uma aprendizagem significativa, propiciando aos discentes desenvolverem a criatividade, o raciocínio lógico e as habilidades específicas na área da Matemática.

Uma das formas de diminuir o déficit de aprendizagem dessa disciplina e, também de estimular os discentes a praticá-la, é a participação de estudantes em Olimpíadas de Matemática, que acontecem em diversas escalas e níveis. No Brasil, essas olimpíadas têm apresentado uma considerável crescente e têm colaborado com a elevação do interesse da Matemática a partir de situações práticas (Melo *et al.*, 2019). As olimpíadas de Matemática, além de despertar o interesse dos alunos por desafios matemáticos, resolução de problemas e desenvolvimento do raciocínio, também possibilitam a inclusão social por meio da difusão do conhecimento (Morais *et al.*, 2020). Nesse sentido, em 2015, foi criada a OPEMAT (Olimpíada Pernambucana de Matemática), sendo realizada no estado de Pernambuco, no intuito de estimular e melhorar o aprendizado dos discentes das redes públicas e particulares do estado.

Dentre os variados problemas abordados nas olimpíadas de Matemática, os problemas de análise combinatória diversas vezes são desafiadores para os discentes, já que é possível a construção de diferentes agrupamentos, sem que haja a necessidade de sistematizar o processo. Com isso, é importante analisar as etapas lógicas que os alunos seguem para poder solucionar esses tipos de problemas, valorizando, assim, sua maneira de pensar e de aplicar seus conhecimentos em

Matemática.

Diante desse contexto, este trabalho tem como objetivo analisar questões de análise combinatória de diferentes edições da OPEMAT, com a finalidade de apontar os conhecimentos prévios necessários para chegar a resolução correta dos itens selecionados, bem como traçar um mecanismo de resolução diferente dos expostos nos gabaritos oficiais, disponibilizados pela banca organizadora dessa olimpíada.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo iremos apresentar pontos importantes para o desenvolvimento do trabalho, trazendo uma discussão sobre o Ensino da Matemática em Pernambuco e a OPEMAT. Além disso, discutiremos as contribuições que a OPEMAT tem propiciado para alunos e professores com relação ao ensino-aprendizagem dessa área de conhecimento. Por fim, abordaremos os aspectos sobre a resolução de problemas matemáticos.

2.1 O Ensino da Matemática em Pernambuco e a OPEMAT

O Ensino da Matemática em Pernambuco segue as diretrizes estabelecidas pelo Ministério da Educação (MEC) do Brasil, que incluem a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o ensino fundamental e médio. Além das diretrizes gerais, é importante mencionar que em Pernambuco ocorrem iniciativas para melhorar o Ensino da Matemática, como a realização de olimpíadas Matemáticas e a promoção de atividades extracurriculares relacionadas à disciplina (Pereira; Silva, 2023), sendo a OPEMAT uma dessas iniciativas. Em sua primeira edição, essa olimpíada de Matemática contou com um número singelo de 150 participantes das cidades de Caruaru e Recife. Atualmente, a OPEMAT é realizada em duas fases, a primeira consiste em uma prova de 12 questões objetivas, e a segunda fase é composta por uma prova de 5 questões dissertativas (Morais *et al.,* 2020). As provas incluem questões de múltipla escolha, questões discursivas e problemas matemáticos desafiadores. As questões geralmente abrangem uma variedade de tópicos matemáticos, desde aritmética até álgebra, geometría, teoria dos números e combinatória.

A OPEMAT é uma competição para discentes dos ensinos fundamental e médio das escolas públicas e particulares, através de prova realizada em dez polos espalhados pelo estado de Pernambuco. A prova é dividida em três níveis e com públicos diferentes. Os estudantes do 6° e 7° anos do ensino fundamental correspondem aos competidores do nível 1; os do 8° e 9° do ensino fundamental ao nível 2, e os três anos do ensino médio ao nível 3. Assim, percebe-se que as questões são adaptadas para diferentes faixas etárias e níveis de conhecimento.

As Olimpíadas de Matemática têm por objetivo principal estimular o interesse pela Matemática, despertando nos discentes uma forma diferente de vê-la, deixando de lado a ideia de que ela é uma disciplina difícil e vendo-a como algo essencial para toda a vida do estudante. As olimpíadas também visam promover a descoberta de talentos, promovendo o desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas, incentivando a pesquisa Matemática e, consequentemente, melhorando o ensino da mesma.

2.2 A resolução de problemas matemáticos

Um dos problemas que dificulta o aprendizado de Matemática por parte dos nossos discentes é a falta de prática em resolver questões. Durante sua vida eles adquirem diversos tipos de conhecimentos, porém com a ausência da prática eles não percebem como esses conhecimentos podem ser aplicados no seu cotidiano e muitos dos conteúdos discutidos na escola ficam apenas na parte teórica e não são mais colocados em prática. Em seu trabalho Silva (2020) enfatiza que

> Muitos estudantes ao se depararem com questões-problemas bem elaboradas relatam a dificuldade que enfrentam durante sua interpretação, visto que em sala de aula geralmente são apresentados exercícios diretos, cujo único propósito seria a utilização de fórmulas apresentadas (Silva, 2020, p. 28).

Para que se possa resolver problemas matemáticos de maneira fácil, se faz necessária a aplicação de algumas estratégias associadas a uma prática constante de resolução de exercícios. Assim, os alunos se tornam mais habilidosos na resolução de problemas matemáticos e à medida que eles se familiarizam com diferentes tipos de problemas, as questões vão ficando mais fáceis de interpretar e resolver (Barbosa *et al.*, 2015).

Na resolução de problemas de análise combinatória, tópico escolhido para ser estudado, existem várias estratégias e técnicas que podem ser úteis para encontrar o número de combinações, permutações ou arranjos possíveis para uma situação. Por exemplo, podem ser utilizados os princípios fundamentais (princípio multiplicativo e princípio aditivo), fatorial, combinações, arranjos, diagramas de árvore, princípio da inclusão-exclusão, dentre outros.

O trabalho interdisciplinar também pode ajudar o discente a melhorar o seu raciocínio e agilidade na resolução de questões. Como exemplo podemos envolver a disciplina de português nas atividades, pois a interpretação da questão é um dos pontos chaves para a resolução da mesma, por meio da identificação correta da incógnita do problema.

3 CONSIDERAÇÕES MATEMÁTICAS SOBRE COMBINATÓRIA

Neste capítulo trataremos sobre o conjunto de conceitos abordados com frequência em análise combinatória e a aplicação de suas fórmulas. Também traremos exemplos possíveis do dia-a-dia do estudante, com suas respectivas resoluções, pontuando os seguintes conteúdos: Princípio Fundamental da Contagem (PFC) e Princípio Aditivo; Permutação; Permutação com Repetição; Combinação e Arranjo simples.

3.1 O Princípio Fundamental da Contagem (PFC)

O princípio fundamental da contagem (PFC), também conhecido como Princípio Multiplicativo, é um conceito importante em análise combinatória que descreve como calcular o número de possibilidades para um evento constituído de n etapas consecutivas e independentes. Ele é usado quando uma tarefa pode ser dividida em etapas e o número de escolhas em cada etapa não depende das escolhas feitas nas etapas anteriores (Garcia, 2017).

Vamos considerar um exemplo simples para ilustrar o princípio multiplicativo. Suponha que tenhamos que escolher uma camiseta, uma calça e um par de sapatos, logo temos 3 opções de camisetas, 4 calças e 2 pares de sapatos diferentes para escolher. Organizando as informações temos 3 maneiras $(m_1 = 3)$ de escolher uma camiseta, 4 maneiras $(m_2 = 4)$ de escolher uma calça, e 2 maneiras $(m_3 = 2)$ de escolher um par de sapatos. Dessa forma, o cálculo do número total de possibilidades da montagem de um *look*, pode ser realizado a partir da aplicação do princípio multiplicativo. Sendo assim, temos:

$$Total\ de\ maneiras = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24\ maneiras$$

Portanto, podemos montar 24 conjuntos de roupas diferentes escolhendo uma camiseta, uma calça e um par de sapatos a partir das opções dadas. O princípio multiplicativo é fundamental na análise combinatória, pois o mesmo permite resolver problemas nos quais as escolhas são feitas em etapas consecutivas e independentes.

3.2 O princípio aditivo

O Princípio Aditivo é um conceito da teoria das probabilidades e da teoria combinatória que descreve a maneira de contar o número de resultados possíveis em uma situação onde podemos escolher entre dois ou mais caminhos mutuamente exclusivos para alcançar um objetivo ou resultado. Em outras palavras, o Princípio Aditivo diz que para calcular o número total de maneiras de fazer algo quando você tem opções disjuntas, podemos simplesmente somar o número de maneiras de cada opção.

O princípio aditivo, diferentemente do PFC, é usado para eventos que não podem ocorrer simultaneamente e envolve a soma de resultados, enquanto o PFC é usado para eventos sucessivos e envolve a multiplicação de resultados. Ambos os princípios são fundamentais na teoria das probabilidades e na teoria combinatória para contar o número de maneiras de realizar eventos ou escolhas em diferentes contextos.

3.3 Permutação

A permutação é um conceito fundamental na análise combinatória que se refere à disposição ordenada de elementos de um conjunto. Em outras palavras, é a forma de organizar os elementos de um conjunto em uma ordem específica. Nas permutações simples, todos os elementos são distintos e o interesse está em calcular o número de maneiras diferentes em que os elementos podem ser dispostos. A relação para calcular o número de permutações simples de n elementos é dada por

$$P_{(n,r)} = n!$$

Na qual "$n!$" (lê-se "n fatorial") representa o produto de todos os inteiros positivos de 1 a n.

As permutações são usadas em muitos problemas de análise combinatória, como arranjos de objetos, ordenação de elementos, quantidade de anagramas com as letras de uma palavra, cálculos de possibilidades em jogos e muito mais. Elas são uma parte importante da teoria das combinações (Souza; Aragão, 2023).

Como exemplo de permutação, vamos considerar três cartas numeradas: A, B e C. Agora, no intuito de determinar todas as permutações possíveis dessas três cartas em diferentes ordens, as permutações seriam

ABC
ACB
BAC
BCA
CAB
CBA

Cada uma dessas permutações representa uma ordem única das três cartas A, B e C. Este é um exemplo de permutação simples, que também pode ser realizado utilizando a fórmula de permutação para calcular o número de permutações possíveis, que no caso de 3 elementos é $3!$, indicando que há 6 permutações possíveis dessas três cartas.

3.4 Permutação com repetição

Nesse tipo de permutação, alguns elementos se repetem. A fórmula para calcular o número de permutações com repetição de n elementos, onde n_1 elementos são iguais, n_2 elementos são iguais, e assim por diante, é dada por

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_x} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots\,n_x!}$$

Na qual n é o número de vezes que um número se repete, e $n_1, n_2, \ldots, n_x$, representam o número de vezes que cada elemento se repete.

Vamos considerar um exemplo para ilustrar o conceito de permutação com o problema para determinar quantos anagramas da palavra "ABA" existem? Analisando o problema percebe-se que temos 3 letras: A, B, e A. Duas letras são idênticas (A) e uma letra é diferente (B). Portanto, estamos lidando com uma permutação com repetição. Com isso, temos

$$n\ (número\ total\ de\ elementos = 3$$
$$n_1\ (número\ de\ vezes\ que\ A\ se\ repete) = 2$$
$$n_2\ (número\ de\ vezes\ que\ B\ se\ repete) = 1$$

Aplicando a fórmula para permutações com repetição, temos

$$P_{(3;2,1)} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = P = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 3$$

Portanto, existem 3 maneiras diferentes de arranjar as letras da palavra "ABA", sendo elas: AAB, ABA, BAA.

3.4.1 Combinação

A combinação é outro conceito fundamental na análise combinatória. Ao contrário das permutações, na qual apenas a ordem dos elementos importa, as combinações se concentram em selecionar grupos de elementos sem levar em consideração a ordem em que eles foram escolhidos (Coutinho; Cerqueira, 2016).

Uma combinação é um conjunto de elementos escolhidos a partir de um conjunto maior, sem repetição, no qual a ordem dos elementos não é importante. A fórmula para calcular o número de combinações de n elementos tomados r a cada vez, sendo $n \geq r$, é dada por

$$C_{(n,r)} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

As combinações são frequentemente usadas para calcular o número de maneiras de selecionar grupos de elementos de um conjunto. Elas são aplicadas em muitos problemas práticos, como formação de equipes, seleção de comitês, escolha de itens em um menu, entre outros, na qual a ordem não é relevante e a ênfase está na escolha de certo grupo de elementos.

Trazendo de maneira prática, podemos observar o caso no qual um supervisor é responsável por formar equipes de trabalho em uma empresa e tem um grupo de 6 funcionários. Ele deseja formar uma equipe de três pessoas para trabalhar em um projeto específico. Neste caso, ele pode usar combinações para determinar quantas maneiras diferentes existem de escolher uma equipe de três pessoas a partir do grupo de seis, sem se preocupar com a ordem em que elas são escolhidas.

Utilizando a relação para determinar a combinação de n elementos tomados p a p, é possível calcular o número de maneiras de formar uma equipe de 3 pessoas a partir de um grupo de 6 funcionários, calculando

$$C_{6,3} = \frac{6!}{3!\,3!} = 20\ grupos$$

Assim, existem 20 combinações possíveis de formar uma equipe de 3 pessoas a partir do grupo de 6 funcionários. Podemos listar todas essas combinações se quiser, mas o foco principal das combinações é determinar o número total de maneiras de fazer a seleção sem se preocupar com a ordem dos elementos selecionados.

3.4.2 Arranjo simples

Outro método relevante é o arranjo simples, este é um conceito da análise combinatória que se refere à uma seleção ordenada de elementos de um conjunto, no qual cada elemento pode ser escolhido uma única vez e a ordem da seleção importa. Em outras palavras, é uma permutação parcial de elementos de um conjunto (Rocha *et al.*, 2018).

A fórmula para calcular o número de arranjos simples de n elementos tomados r de cada vez é dada por:

$$A_{(n,r)} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Essa relação é criada com base nos seguintes passos:

1. Começa com a ideia de que, para a primeira escolha, você tem n opções, pois existem n elementos disponíveis para escolher;
2. Para a segunda escolha, você tem opções $n - 1$, uma vez que já escolheu um elemento na primeira etapa;
3. Para a terceira escolha, você tem $n - 2$ opções, e assim por diante, até chegar ao r-ésimo elemento com $n - r + 1$ opções.

Portanto, o número total de arranjos é dado pelo produto de todas essas possibilidades, ou seja

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) \ = \frac{n!}{(n-r)!}$$

conforme a relação anteriormente apresentada.

Em resumo, a fórmula de arranjo simples reflete a maneira como organizamos r elementos distintos de um conjunto de n elementos distintos em uma ordem específica, levando em consideração as opções disponíveis em cada etapa do processo de escolha. É uma aplicação dos princípios de contagem e fatorial na análise combinatória.

Partindo para o nosso cotidiano, podemos exemplificar esse método considerando um grupo de 8 competidores em uma prova e determinado de quantas formas podem ser formadas o pódio de 1°, 2° e 3° lugar. Observe que a ordem dos nadadores no pódio faz diferença, pois um mesmo atleta ao ficar em primeiro ou terceiro lugar, receberá medalha diferente e subirá num andar diferente na premiação. Dessa forma, temos um arranjo de 8 atletas, dos quais 3 formaram o pódio. Dessa forma temos:

$$A_{(8,3)} = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336\, pódios\ distintos$$

Um arranjo simples é útil para garantir que você considere todas as possibilidades, especialmente em cenários nos quais a ordem é importante, como competições esportivas, classificação de alunos por mérito, ou qualquer situação em que você precise determinar uma sequência específica de elementos sem repetições.

4 METODOLOGIA

A metodologia aplicada neste trabalho foi a qualitativa com enfoque na resolução das questões do 2º nível da Olimpíada Pernambucana de Matemática sobre análise combinatória. A coleta de dados foi através do banco oficial de questões da OPEMAT. Optamos por analisar questões que contemplaram o 2º nível, correspondente ao 8º e 9º do ensino fundamental II, por se tratar do nível intermediário entre o fundamental e o médio.

Apesar da OPEMAT abordar conteúdos de geometria, álgebra, probabilidade entre outros, decidimos analisar as questões de análise combinatória por considerar que os conhecimentos prévios necessários para resolver os problemas matemáticos cobrados pela banca necessitam de conhecimentos básicos de Matemática.

Após analisarmos todas as questões sobre análise combinatória aplicadas nas provas do OPEMAT, selecionamos 4 questões para apresentar em nossos resultados. Para essas questões conseguimos propor um método alternativo ao método de resolução disponibilizado pela banca da OPEMAT, que entendemos ser mais fácil de resolver e compreender por parte do aluno.

5 ANÁLISE DAS QUESTÕES

Nesta seção apresentaremos os enunciados das quatros questões escolhidas. Em seguida, mostraremos a solução proposta pela banca e, por fim, expomos uma alternativa de resolução que, sob nossa ótica, é mais palpável para os discentes. Isso será realizado para cada questão individualmente

A primeira questão escolhida para análise foi aplicada na primeira fase da OPEMAT de 2022 com o enunciado:

Questão 6 (OPEMAT 2022 - Nível 2 - 1ª Fase) - Uma empresa tem 3 trabalhadores e funciona 4 dias por semana: segunda, terça, quarta e quinta. Em cada dia de funcionamento, um, e apenas um, dos trabalhadores é recrutado. Além disso, cada um deles precisa trabalhar pelo menos um dia na semana. De quantos modos podemos fazer a distribuição dos trabalhadores ao longo dos dias de funcionamento?
(A) 12. (B) 18. (C) 36. (D) 72. (E) 81.

Resolução da banca com alternativa C:

Como são 4 dias e 3 trabalhadores, é preciso escolher um deles para trabalhar dois dias, o que pode ser feito de 3 modos. Uma vez feita essa escolha, devemos contar de quantas maneiras podemos distribuir os trabalhadores, isto é, contar as permutações com repetição $\frac{4!}{2!} = 12$. Assim, existem $3 \cdot 12 = 36$ modos.

Resolução alternativa:

Inicialmente, vamos nomear os três trabalhadores como A, B e C. Considerando que eles irão trabalhar 4 dias por semana, temos a primeira distribuição

$$\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \underline{\ \ }$$

Percebe-se que durante a semana um dos trabalhadores terá que trabalhar mais de uma vez. Assim, considerando o trabalhador A trabalhando duas vezes na semana temos

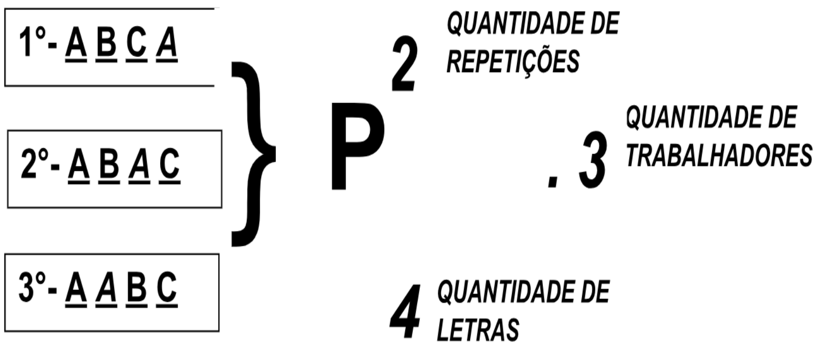
$$\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \underline{A}$$

Nota-se que utilizando as mesmas letras podemos ter durante a semana diferentes configurações de escala tais como

1° - A B C A
2° - A B A C
3° - A A B C

Além dessas configurações, podem ser formadas outras palavras com essas mesmas letras. Podemos resumir essas diferentes formas de combinação em uma fórmula utilizando a permutação, conforme mostra a Figura 1.
Sendo assim temos:

Figura 1 – Possibilidades de escalas de trabalhadores



Fonte: autoria própria (2023)

Sendo assim, temos

$$\frac{4!}{2!} \cdot 3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2}!}{2!} \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 3 = 36 \quad possibilidades$$

A ferramenta chave para a resolução da questão foi a permutação, porém também foi utilizado a repetição e o princípio multiplicativo. A permutação é uma ferramenta crucial na análise combinatória que ajuda a calcular o número de arranjos ordenados de elementos em um conjunto.

A segunda questão analisada neste trabalho foi aplicada na primeira fase da

OPEMAT de 2022 com o texto:

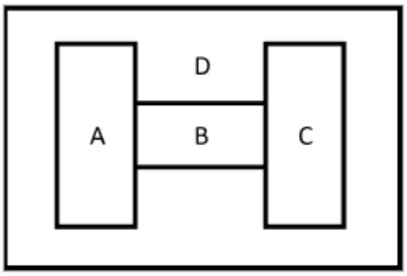
Questão 5 (OPEMAT 2022 - Nível 2 - 1ª Fase) - Bernardo quer pintar a figura abaixo com tintas nas cores vermelho, azul, verde, preto e amarelo, considerando as seguintes restrições:

i) Cada região A, B, C e D da figura deve ser pintada inteiramente com a mesma cor;

ii) Duas regiões adjacentes, ou seja, regiões que fazem fronteira (C e B, por exemplo), devem ter cores diferentes.

De quantas maneiras Bernardo pode pintar a figura?

Figura 2 – Questão 5 (OPEMAT - Nível 2 - ANO 2022)



Fonte: OPEMAT (2022)

(A) 120. (B) 180**.** (C) 240. (D) 320. (E) 625.

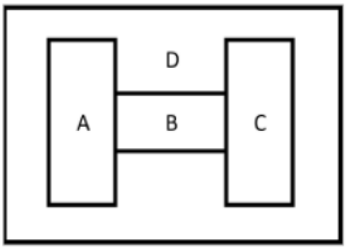
Resolução da banca com alternativa B:

Podemos escolher a cor da região D de 5 maneiras. Escolhida a cor da região D, a região A pode ser pintada de 4 maneiras. B, que faz fronteira com A e D, pode ser pintada de 3 maneiras, já que em A e D usamos duas cores diferentes. A região C que faz fronteira com B e D pode ser pintada de 3 maneiras, pois B e D foram pintadas com cores diferentes. Assim, temos um total de $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 180$ maneiras.

Resolução alternativa:

Inicialmente separamos a contagem em duas situações opostas, que não tenham interseção. Essas situações são chamadas de disjuntas. Na primeira situação consideramos que se a região D faz fronteira com todas as outras regiões, então temos 5 opções para essa região. Assim, podemos escolher logo a sua cor, que, sem nenhum prejuízo à questão, poderá ser a cor preta. Continuando com o raciocínio, a região A tem quatro opções de cores já que não podemos repetir a cor preta da região D. Como queremos que A e C tenham a mesma cor, a região C terá apenas 1 opção, ou seja, a mesma escolhida para a região A, obrigatoriamente. Por fim, a região B pode ter qualquer uma das outras 3 opções. Podemos resumir essas considerações conforme mostra a Figura 3.

Figura 3 – Resumo das considerações para solução da questão 5 (primeira situação)



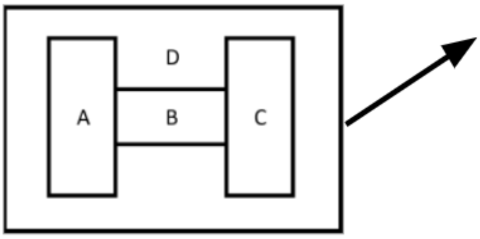
A / C - CORES IGUAIS	
Regiões	**A B C D**
N° de cores	**4 3 1 5**

Fonte: autoria própria (2023)

Assim, pelo princípio multiplicativo temos $4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 60$ maneiras para Bernardo pintar a figura indicada na questão 5.

Na segunda situação, partimos agora para A/C com cores distintas. Vamos iniciar novamente pela região D, que continua com 5 opções. Podemos supor que utilizamos a cor amarela para ela, sobram novamente 4 opções para A. Como C, agora, precisa ter uma cor diferente da região A, têm-se 3 opções para essa região. Por fim, para a região B irão sobrar apenas 2 opções. Essas considerações estão resumidas na Figura 4.

Figura 4 – Resumo das considerações para solução da questão 5
(segunda situação)



A / C - CORES DIFERENTES	
Regiões	**A B C D**
N° de cores	**4 2 3 5**

Fonte: autoria própria (2023)

Para resolver a segunda situação utilizamos o princípio multiplicativo e aditivo. Pelo princípio multiplicativo, temos $4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 120$ maneiras. Por serem situações distintas, usamos o princípio aditivo para calcular o total $60 + 120 = 180$ possibilidades para Bernardo pintar a figura da questão 5.

A resolução alternativa tem como diferencial o fato de construirmos em duas etapas o mecanismo de resolução, seguindo os critérios solicitados no enunciado da questão. Dessa forma, os estudantes têm a possibilidade de construir uma visão mais ampla dos possíveis mecanismos para resolver uma questão. Sendo assim, concluímos que o método que utilizamos nesta resolução é mais didático e de melhor compreensão para os discentes.

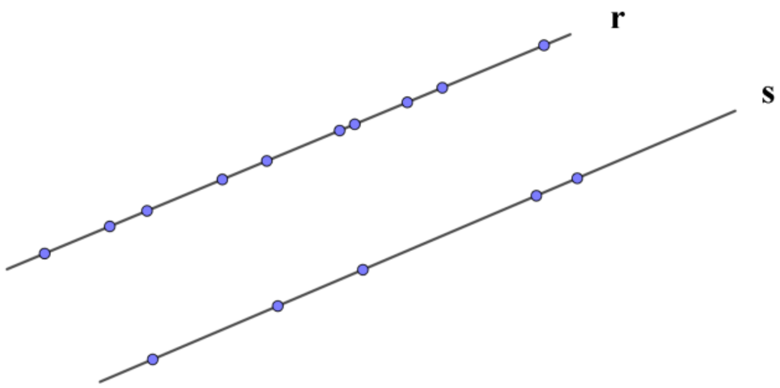
O terceiro problema analisado foi a questão 5 de nível 2 aplicada na segunda fase da OPEMAT de 2022 com o enunciado:

Questão 5 (OPEMAT 2022 - Nível 2 - 2ª Fase) - Em um plano, considere duas retas paralelas e distintas r e s. Na reta r escolhemos 10 pontos distintos e na reta s escolhemos 5 pontos distintos. Determine a quantidade de triângulos que podemos formar com esses pontos.

Resolução da banca:

Vamos dividir a solução em duas etapas. Considere duas retas r e s, conforme a Figura 5.

Figura 5 – Retas paralelas e distintas r e s



Fonte: OPEMAT (2022)

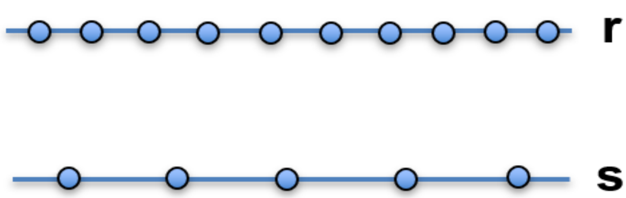
Na primeira etapa considere que apenas um dos vértices do triângulo é um dos pontos da reta r, isso mostra que temos 10 possibilidades para a escolha do vértice, consequentemente os outros 2 vértices devem pertencer aos pontos da reta s. Como cada base do triângulo corresponde a uma corda que liga dois pontos, então vamos ter um total de $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10$ possibilidades, pois é indiferente a corda *AB* ou a corda *BA*, onde *A* e *B* são dois pontos da reta s. Agora, basta usar o princípio multiplicativo e concluir que temos $10 \cdot 10 = 100$ possíveis triângulos.

Na segunda etapa repetimos o mesmo argumento acima, assumindo o único vértice na reta s e os outros dois vértices na reta r, então temos um total de $5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 9 = 225$ possíveis triângulos.

Resolução alternativa:

Com os dados apresentados na questão, podemos ilustrar reta r com 10 pontos distintos e a reta s com 5 pontos distintos, conforme apresenta a Figura 6.

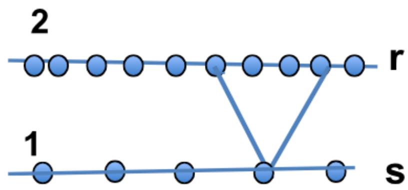
Figura 6 – Retas paralelas e distintas r e s (resolução alternativa)



Fonte: autoria própria (2023)

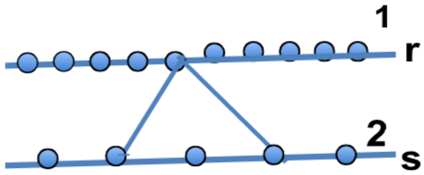
Daí, podemos concluir que para formar um triângulo temos duas situações distintas. Ter dois vértices na reta r e um vértice na reta s (Fig. 7), ou o contrário, um vértice na reta r e dois vértices na reta s (Fig. 8).

Figura 7 – Triângulo com dois vértices na reta r e um na reta s



Fonte: autoria própria (2023)

Figura 8 – Triângulo com um vértice na reta r e dois na reta s



Fonte: autoria própria (2023)

Como a ordem dos pontos que vamos escolher não importa, a quantidade de triângulos que podem ser formados nas condições estabelecidas pode ser calculada por

$$C_{10,2} \cdot C_{5,1} + C_{10,1} \cdot C_{5,2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} \cdot \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!} + \frac{10!}{1! \cdot (10-1)!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!} =$$

$$\frac{10!}{2! 8!} \cdot \frac{5!}{1! 4!} + \frac{10!}{1! 9!} \cdot \frac{5!}{2! 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{2 \cdot 8!} \cdot \frac{5 \cdot 4!}{1 \cdot 4!} + \frac{10 \cdot 9!}{1 \cdot 9!} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2 \cdot 3!} =$$

$$\frac{90}{2} \cdot 5 + 10 \cdot 10 = 225 + 100 = 325$$

Então, temos 225 triângulos da primeira maneira e da segunda maneira temos 100 triângulos, ao somar todas as formas temos um quantitativo total de 325 triângulos possíveis. Para a resolução dessa questão utilizamos combinação simples e o princípio aditivo.

A quarta questão foi aplicada na primeira fase da OPEMAT de 2015 com o texto:

Questão 1 (OPEMAT 2015 - Nível 2 - 1ª Fase) - Quantos números com dois algarismos distintos são compostos?

Resolução da banca:

Para fazer essa contagem utilizaremos o princípio da inclusão-exclusão. Observe que os números compostos com dois dígitos distintos são maiores ou iguais a 10 e menores ou iguais a 99. Além disso, um número composto menor que 100 é múltiplo de 2, 3, 5 ou 7. Dentre os números com dois algarismos

- 45 são múltiplos de 2
- 30 são múltiplos de 3
- 18 são múltiplos de 5
- 13 são múltiplos de 7

Assim, temos 106 números com dois algarismos que são múltiplos de 2, 3, 5 e 7. Porém, contamos os múltiplos de $6 = 2 \cdot 3$ duas vezes. Por exemplo, o número 12 foi contado duas vezes por que é múltiplo de 2 e de 3. Desse modo, devemos subtrair os 15 múltiplos de 6 com dois algarismos. Além disso, os múltiplos de $10 = 2 \cdot 5$; $14 = 2 \cdot 7$; $15 = 3 \cdot 5$; $21 = 3 \cdot 7$ e $35 = 5 \cdot 7$ também foram contados duas vezes. Dentre os números com dois algarismos

- 15 são múltiplos de 6
- 9 são múltiplos de 10
- 7 são múltiplos de 14
- 6 são múltiplos de 15
- 4 são múltiplos de 21
- 2 são múltiplos de 21

Assim, temos que subtrair 43 números dos 106 que contamos antes, o que resulta em 63. Porém, subtraímos os múltiplos de $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ duas vezes. Por exemplo, subtraímos o 30 uma vez por que ele é múltiplo de $6 = 2 \cdot 3$ e uma vez porque ele é múltiplo de $10 = 2 \cdot 5$. Além disso, os múltiplos de $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$; $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$ e $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, também foram subtraídos duas vezes. Dentre os números com dois algarismos

- 3 são múltiplos de 30
- 2 são múltiplos de 42
- 1 é múltiplo de 70
- 0 são múltiplos de 105

Assim, temos que somar 6 números a 63, o que resulta em 69 números com dois algarismos compostos. Mais algum número foi somado duas vezes? A resposta é não, pois os números candidatos a serem somados duas vezes são múltiplos de $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$ e não existem números com dois algarismos compostos. Mas ainda não acabou. Falta subtrair os números compostos com dois algarismos iguais. Existem 8 desses números. Assim existem $61 = 69 - 8$ números compostos com dois algarismos distintos.

Resolução alternativa:

Considerando que teremos apenas números naturais com dois algarismos, eles estarão compreendidos entre 10 a 99. Sendo assim, para o dígito da dezena temos 9 opções de algarismos para escolher, de 1 a 9. Para o dígito das unidades temos também 9 opções de algarismos para escolher, de 0 a 9, exceto o algarismo escolhido na casa das dezenas, pois o número deve ter algarismos distintos. Pelo PFC, a quantidade de números com dois algarismos distintos é dada por $9 \cdot 9 = 81$. Porém, nós queremos saber quantos desses números são compostos. De 10 a 99 o número vai ser classificado como primo ou composto. Sendo assim, temos o total de número compostos igual a $81 - N^{\underline{o}}\ de\ primos$. Os números primos entre 10 e 99 são 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, totalizando 21 números primos. Porém, nota-se que o número 11 não deve ter sua retirada contabilizada, pois ele já foi removido quando eliminamos os números com algarismos iguais ao aplicar o PFC na etapa inicial da resolução. Por isso, temos que “devolvê-lo”. Deste modo, temos

$$81 - 21 + 1 = 61 \text{ números compostos.}$$

Para essa resolução alternativa, usamos o princípio multiplicativo e o princípio da inclusão-exclusão, que é uma variação do princípio aditivo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No processo de desenvolvimento dessa pesquisa, foi perceptível a necessidade de refletir sobre a importância das aplicações das olimpíadas de Matemática, especificamente a OPMAT, por se tratar de um instrumento incentivador dos processos de ensino-aprendizagem. Nessa perspectiva, o professor pode abordar antecipadamente com seus alunos questões de provas anteriores, no intuito de promover experiências que possibilitem um raciocínio dinâmico e lógico em prol de resolver as questões. Isso pode facilitar a quebra de paradigma de que a Matemática é algo difícil, mostrando aos estudantes que existem inúmeras maneiras de resolver as questões cobradas pela OPEMAT.

Oportunizar vivências dessa natureza, são importantes, pois propicia a descoberta de novos talentos na área das exatas, bem como, auxilia na promoção do sentimento de pertencimento e protagonismo dos estudantes que buscam aprimorar e validar seus conhecimentos ligados aos conceitos e aplicações da Matemática de forma prazerosa e satisfatória. Nesse sentido, acreditamos que o domínio de conceitos aliados à prática e a criatividade, permitem novos traçados para resolução de problemas mesmo na especificidade que é a Matemática.

A partir das resoluções elaboradas durante este trabalho, constatamos que existem diferentes maneiras de resolver uma mesma questão e que algumas resoluções podem apresentar poucas diferenças. Entretanto, o fato de existir alguma diferença é indicativo de que é possível explorar e elaborar novas formas de solução de questões na Matemática. Ademais, ressalto a importância da Olimpíada Pernambucana de Matemática como contribuinte do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, assim como, a importância da contextualização e prática da mesma, para o fortalecimento a aprendizagem dessa área que é imprescindível no nosso cotidiano.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, A.; VALE, I.; FERREIRA, R. A. T. Trilhos matemáticos: promovendo a criatividade de futuros professores. **Educação e Matemática**, Coimbra, n. 135, p. 57-64, 2015.

COUTINHO, J. L. E.; CERQUEIRA, J. Uma Matemática para o ensino de combinação simples a partir de um estudo do conceito com professores. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 18, n. 2, p. 783-808, 2016.

GARCIA, H. A. **O ensino da análise combinatória através de situações problema**. 2017. 105 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2017.

MELO, F. L. M.; FAGUNDES, R, A. A.; LIMA, M. M. Olimpíada Pernambucana de Matemática - OPEMAT: uma análise crítica e projeção sobre os impactos no ensino da Matemática. *In*: JORNADA CIENTÍFICA E DE EXTENSÃO (JCE), 2019, Caruaru. **Anais** […]. Caruaru: Universidade de Pernambuco (UPE), 2019. Disponível em: file:///home/douglas/Downloads/Olimpi%CC%81ada%20Pernambucana%20de%20Matema%CC%81tica_edited.pdf. Acesso em: 6 ago. 2023.

MELLO, H. P. M. **Desmistificando o ensino de análise combinatória.** 2017. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2017.

MORAIS, F. L.; MOUTINHO, M.; SOARES, F. A. F.; SANTOS, W. B. Fatores que influenciam no aprendizado dos estudantes da Olimpíada Pernambucana de Matemática. *In*: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 31., 2020. **Anais** [...]. Porto Alegre: SBIE, 2020.

OPEMAT - Olimpíada Pernambucana de Matemática. **Provas e gabaritos.** Disponível em: https://www.opemat.com.br/provasgabaritos. Acesso em: 19 dez. 2023.

PEREIRA, M. M. A; SILVA, L. G. O. Sistema de avaliação da educação básica: uma análise estatística para o estado de Pernambuco. **Revista Acervo Educacional**, Recife, v. 5, p. e12403-e12403, 2023.

ROCHA, B. P.; SILVA, R. N.; SILVA, K. M.; MORENO, A. L. A resolução de problemas para o ensino-aprendizagem de arranjo simples e combinação simples. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, Campinas, v. 6, n. 2, 2018.

ROCHA, J. C. **O ensino da análise combinatória:** uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas. 2002. 53 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

SILVA, F. F. G. D. **Um estudo das questões da Obmep sobre análise combinatória.** 2020. 97 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Universidade Federal Rural do Semi-Árido, Mossoró, 2020.

SOUZA, A. R. C.; ARAGÃO, T. C. F. R. Recursos lúdicos e softwares com foco no ensino e aprendizagem da análise combinatória e probabilidade. **Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação**, São Paulo, v. 9, n. 5, p. 425-446, 2023.