INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE PERNAMBUCO
DIRETORIA DE ENSINO A DISTÂNCIA
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ENSINO DA MATEMÁTICA

EDILSON JOSÉ DA SILVA

A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DA ÁREA DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS INSCRITÍVEIS NO ENSINO MÉDIO

Recife
2021

EDILSON JOSÉ DA SILVA

A IMPORTÂNCIA DA UTILIZAÇÃO DA FÓRMULA DE BRAHMAGUPTA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DA ÁREA DOS QUADRILÁTEROS CONVEXOS INSCRITÍVEIS NO ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à Coordenação do Curso de Especialização do Ensino da Matemática do IFPE, como requisito do grau de Especialista.
Orientador(a): Prof. MSc. Filipe Mendonça de Lima

Recife
2021

S586i

A importância da utilização da fórmula de Brahmagupta para o Ensino do Cálculo da área dos quadriláteros convexos inscritíveis no Ensino Médio. [Monografia] /Edilson José da Silva. – Recife: DEaD/IFPE, 2021.
110 p.: il.

Formato: pdf
Monografia de conclusão de Especialização em Ensino da Matemática – EaD/IFPE

1. Geometria plana. 2. Quadrilátero. 3. Fórmula de Brahmagupta. 4. Ensino Médio. 5. Aprendizagem.

CDD: 516

Edilson José da Silva

Título: A Importância da utilização da fórmula de Brahmagupta para o ensino do Cálculo da área dos quadriláteros convexos inscritíveis no Ensino Médio

Este Trabalho Conclusão de Curso foi julgado adequado para obtenção do Título de especialista em Ensino da Matemática do Ensino Médio e aprovado em sua forma final pela Especialização em Ensino da Matemática do Ensino Médio.

Recife, 19 de Abril de 2021.

Banca Examinadora:

Filipe Mendonça de Lima

Prof Me. Filipe Mendonça de Lima
Orientador
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Jorge Henrique Duarte

Prof. Me. Jorge Henrique Duarte
Avaliador
Instituto Federal de Pernambuco - DEaD

Documento assinado digitalmente
gov.br
Amanda Barbosa da Silva
Data: 10/05/2021 12:42:17-0300
CPF: 069.115.194-62

Prof. Me. Amanda Barbosa da Silva
Avaliador
Instituto Federal de Pernambuco - DEaD

Dedico este trabalho a todos os envolvidos direta ou indiretamente na sua elaboração, especialmente aos meus pais, irmãos, esposa, filhos, colegas do IFPE, polo Santa Cruz do Capibaribe, bem como ao meu orientador Prof. Msc. Filipe Mendonça de Lima. Muito obrigado, pois o mesmo só foi possível por causa dessa tão preciosa colaboração.

AGRADECIMENTOS

Ao prof. (a) Airton Temístocles de Castro – UFPE, pelo incansável apoio prestado na minha formação em Matemática.

Ao prof. (a) Paulo Figueiredo de Lima – UFPE, pelas aulas e orientações dadas à minha carreira acadêmica.

Ao prof. (a) Antônio Carlos de Miranda – UFPE, por ser a primeira pessoa a sugerir como tema da minha monografia de graduação: a Fórmula de Brahmagupta.

A(o) prof. (a) Paula Moreira Baltar Belemain – UFPE, por todas as orientações prestadas à minha monografia da graduação e sempre estar ao meu lado na vida acadêmica.

Ao prof. (a) Jorge Henrique Duarte – IFPE, por fazer parte da banca examinadora de minha defesa deste trabalho e pelas orientações prestadas em suas ressalvas.

A(o) prof. (a) Amanda Barbosa da Silva – IFPE, por fazer parte da banca examinadora de minha defesa deste trabalho e pelas orientações prestadas em suas ressalvas.

Ao prof. (a) Filipe Mendonça de Lima – IFPE, por ter-me orientado neste trabalho e estar sempre à disposição para prestar apoio durante todo o período de desenvolvimento até a defesa.

Aos colegas da pós-graduação deste instituto, polo Santa Cruz do Capibaribe pelas discussões no desenvolvimento, formatação e ensaio das defesas.

Aos meus familiares pelo apoio imensurável e a certeza de que eu estava no caminho certo.

Ao IFPE, polo Santa Cruz do Capibaribe, seus funcionários e professores por ter-me recebido de braços abertos e acompanhado toma a minha caminhada.

Talvez o resultado mais belo na obra de Brahmagupta seja a generalização da "fórmula de Heron" para achar a área do quadrilátero. Essa fórmula, [...], ainda leva seu nome; mas a glória de seu sucesso é obscurecida pelo fato de ele não observar que a fórmula só é correta no caso de um quadrilátero cíclico. (BOYER, 2019, p. 159).

RESUMO

O presente trabalho aborda a importância da utilização da Fórmula de Brahmagupta para o ensino do cálculo da área dos quadriláteros convexos inscritíveis, no Ensino Médio, baseado numa revisão sistemática realizada em várias dissertações de mestrado dos últimos dez anos, apoiada por alguns livros acadêmicos e didáticos, bem como por pesquisas em *sites*. Seu objetivo geral é de evidenciar um assunto tão relevante da Geometria Plana que é o cálculo de áreas de figuras planas permitindo ao docente e ao discente através da Fórmula de Brahmagupta, obter conhecimentos suficientes para resolver situações de seu dia a dia, uma vez que nos livros didáticos de Ensino Médio pesquisados, não encontramos menção à fórmula, o que fora visto em livros acadêmicos da História da Matemática como Boyer (2019) e Eves (2011) e infelizmente esse estudo não é vivenciado/estudado no Ensino Médio. Na última seção deste trabalho é apresentado um Plano de Aula para que seja aplicado pelo docente em sala de aula, inclusive permitindo que sejam feitas as modificações necessárias, salientando que junto ao discente, possa desenvolver a sua resolução, além da forma tradicional, também, em alguns casos, com o auxílio do software Geogebra. Para que seja aplicada uma Sequência Didática seguindo um Plano de Aulas disponibilizado neste trabalho, será feita inicialmente uma Avaliação Diagnóstica para saber o nível dos estudantes acerca dos assuntos áreas e perímetros de figuras planas, tais como quadrado, retângulo, triângulo, losango e trapézio e após apurado o resultado dessa avaliação, seja posto em prática o Plano de Aula, de acordo com sequência apresentada no referencial teórico e por fim aplicada uma avaliação para apurar os resultados. A Revisão Sistemática apontou a necessidade de adequar dentro do currículo do Ensino Médio a utilização, em Geometria Plana, da Fórmula de Brahmagupta, que possivelmente trará efeitos positivos no ensino-aprendizagem desses alunos.

Palavras-Chave: Sequência Didática, Fórmula de Brahmagupta, Avaliação Diagnóstica, Quadriláteros Convexos, Geogebra, Revisão Sistemática.

ABSTRACT

The present work addresses the importance of using the Brahmagupta Formula for teaching the calculation of the area of enrollable convex and quadrilaterals in high school, based on a systematic review carried out in several master's dissertations of the last ten years, supported by some academic and didactic books, as well as site searches. Its general objective is to highlight a subject so relevant to Plane Geometry that it is the calculation of areas of plane figures allowing the teacher and student through the Brahmagupta Formula, to obtain sufficient knowledge to solve everyday situations, once we High school textbooks researched, we found no mention of the formula, which was seen in academic books on the History of Mathematics such as Boyer (2019) and Eves (2011) and unfortunately this study is not experienced / studied in high school. In the last section of this work, a Lesson Plan is presented so that it can be applied by the teacher in the classroom, including allowing the necessary modifications to be made, emphasizing that together with the student, he can develop his resolution, in addition to the traditional way, too, in some cases, with the help of the Geogebra software. In order for a Didactic Sequence to be applied following a Lesson Plan made available in this work, a Diagnostic Assessment will be made initially to find out the level of students about the subjects areas and perimeters of plane figures, such as square, rectangle, triangle, rhombus and trapezoid and after determining the result of this evaluation, the Lesson Plan is put into practice, according to the sequence presented in the theoretical framework and finally an evaluation is applied to determine the results. The Systematic Review pointed out the need to adapt within the High School curriculum the use, in Plane Geometry, of the Brahmagupta Formula, which possibly will have positive effects on the teaching-learning of these students.

Keywords: Didatic Sequence, Plane Geometry, Brahmagupta Formula, Diagnostic Evaluation, Convex Quadrilaterals, GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURAS

QUADROS

TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho, visa elencar a importância que a utilização da Fórmula de Brahmagupta poderá trazer para o ensino do cálculo da área dos quadriláteros convexos inscritíveis no Ensino Médio. Partindo-se do pressuposto de que a Fórmula de Heron foi o suporte necessário para o embasamento da determinação da área dos quadriláteros cíclicos, inclusive, permitindo, a partir dessa Fórmula a demonstração da referida Fórmula de Brahmagupta, onde a partir das medidas dos lados de qualquer quadrilátero convexo cíclico, poder-se-á construir uma fórmula capaz de determinar a sua área, neste trabalho, determinado pela Fórmula de Brahmagupta. Também será apresentada a Fórmula de Bretschneider que pode ser utilizada para o cálculo da área de um quadrilátero convexo qualquer.

Sabe-se do Ensino Básico, que um dos tópicos da Geometria Plana mais estudado é o cálculo das áreas das figuras planas, especialmente dos polígonos, tais como, triângulos, quadriláteros, pentágonos, hexágonos etc. Onde há uma infinidade de fórmulas para se determinar suas áreas e até mesmo ferramentas lúdicas.

De acordo com SOUZA (2010), estudar áreas de figuras planas está intimamente ligado aos conceitos da Geometria Euclidiana, com surgimento na Grécia Antiga, tomando por base o estudo dos entes empíricos tais como, ponto, reta e plano. O nosso cotidiano está envolto por formas planas, que são determinadas a partir desses elementos empíricos. Desde a antiguidade, o *homo sapiens* sempre teve a necessidade de calcular as medidas das superfícies planas. Fossem elas para medida das suas terras, nos trabalhos de agrimensura ou até mesmo para construir suas residências. Assim, sempre se buscou um planejamento e organização para que os terrenos tivessem a sua ocupação feita da melhor forma possível.

Mesmo que de uma forma mais organizada e planejada, atualmente as expansões ocupacionais utilizam os mesmos princípios criados antigamente, a diferença é que hoje existe uma padronização da engenharia e do Sistema Internacional de Medidas.

A motivação para a realização deste trabalho é o fato de se ter tão pouco material didático, no Ensino Médio, que trate do assunto em pauta, o que de alguma forma faz com que alguns problemas do cotidiano deixem de ser explorados. Esta fórmula nos foi apresentada pela primeira vez durante a graduação em Matemática, na Universidade Federal de Pernambuco

(UFPE), em 1999, quando buscávamos um tema para a monografia, onde o Professor Dr. Antônio Carlos de Miranda sugeriu um trabalho nesse sentido, juntamente com o Professor Dr. Airton Temístocles de Castro, à época o primeiro seria orientador enquanto o segundo, coorientador e por existir pouco material disponível trocamos o tema para área das principais figura planas, desta vez com a orientadora Professora Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain juntamente com o Professor Dr. Paulo Figueiredo de Lima que durante o desenvolvimento do trabalho deram-nos muitas informações sobre Brahmagupta e sua tão formosa fórmula. A partir de então essa fórmula passou a fazer parte do cotidiano do autor.

Conforme OLIVEIRA (2015), são encontradas em alguns livros didáticos, mesmo que timidamente, certas considerações sobre da Fórmula de Heron, mas não se fala da contribuição de Brahmagupta e bem menos ainda, da generalização de Bretschneider. Não encontramos nos livros didáticos de Ensino Médio, pesquisados, qualquer menção sobre esse matemático. No entanto, é preciso trazer a importância de sua descoberta, que consiste em aplicar de maneira didática uma fórmula em que se possa calcular a área de um quadrilátero cíclico, conhecendo apenas a medida de seus lados.

Com isto, busca-se, além de reforçar a necessidade de se estudar cada vez mais as áreas das figuras planas, cuidar para que contribuições tão importantes da Matemática, mesmo que em tempos remotos, não fiquem esquecidas e possam ser sempre trazidas para as discussões em sala de aula.

2 JUSTIFICATIVA

A motivação para a realização deste trabalho é o fato de se ter tão pouco material didático, no Ensino Médio, que trate do assunto em pauta, o que de alguma forma permite a não exploração de situações-problemas do cotidiano.

Desde que o autor deste trabalho ouviu falar da Fórmula de Brahmagupta fascinou-se pelo assunto, mas sempre esbarrava no pouco material encontrado em livros acadêmicos, à exceção de algum material encontrado na Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) ou pequenas citações da Revista do Professor de Matemática (RPM), por esse motivo, elaborou essa revisão sistemática em dissertações que tratam do assunto, alguns livros acadêmicos, apoio de livros didáticos do Ensino Médio e *sites* da internet, podendo dar a sua contribuição ao meio científico, inclusive propondo um Plano de Aula para que seja vivenciado no Ensino Médio.

Espera-se que com este trabalho a comunidade científica possa se sensibilizar a trazer mais discussões a respeito da temática, para estimular de alguma forma essa prática em sala de aula, para que tanto os docentes quanto os discentes possam ter mais acesso e que aos poucos passem a trabalhar esses conteúdos em sala de aula.

Busca-se, portanto, permitir que os envolvidos possam resolver o cálculo de áreas em situações-problemas que envolvam os quadriláteros convexos inscritíveis, conhecendo-se apenas os seus lados, aplicando o conhecimento de perímetro, semiperímetro e raiz quadrada do produto da diferença e em alguns casos particulares o uso da Trigonometria do Ensino Médio. Nas demonstrações apresentadas neste trabalho são também informados quais os pré-requisitos necessários para o entendimento de cada um dos desenvolvimentos matemáticos.

3 QUESTÃO NORTEADORA DA PESQUISA

Para a elaboração deste trabalho foi pensada a seguinte questão: Qual a importância da utilização da Fórmula de Brahmagupta para o ensino do cálculo da área dos quadriláteros convexos inscritíveis no Ensino Médio?

Pergunta esta que será respondida ao longo de todo o trabalho, com as citações, apresentações e demonstrações.

Com isso foram pensados o objetivo geral e os específicos, conforme citados no tópico 4 - objetivos, logo a seguir.

4 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é trazer a Fórmula de Brahmagupta e sua importância para o ensino de áreas de quadriláteros cíclicos, bem como a resolução de situações-problemas no Ensino Médio, a seguir propostos.

4.1 Objetivo Geral

Apresentar em forma de revisão sistemática a Fórmula de Brahmagupta, sua demonstração e estudar as áreas de quadriláteros inscritíveis, conhecidos também por quadriláteros convexos cíclicos, conhecendo-se apenas os seus lados.

4.2 Objetivos Específicos

1 – Acrescentar novas formas de calcular áreas de quadriláteros convexos frente às já conhecidas no Ensino Básico;

2 – Demonstrar a Fórmula de Brahmagupta de três formas diferentes;

3 – Avaliar os diferenciais da utilização didática da Fórmula de Brahmagupta frente aos modelos clássicos de ensino, amparado pelas Fórmula de Heron e de Bretschneider;

4 – Apresentar, após a apurar os conhecimentos prévios dos alunos, obtidos em uma Avaliação Diagnóstica, um Plano de Aula para que possa ser utilizado em sala de aula de forma a consolidar os conhecimentos neste trabalho apresentados e posteriormente avaliar os resultados.

5 REFERENCIAL TEÓRICO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) traz, na área de Matemática e suas Tecnologias, a proposta de consolidação, ampliação e o aprofundamento das aprendizagens que são básicas e essenciais e que sejam desenvolvidas a partir do Ensino Fundamental, de forma que possibilite aos discentes a construção de uma visão bastante integrada da Matemática aplicada ao seu cotidiano.

Dentre as competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio tem-se:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
> 2. [...].
> 3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
> 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, 2018).

Ainda na BNCC, Ensino Médio, nos códigos de habilidades, é citado que:

> EM13MAT307 - Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
>
> EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
> EM13MAT505 - Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (BNCC, 2018).

No Ensino Básico, o estudo de perímetros e áreas inicia-se no quinto ano, no tópico Grandezas e Medidas, na habilidade EF05MA20, em que a BNCC (2018), cita: “Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes”. Estendendo-se pelas demais séries até o Ensino Médio, com o estudo das áreas dos polígonos convexos, bem como dos círculos e suas partes. Basicamente as fórmulas são citadas e trazem suas demonstrações, com alguns exercícios resolvidos e vários exercícios propostos.

De acordo com o Documento de Reorganização Curricular do Estado de Pernambuco (2020):

> A proposta de Reorganização Curricular aqui apresentada configura-se como uma referência para o planejamento dos professores, tanto no retorno às aulas não-presenciais – ocorrido em 01/06/2020 com o término do recesso escolar – quanto no retorno às aulas presenciais quando for decretado o final do período de isolamento social, em decorrência da Pandemia da COVID-19. (DRC-PE, 2020, p. 2).

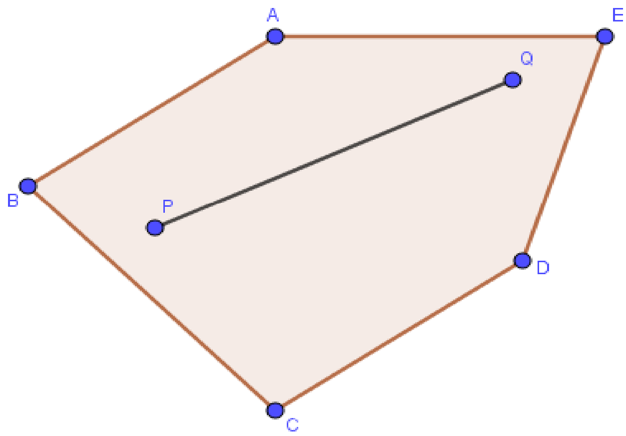
Esse documento, na unidade temática Grandezas e Medidas elenca na habilidade EF04MA21PE, do quarto ano do Ensino Básico, o estudo das áreas das figuras planas em malhas quadriculadas citando as seguintes habilidades:

> Medir, comparar e estimar área de figuras planas (incluindo seu perímetro) desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinhos, reconhecendo que duas figuras com formatos (perímetro) diferentes podem ter a mesma medida de área. (DRC-PE, 2020, p. 53).

Também são elencadas no quinto ano as medidas de comprimentos e áreas na habilidade EF05MA19PE, áreas e perímetros de figuras poligonais, na habilidade EF05MA20PE, no sexto ano são abordados as áreas e os perímetros de quadrados, na habilidade EF06MA29PE, no sétimo ano, na habilidade EF07MA32PE, fala da equivalência de área de figuras planas, que podem ser decompostas em triângulos e quadriláteros de maneira fácil. No oitavo ano, habilidade EF08MA19PE, trata da determinação da área de figuras planas por composição ou decomposição dessas figuras. No Ensino Médio, no primeiro ano, trata do perímetro e área de figuras planas e no segundo ano trata do conceito de área e volume. Percebe-se que o assunto áreas e perímetros, nesse documento deve ser visto desde o quarto ano do Ensino Fundamental até o Ensino Médio.

Sabe-se que os polígonos se classificam em convexos e não-convexos, logo “um polígono será dito convexo, quando para quaisquer dois pontos P e Q interiores ao polígono, o segmento PQ estiver completamente contido no interior do mesmo. Caso contrário, diremos que tal polígono é não-convexo." VIEIRA JÚNIOR (2020, p. 14).

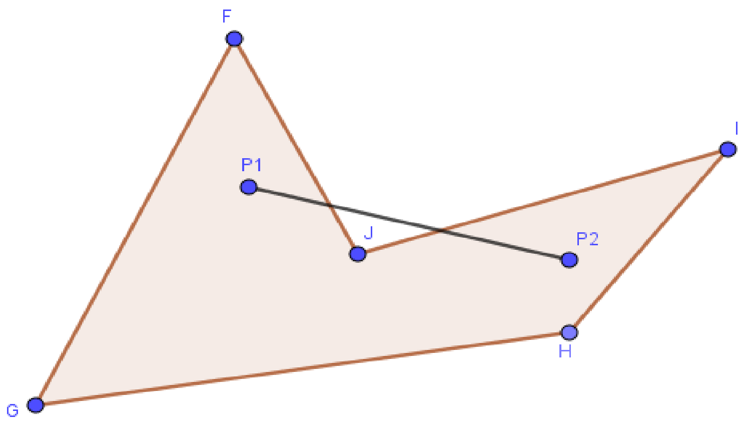
Figura 1. Polígono Convexo.



Fonte – Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Tomando por base à definição de VIEIRA JÚNIOR (2020, p. 14), acima, podemos afirmar que um polígono é não convexo, se tomarmos um segmento com extremos pertencentes ao seu interior e pelo menos um dos pontos desse segmento não pertencer ao polígono, observe a figura 2, abaixo, os pontos extremos $P1$ e $P2$ do segmento $P1P2$ pertencem ao polígono FGHIJ, no entanto, nem todos os pontos do segmento $P1P2$ pertencem a esse polígono.

Figura 2. Polígono não-convexo.

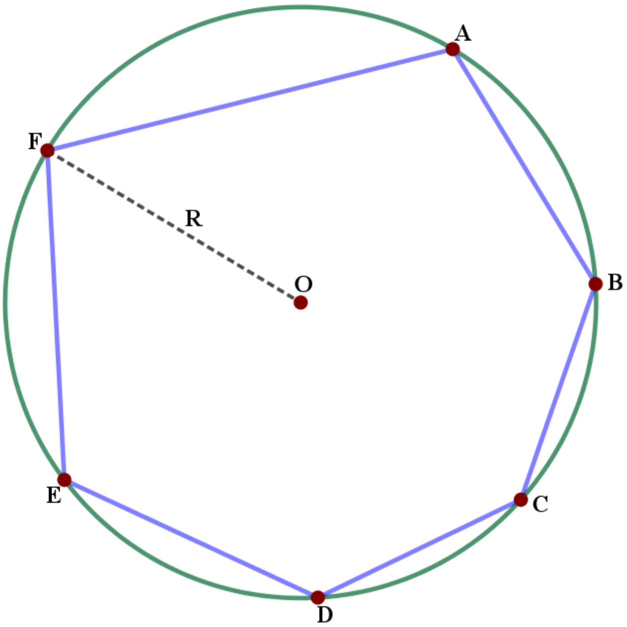


Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

> Um polígono será dito cíclico ou inscritível quando todos os seus vértices pertencerem ao mesmo círculo. Tal círculo será dito circunscrito ao polígono e denominaremos seu

centro e raio, respectivamente, como cincuncentro e circunraio do mesmo (VIEIRA JÚNIOR, 2020, p. 17).

Figura 3. Polígono inscritível de circunraio R.

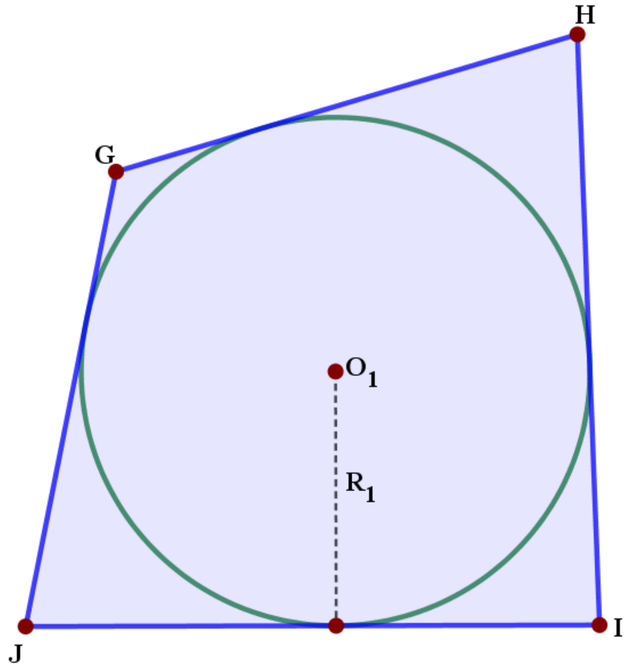


Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

“Um polígono será dito circunscritível, quando todos os seus lados forem tangentes ao mesmo círculo. Tal círculo será dito inscrito ao polígono e denominaremos seu centro e raio, respectivamente, como incentro e inraio do mesmo.” VIEIRA JÚNIOR (2020, p. 17).

Pelo que percebemos na definição acima cada um dos lados do polígono, tangencia o círculo, ou seja, possuem um ponto em comum e isso é o que caracteriza a circunscrição do polígono ao mesmo tempo em que o círculo está inscrito ao polígono.

Figura 3A – Polígono circunscritível de inraio R1.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

5.1 SEÇÃO 1

Fórmula de Heron

Segundo Oliveira (2015), alguns livros didáticos citam de forma timidamente comentários acerca da Fórmula de Heron. Esta fórmula é uma simplificação da Fórmula de Brahmagupta. Heron ou Herão de Alexandria, matemático, físico, astrônomo e engenheiro. Nasceu e faleceu na era cristã, no primeiro século (10 d.C a 70 d.C). Possuía muitos conhecimentos de Engenharia e de Geometria, é conhecido, especialmente pela sua famosa fórmula, que leva o seu nome, possui um trabalho denominado A Métrica, que passou a ser conhecido a partir de 1896, ele trata de assuntos relacionados com a medição de figuras simples e de planos sólidos, onde traz a prova das fórmulas envolvidas nesse processo.

Segundo BOYER (2019), é citado que:

> Heron de Alexandria é conhecido na História da Matemática sobretudo pela fórmula, que tem seu nome, para a área do triângulo: $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ onde a, b, c são os lados e s é a metade da soma destes lados, isto é, o semiperímetro. Os árabes nos contam que a "fórmula de Heron" já era conhecida por Arquimedes, que sem dúvida tinha uma demonstração dela, mas a demonstração de Heron em sua Métrica é a mais antiga que temos. (BOYER, 2019, p. 130).

Portanto, vê-se a forte ligação que Heron de Alexandria tem com a História da Matemática. Com forte influência babilônica, seus exemplos de mensuração foram determinantes para a sua escolha por Matemática. Heron executou atividades utilizando-se de um algoritmo para extração de raízes quadradas e cúbicas, algoritmo que fora utilizado pelos babilônios há mais de 2 séculos anos antes do seu nascimento. Desenvolveu fórmulas para a determinação do cálculo do volume de vários sólidos, tais como prismas, pirâmides, cilindros, cones, tronco de cones, bem como, esferas e segmentos esféricos, anéis cilíndricos e prismatóides. Fez escritos sobre mecânica, com 13 trabalhos, dentre os quais máquinas de guerra e mecânica, em que tratava de várias máquinas simples e do movimento circular. Tem trabalhos em Pneumática onde descreve os princípios de funcionamento de sua máquina a vapor. Em Catóptrica falou sobre óptica, nele foram demonstrados os fundamentos da propagação retilínea da luz e a lei da reflexão. Em seu trabalho Dioptra, nome de um aparelho de utilidade análoga a dos modernos teodolitos, descreveu estudos sobre astronomia e geodésia.

> Embora Heron seja conhecido por esta fórmula, o árabe Abu'l Raihan Muhammad al-Biruni (973 - 1048) contestou a descoberta de Heron, alegando que o devido mérito seria de Arquimedes. Como a demonstração mais antiga conhecida por nós está em "A Métrica", nada mudou. OLIVEIRA (2015, p. 21).

Seja um triângulo cujas medidas dos lados são $a, b\ e\ c$, então, a sua área S pode ser calculada através da Fórmula de Heron, dada por:

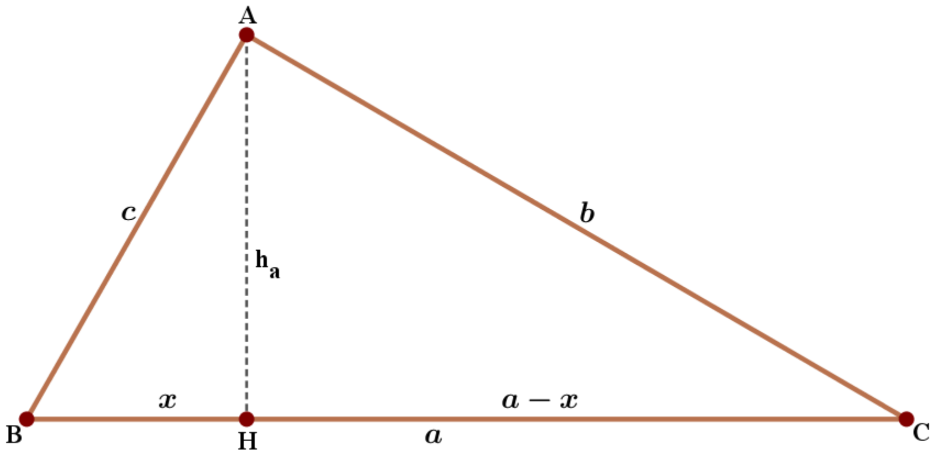
$S = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$, em que p é seu semiperímetro.

5.1.1 Demonstração da Fórmula de Heron

Alguns livros de Ensino Básico sugerem essa demonstração como exercício. Nela trabalharemos com fatoração. Para essa demonstração o discente precisa ter noções do Teorema de Pitágoras, conhecimentos de fatoração, produto notável e área de um triângulo, sendo conhecidos um lado e a sua altura relativa a esse lado.

Observando o triângulo ABC da figura 4 abaixo, temos:

Figura 4. Triângulo ABC qualquer.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Nos triângulos ABH e ACH, por Pitágoras, obtemos: $\begin{cases} c^2 = x^2 + (h_a)^2 \ (I) \\ b^2 = (a-x)^2 + (h_a)^2 (II) \end{cases}$, encontrando o valor de x na primeira equação e substituindo na segunda, chegamos em: $c^2 = x^2 + (h_a)^2 \Rightarrow x = \sqrt{c^2 - (h_a)^2}$, que em (II), fica assim:

$b^2 = \left(a - \sqrt{c^2 - (h_a)^2}\right)^2 + (h_a)^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - 2a\sqrt{c^2 - (h_a)^2} + c^2 - \cancel{(h_a)^2} + \cancel{(h_a)^2} \Rightarrow$ $b^2 = a^2 - 2a\sqrt{c^2 - (h_a)^2} + c^2 \Rightarrow 2a\sqrt{c^2 - (h_a)^2} = a^2 + c^2 - b^2$, de onde obtém-se $\sqrt{c^2 - (h_a)^2} = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$, elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se a seguinte igualdade: $\left(\sqrt{c^2 - (h_a)^2}\right)^2 = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} \Rightarrow c^2 - (h_a)^2 = \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$, que resulta na equação: $(h_a)^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)^2$ Lembrando, da fatoração, que $m^2 - n^2 = (m-n)\cdot(m+n)$, podemos escrever que a seguinte equação: $(h_a)^2 = \left[c - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\right] \cdot \left[c + \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\right] \Rightarrow$ $(h_a)^2 = \left[\frac{2ac-(a^2+c^2-b^2)}{2a}\right] \cdot \left[\frac{2ac+(a^2+c^2-b^2)}{2a}\right] \Rightarrow (h_a)^2 = \left[\frac{2ac-a^2-c^2+b^2}{2a}\right] \cdot \left[\frac{2ac+a^2+c^2-b^2}{2a}\right]$, vale salientar que $-(a-c)^2 = -a^2 + 2ac - c^2$ e que $(a+c)^2 = a^2 + 2ac + c^2$. Com isso: $(h_a)^2 = \left[\frac{-(a-c)^2+b^2}{2a}\right] \cdot \left[\frac{(a+c)^2-b^2}{2a}\right] \Rightarrow (h_a)^2 = \frac{[b^2-(a-c)^2]\cdot[(a+c)^2-b^2]}{4a^2}$. Fazendo-se $a - c = x$ e, $a + c = y$, obtendo-se: $[b^2 - x^2]\cdot[y^2 - b^2] \Rightarrow [(b+x)\cdot(b-x)]\cdot[(y+b)\cdot(y-b)]$, retornando à equação anterior, ficamos com:

$\left[(b + a - c)\cdot\left(b - (a - c)\right)\right]\cdot[(a + c + b)\cdot(a + c - b)]$, arrumando, obtemos:

$(a + b + c)\cdot(b + c - a)\cdot(a + c - b)\cdot(a + b - c)$, logo:

$(h_a)^2 = \frac{(a+b+c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)\cdot(a+b-c)}{4a^2}$. Como o perímetro do triângulo ABC, é dado pela igualdade $2p = a + b + c \Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2}$ (semiperímetro). Diante desse desenvolvimento, pode-se afirmar que: $(h_a)^2 = \frac{2p\cdot 2(p-a)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-c)}{4a^2} \Rightarrow (h_a)^2 = \frac{4p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{a^2} \Rightarrow$ $h_a = \sqrt{\frac{4p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}{a^2}} \Rightarrow h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. Tomando por base do triângulo o lado a e altura h_a pode-se, por definição de área, escrever que a área do triângulo é dada por $S = \frac{1}{2}a.h_a$, portanto, chega-se a: $S = \frac{1}{2}a.\frac{2}{a}\sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}$. O que implica em: $\boldsymbol{S = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}}$ que é a fórmula que permite calcular a área de um triângulo, sendo conhecidas as medidas dos seus lados $a, b\ e\ c$.

5.2 SEÇÃO 2

Fórmula de Brahmagupta

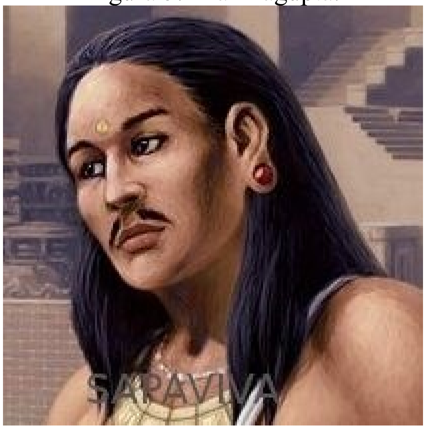
Como objetivo principal deste trabalho, e amparado pela Fórmula de Heron, mostrada na seção anterior, apresentar-se-á nesta seção a Fórmula de Brahmagupta, onde busca-se determinar a área de quadriláteros inscritíveis em uma circunferência, ou seja, quadriláteros convexos, onde são conhecidos apenas as medidas dos seus lados. Nesta seção serão apresentadas três demonstrações para o cálculo da área de quadriláteros cíclicos.

Pelo fato de sofrer muitas invasões, a população hindu teve forte influência de vários povos, especialmente os arianos, os macedônios de Alexandre e os persas o que trouxe muita contribuição tanto cultural quanto científica. Houve um grande avanço da Matemática Indiana ao mesmo tempo que o Império Romano Ocidental ruía, mesmo não se tendo tantos registros sobre a cronologia de seus estudos. À época como a Índia que se encontrava distante da Europa os estudos chegaram ao Ocidente por meio de Bagdá e da Matemática Árabe.

A Matemática utilizada pelos hindus servia de ferramenta, pois eram considerados astrônomos, no entanto, a Geometria era o principal ramo de estudos por causa das construções dos templos sagrados no tocante às medidas, embora fosse utilizada de forma empírica, ou seja, ligada à mensuração. Existiam elevados interesses pela Álgebra e pela Análise Combinatória.

Um dos matemáticos hindus mais importantes foi Brahmagupta, juntamente com Aryabhata e Bhaskara. Nascido em 598 d.C. viveu 67 anos, ou seja, até 665 d.C. sob a dinastia de Gupta.

Figura 5. Brahmagupta.



Fonte: https://www.sapaviva.com/brahmagupta

Uma das principais obras de Brahmagupta é chamada de "*Brahma-Sphuta-Sidd'hanta*" cuja tradução é "O sistema de Brahma Revisado" datada de 628 d.C. que trata de astronomia em que dos 21 capítulos, dois referem-se à Matemática. Brahmagupta era um estudioso de Matemática em que se destacam além dos estudos de Geometria, as equações lineares indeterminadas e do segundo grau, bem como um método para formação de ternas pitagóricas e aritméticas com quantidades negativas, mas sem sombra de dúvidas o seu melhor feito é o foco deste trabalho, a sua fórmula que permite calcular a área de quadriláteros convexos inscritíveis, fazendo também alusão ao cálculo de suas diagonais.

De acordo com BOYER (2019), a maior descoberta de Brahmagupta, foi sem sombra de dúvidas, a fórmula que é o tema central deste trabalho, onde ele cita que:

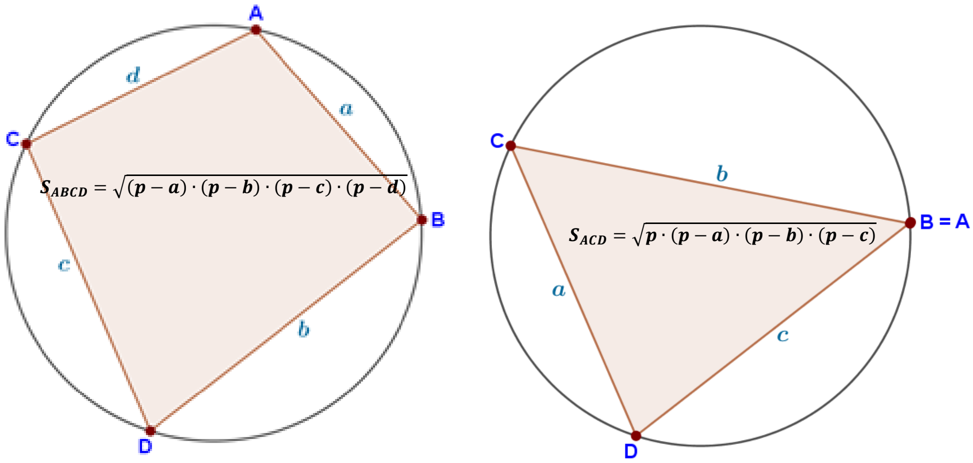
> Talvez o resultado mais belo na obra de Brahmagupta seja a generalização da "fórmula de Heron" para achar a área do quadrilátero. Essa fórmula, $\mathrm{K} = \sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})(s-d)}$ onde a, b, c, d são os lados e s é o semiperímetro, ainda leva seu nome; mas a glória de seu sucesso é obscurecida pelo fato de ele não observar que a fórmula só é correta no caso de um quadrilátero cíclico. A fórmula correta para um quadrilátero arbitrário é $\mathrm{K} = \sqrt{(\mathrm{s}-\mathrm{a})(\mathrm{s}-\mathrm{b})(\mathrm{s}-\mathrm{c})(s-d) - abcdcos^2\alpha}$ onde α é metade da soma de dois ângulos opostos". (BOYER, 2019, p. 159).

Nota-se claramente a ligação que Brahmagupta possui com a História da Matemática, com diversas contribuições importantes, mas que sua fórmula é um dos mais belos.

Fórmula de Brahmagupta – Seja um quadrilátero convexo inscritível em que os seus lados têm medidas a, b, c e d, então a sua área S, poderá ser calculada por

Figura 6. Quadrilátero ABCD (A) transformado num triângulo ACD (B).

(A) – Quadrilátero inscritível $ABCD$ (B) – Triângulo ACD gerado de $ABCD$



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

$S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$. Nesta fórmula, p é o semiperímetro do quadrilátero. Uma observação importante é a seguinte: caso tenhamos um quadrilátero convexo inscritível $ABCD$, cujas medidas dos lados sejam a, b c e d, a medida de sua área será calculada pela área acima. Imagine que os vértices desse quadrilátero sejam móveis, portanto, se sobrepusermos o vértice A sobre o vértice B, o quadrilátero tornar-se-á um triângulo ACD, pela construção, então, o novo polígono formado terá a medida da área calculada pela Fórmula de Heron, o que resulta em dizer que é um caso particular da Fórmula de Brahmagupta.

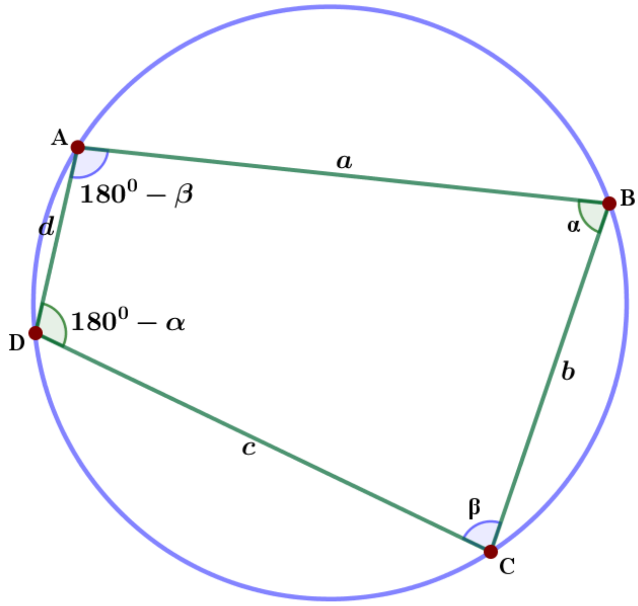
5.2.1 Primeira demonstração da Fórmula de Brahmagupta

Para esta demonstração os requisitos necessários são semelhança entre triângulos, Fórmula de Heron vista na seção 1, fatoração, razão entre as áreas de figuras semelhantes e noções de razão e proporção.

Neste mesmo sentido conforme sugeriu HESS (2012) *apud* OLIVEIRA (2015), parte-se da Fórmula de Heron, demonstrada na seção 1, subitem 5.1.1 para se poder demonstrar a Fórmula de Brahmagupta.

Tome um quadrilátero inscritível de vértices $A, B, C\ e\ D$, conforme figura 7, abaixo:

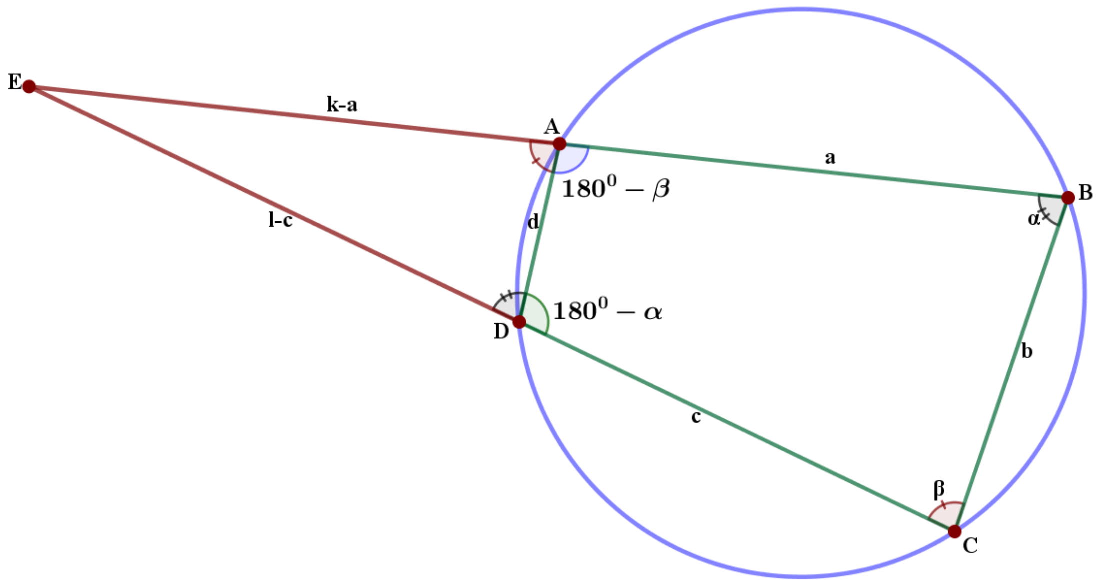
Figura 7. Quadrilátero inscritível.



Fonte - Próprio autor

Sabe-se que os ângulos opostos nos quadriláteros são suplementares, ou seja, sua soma é igual a 180^0. Diante desse fato e determinando-se que $\overline{AB} = a, \overline{BC} = b,\ \overline{CD} = c\ e$ $\overline{DA} = d.$ Prolongue os lados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e determine que $\overline{BE} = k$ e $\overline{CE} = l$, com isso tem-se que $\overline{AE} = k - a$ e $\overline{DE} = l - c$, conforme figura 8, abaixo:

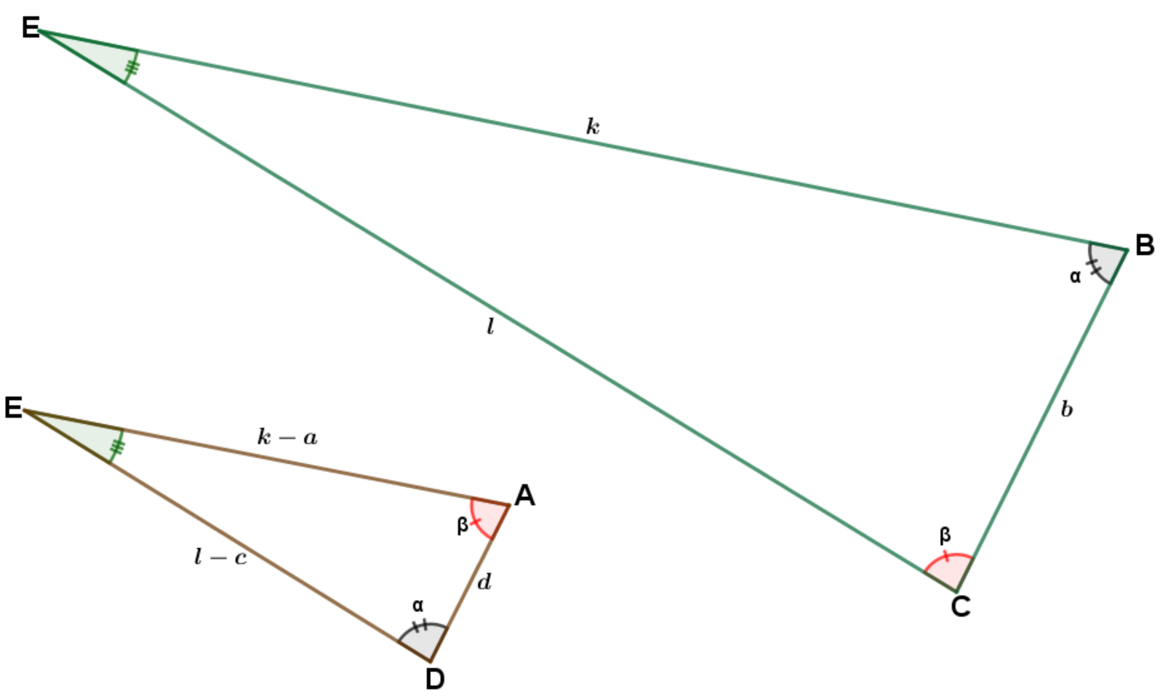
Figura 8. Quadrilátero inscritível com prolongamento dos lados.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Verifica-se pela figura 8, acima que os triângulos BCE e DAE são semelhantes, pois o ângulo $B\hat{A}E = 180^0$, como $B\hat{A}D = 180^0 - \beta$ e $D\hat{A}E + B\hat{A}D = 180^0$, então temos que a seguinte situação: $D\hat{A}E + 180^0 - \beta = 180^0 \Rightarrow D\hat{A}E = -180^0 + \beta + 180^0 \Rightarrow D\hat{A}E = \beta$. Como os ângulos $A\hat{E}D$ e $B\hat{E}C$ são congruentes, ou seja, têm a mesma medida, verificamos também que os ângulos $D\hat{A}E = \beta = B\hat{C}D$, logo é condição suficiente para que os triângulos BCE e DAE sejam semelhantes. Veja ilustração abaixo:

Figura 9. Triângulos BCE e ADE, semelhantes.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Da figura 8 anterior, pode-se observar que a área do quadrilátero inscritível é igual à área do triângulo BCE menos a área do triângulo DAE, portanto, utilizando-se a Fórmula de Heron, já conhecida anteriormente, no triângulo BCE e sabendo-se que seu perímetro é representado por $2p = b + k + l$. A área do triângulo BCE será calculada da seguinte forma:

$S_{BCE} = \sqrt{\left(\frac{2p}{2}\right) \cdot \left(\frac{2p}{2} - k\right) \cdot \left(\frac{2p}{2} - l\right) \cdot \left(\frac{2p}{2} - b\right)}$, ou ainda

$$S_{BCE} = \sqrt{\left(\frac{k+l+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{k+l+b}{2} - k\right) \cdot \left(\frac{k+l+b}{2} - l\right) \cdot \left(\frac{k+l+b}{2} - b\right)} \Rightarrow$$

$$S_{BCE} = \sqrt{\left(\frac{k+l+b}{2}\right) \cdot \left(\frac{k+l+b-2k}{2}\right) \cdot \left(\frac{k+l+b-2l}{2}\right) \cdot \left(\frac{k+l+b-2b}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$S_{BCE} = \sqrt{\frac{1}{16} \cdot (k+l+b) \cdot (-k+l+b) \cdot (k-l+b) \cdot (k+l-b)} \Rightarrow$$

$S_{BCE} = \frac{1}{4}\sqrt{(k+l+b)\cdot(-k+l+b)\cdot(k-l+b)\cdot(k+l-b)}$. Como $\Delta BCE \sim \Delta DAE$, pode-se estabelecer a proporção: $\frac{b}{d} = \frac{k}{l-c} = \frac{l}{k-a}$, que se desenvolvendo, resulta em: $k = \frac{(l-c)b}{d}$ e $l = \frac{(k-a)b}{d}$, $k + l = \frac{(l-c)b}{d} + \frac{(k-a)b}{d} \Rightarrow k + l = \frac{lb-cb+kb-ab}{d} \Rightarrow$
$kd + ld = lb - cb + kb - ab \Rightarrow kd + ld - lb - kb = -cb - ab \Rightarrow$
$k(d-b) + l(d-b) = -b(c+a)$, dividindo ambos os membros por $(d-b)$, chega-se a: $k + l = \frac{-b(c+a)}{(d-b)}$, ou seja: $k + l = \frac{b(a+c)}{(b-d)}$ e $k - l = \frac{(l-c)b}{d} - \frac{(k-a)b}{d} \Rightarrow$

$$k - l = \frac{lb - cb - kb + ab}{d} \Rightarrow kd - ld = lb - cb - kb + ab \Rightarrow$$

$kd - ld - lb + kb = -cb + ab \Rightarrow k(d+b) - l(d+b) = b(a-c)$, dividindo ambos os membros por $(d+b)$, chega-se a: $k - l = \frac{b(a-c)}{(b+d)}$. Fazendo uma adequação para aplicar na fórmula: $S_{BCE} = \frac{1}{4}\sqrt{(k+l+b)\cdot(-k+l+b)\cdot(k-l+b)\cdot(k+l-b)}$, e fazendo uma relação com a medida b em ambos os membros $k + l, k - l, e\ -k + 1$, obtemos:
$k + l + b = \frac{b(a+c)}{(b-d)} + b \Rightarrow k + l + b = b\left(\frac{(a+c)}{(b-d)} + 1\right) \Rightarrow k + l + b = b\left(\frac{a+c+b-d}{b-d}\right)$,
$k - l + b = \frac{b(a-c)}{(b+d)} + b \Rightarrow k - l + b = b\left(\frac{(a-c)}{(b+d)} + 1\right) \Rightarrow k - l + b = b\left(\frac{a-c+b+d}{b+d}\right)$,
$k + l - b = \frac{b(a+c)}{(b-d)} - b \Rightarrow k + l - b = b\left(\frac{(a+c)}{(b-d)} - 1\right) \Rightarrow k + l - b = b\left(\frac{a+c-b+d}{b-d}\right)$. Com relação a $-k + l$, temos: $-k + l = \frac{-(l-c)b}{d} + \frac{(k-a)b}{d} \Rightarrow -k + l = \frac{-lb+cb+kb-ab}{d} \Rightarrow$
$-kd + ld + lb - kb = b(c-a) \therefore -k(d+b) + l(d+b) = b(c-a)$, dividindo ambos os membros por $(d+b)$, chega-se a: $-k + l = b\frac{(c-a)}{(b+d)}$, adicionando a medida b em ambos os membros, conclui-se que: $-k + l + b = b\frac{(c-a)}{(b+d)} + b \Rightarrow -k + l + b = b\left(\frac{(c-a)}{(b+d)} + 1\right) \Rightarrow$
$-k + l + b = b\left(\frac{c-a+d+b}{(b+d)}\right)$. Fazendo as respectivas substituições obtém-se:

$S_{BCE} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(b\left(\frac{a+c+b-d}{(b-d)}\right)\right)\cdot\left(b\left(\frac{c-a+d+b}{(b+d)}\right)\right)\cdot\left(b\left(\frac{a-c+b+d}{(b+d)}\right)\right)\cdot\left(b\left(\frac{a+c-b+d}{(b-d)}\right)\right)}$. Dos denominadores, temos que: $(b-d)\cdot(b+d)\cdot(b+d)\cdot(b-d) \Rightarrow (b-d)^2\cdot(b+d)^2$, então ficamos com: $(b^2 - 2bd + d^2)\cdot(b^2 + 2bd + d^2) =$

$= b^4 + 2b^3d + b^2d^2 - 2b^3d - 4b^2d^2 - 2bd^3 + b^2d^2 + 2bd^3 + d^4 = b^4 - 2b^2d^2 + d^4$, temos também que: $(b^2 - d^2)^2 = b^4 - 2b^2d^2 + d^4$, logo, $(b-d)^2 \cdot (b+d)^2 = (b^2 - d^2)^2$, então:

$$S_{BCE} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{b^4}{(b^2-d^2)^2} \cdot (a+c+b-d) \cdot (c-a+d+b) \cdot (a-c+b+d) \cdot (a+c-b+d)},$$

$$\Rightarrow S_{BCE} = \frac{b^2}{4(b^2-d^2)}\sqrt{(a+c+b-d) \cdot (c-a+d+b) \cdot (a-c+b+d) \cdot (a+c-b+d)}.$$

Mais uma vez utilizando-se a semelhança entre os triângulos $\Delta BCE \sim \Delta DAE$, tem-se: $\frac{S_{DAE}}{S_{BCE}} = \frac{d^2}{b^2}$, mas pela figura 8, acima, verifica-se que: $S_{DAE} = S_{BCE} - S_{ABCD}$, logo, $\frac{S_{BCE} - S_{ABCD}}{S_{BCE}} = \frac{d^2}{b^2} \Rightarrow$
$\frac{S_{BCE}}{S_{BCE}} - \frac{S_{ABCD}}{S_{BCE}} = \frac{d^2}{b^2} \Rightarrow 1 - \frac{S_{ABCD}}{S_{BCE}} = \frac{d^2}{b^2} \Rightarrow \frac{S_{ABCD}}{S_{BCE}} = 1 - \frac{d^2}{b^2} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{BCE}\left(\frac{b^2-d^2}{b^2}\right)$.

Como o perímetro do quadrilátero $ABCD$ é dado por $2p = a + b + c + d$, e efetuando as substituições, chega-se a:

$$S_{ABCD} = \frac{b^2}{4(b^2-d^2)}\sqrt{(2p-d-d) \cdot (2p-a-a) \cdot (2p-c-c) \cdot (2p-b-b)} \cdot \left(\frac{b^2-d^2}{b^2}\right) \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\sqrt{2(p-d) \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-b)} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4}\sqrt{16(p-d) \cdot (p-a) \cdot (p-c) \cdot (p-b)} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \frac{4}{4}\sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S_{ABCD} = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}}.$$

Observe que dois quadriláteros convexos cujos lados são congruentes, não necessariamente terão a mesma área, isto só ocorrerá se seus ângulos opostos forem suplementares, condição para que ele seja inscritível numa circunferência. Para exemplificar, imagine um quadrado $ABCD$, cujo lado mede, 5,66 metros, para esse quadrado a sua área é numericamente igual a: $S_{ABCD} = l^2 \Rightarrow S_{ABCD} = 5{,}66^2 \Rightarrow S_{ABCD} \cong 32{,}04\, m^2$. Como no quadrado os ângulos opostos são suplementares, pode-se aplicar a Fórmula de Brahmagupta, onde se poderá encontrar o resultado: $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}$, onde $p = \frac{4 \cdot 5{,}66}{2}$. Que resulta em $\frac{22{,}64}{2} = 11{,}32\, m$. Logo chegaremos ao seguinte resultado para a área:

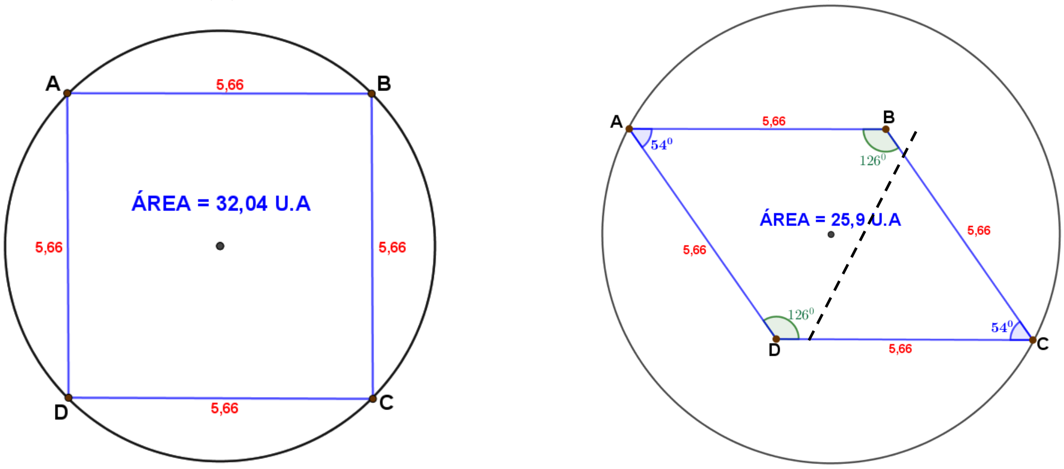
$$S_{ABCD} = \sqrt{(11{,}32 - 5{,}66) \cdot (11{,}32 - 5{,}66) \cdot (11{,}32 - 5{,}66) \cdot (11{,}32 - 5{,}66)} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{(5{,}66) \cdot (5{,}66) \cdot (5{,}66) \cdot (5{,}66)} \Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{1026{,}28} \Rightarrow S_{ABCD} \cong 32{,}04\, m^2.$$

Vamos construir através do software GeoGebra uma ilustração para melhor compreensão, do quadrado $ABCD$ inscrito, figura 10 (A), vamos modificar seus ângulos internos, de forma que seus lados fiquem inalterados, ou seja, tornando-o um losango, cujos ângulos internos passem a ter medidas 54^0 e 126^0 alternadamente, figura 10 (B). Se dividirmos o losango obtido em dois triângulos com lados medindo 5,66 metros e o ângulo compreendido entre eles, medindo 54^0 ou 126^0 e, aplicando-se a fórmula da área do triângulo, conhecendo-se dois lados de um triângulo e o ângulo compreendido entre eles, cuja fórmula dada é igual a: $S_\Delta = \frac{1}{2} \cdot l \cdot l \cdot \text{sen}\theta$, que se encontra demonstrada no apêndice A, encontramos a seguinte resposta: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$, como os triângulos têm a mesma medida de área, ou seja, $S_{ABD} = S_{BCD}$, podemos concluir que a igualdade a seguir se verifica, logo, chegamos a: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{ABD} \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} \Rightarrow S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5{,}66 \cdot 5{,}66 \cdot sen54^0 \Rightarrow$ $S_{ABCD} = 32{,}0356 \cdot 0{,}809 \Rightarrow S_{ABCD} \cong 25{,}9\, m^2$. Percebe-se que a diferença é verificada pelo fato do quadrado ser inscritível em uma circunferência, enquanto o losango é não-inscritível, não cabendo neste último caso, a aplicação da Fórmula de Brahmagupta e sim a Fórmula de Bretschneider, demonstrada no apêndice F. Na figura 10, abaixo, tem-se a ilustração.

Figura 10. Quadrilátero ABCD\ inscrito (A) e sua transformação num losango ABCD (B).

(A) (B)



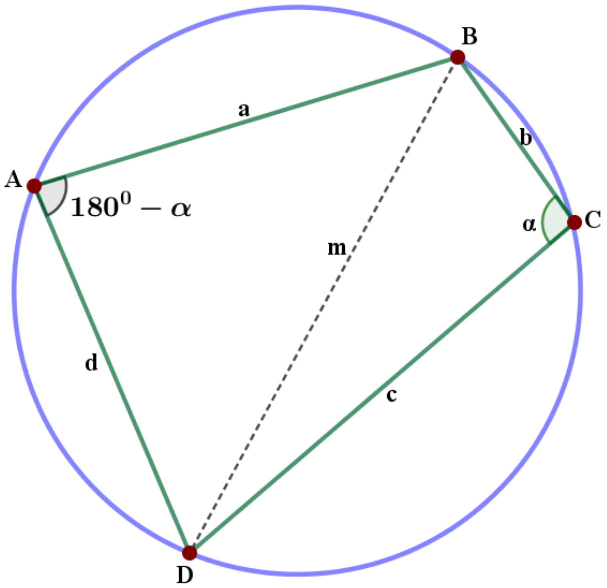
Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

5.2.2 Segunda demonstração da Fórmula de Brahmagupta

Demonstração feita pelo autor, amparada por OLIVEIRA (2015). Para entender esta segunda demonstração o estudante do Ensino Médio precisa ter conhecimento prévio de trigonometria sobre seno e cosseno de ângulos suplementares, área de um triângulo conhecendo-se dois lados e o seno do ângulo compreendido entre eles, lei dos cossenos, relação fundamental trigonométrica e fatoração.

Tomando-se por base a figura 11, abaixo:

Figura 11. Quadrilátero inscritível com diagonal m dividindo-o nos ΔABD e ΔBCD.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Nos triângulos acima determinados na figura 11, utilizando-se a fórmula que determina a área de cada um deles, conhecendo-se dois lados e o ângulo compreendido que é dada por:

$S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \mathrm{sen}(180^0 - \alpha)$ e $S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{sen}(\alpha)$ e, também observando, na mesma figura, que: $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$, então chegamos a:

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \mathrm{sen}(180^0 - \alpha) + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{sen}(\alpha)$, da trigonometria, sabe-se que, $\mathrm{sen}(180^0 - \alpha) = \mathrm{sen}180^0 \cdot \cos\alpha - \mathrm{sen}\alpha \cdot \cos 180^0 = \mathrm{sen}\alpha$, fazendo a substituição ficamos com, $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \mathrm{sen}\alpha + \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \mathrm{sen}(\alpha) \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{\mathrm{sen}\alpha}{2}(a \cdot d + b \cdot c) \Rightarrow$ $\mathrm{sen}\alpha = \frac{2S_{ABCD}}{(a \cdot d + b \cdot c)}$. Aplicando, agora, a lei dos cossenos nos mesmos triângulos, obtemos: $m^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos(180^0 - \alpha)$, das identidades trigonométricas tem-se que: $\cos(180^0 - \alpha) = \cos 180^0 \cdot \cos\alpha + \mathrm{sen}180^0 \cdot \mathrm{sen}\alpha = -\cos\alpha$, efetuando-se as devidas substituições, temos: $m^2 = a^2 + d^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot (-\cos\alpha) \Rightarrow m^2 = a^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha$ e, também, $m^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$, como a medida de $m > 0$, podem-se efetuar as igualdades acima, ficando com: $a^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \Rightarrow$

$2 \cdot a \cdot d \cdot \cos\alpha + 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2 - d^2 \Rightarrow$

$2\cos\alpha(a \cdot d + b \cdot c) = b^2 + c^2 - a^2 - d^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{(b^2+c^2-a^2-d^2)}{2(a\cdot d+b\cdot c)}$. Ainda da trigonometria, lembrando-se da relação fundamental que diz que: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, podemos escrever:

$\left[\frac{2S_{ABCD}}{(a\cdot d+b\cdot c)}\right]^2 + \left[\frac{(b^2+c^2-a^2-d^2)}{2(a\cdot d+b\cdot c)}\right]^2 = 1 \Rightarrow \frac{4(S_{ABCD})^2}{(a\cdot d+b\cdot c)^2} + \frac{(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}{4(a\cdot d+b\cdot c)^2} = 1 \Rightarrow$

$\frac{16(S_{ABCD})^2+(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}{4(a\cdot d+b\cdot c)^2} = 1 \Rightarrow 16(S_{ABCD})^2 + (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 = 4(a \cdot d + b \cdot c)^2 \Rightarrow$

$16(S_{ABCD})^2 = 4(a \cdot d + b \cdot c)^2 - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)^2 \Rightarrow$ para facilitar o entendimento da fatoração e a diferença entre quadrados, vamos chamar $m = a \cdot d + b \cdot c$ e analogamente chamar $n = b^2 + c^2 - a^2 - d^2$, então chegamos a seguinte igualdade ao substituirmos: $16(S_{ABCD})^2 = 4m^2 - n^2 = (2m)^2 - n^2 \Rightarrow 16(S_{ABCD})^2 = (2m - n)(2m + n)$, retornando aos valores iniciais, obtém-se à seguinte equação:

$16(S_{ABCD})^2 = \big(2(a \cdot d + b \cdot c) - (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)\big) \cdot \big(2(a \cdot d + b \cdot c) + (b^2 + c^2 - a^2 - d^2)\big)$.

$16(S_{ABCD})^2 = \big(2(a \cdot d + b \cdot c) - b^2 - c^2 + a^2 + d^2\big) \cdot \big(2(a \cdot d + b \cdot c) + b^2 + c^2 - a^2 - d^2\big)$.

Na fórmula encontrada vamos utilizar mais uma vez a fatoração e os quadrados perfeitos, chegando à seguinte equação:

$16(S_{ABCD})^2 = \big(2ad + 2bc - b^2 - c^2 + a^2 + d^2\big) \cdot \big(2ad + 2bc + b^2 + c^2 - a^2 - d^2\big) \Rightarrow$

$16(S_{ABCD})^2 = (a^2 + 2ad + d^2 - b^2 + 2bc - c^2) \cdot (b^2 + 2bc + c^2 - a^2 + 2ad - d^2) \Rightarrow$

$16(S_{ABCD})^2 = ((a + d)^2 - (b - c)^2) \cdot ((b + c)^2 - (a - d)^2)$, usando mais uma vez a fatoração suponha que $x = a + d$, $y = b - c$, $r = b + c$ e $s = a - d$, então obtemos:

$16(S_{ABCD})^2 = ((x)^2 - (y)^2) \cdot ((r)^2 - (s)^2) \Rightarrow$

$16(S_{ABCD})^2 = \big((x + y)(x - y)\big) \cdot \big((r + s)(r - s)\big) \Rightarrow$

$16(S_{ABCD})^2 = \big((a + d + b - c)(a + d + c - b)\big) \cdot \big((b + c + a - d)(b + c + d - a)\big)$,

como o perímetro do quadrilátero é dado por $2p = a + b + c + d \Rightarrow$, fazendo a substituição na fórmula acima, encontramos:

$16(S_{ABCD})^2 = \big((2p - c - c)(2p - b - b)\big) \cdot \big((2p - d - d)(2p - a - a)\big) \Rightarrow$

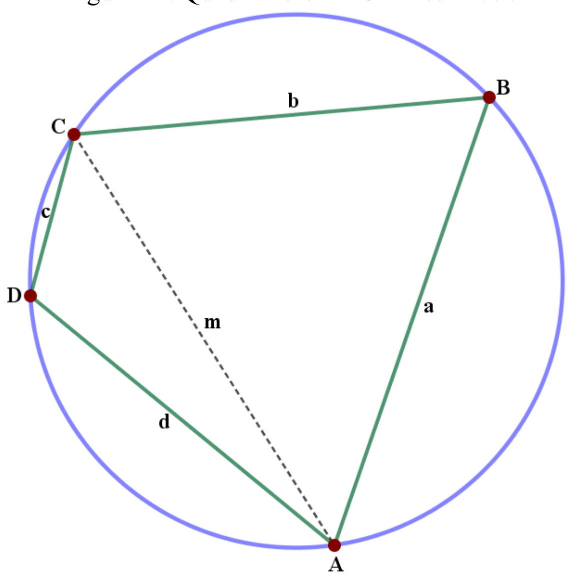
$16(S_{ABCD})^2 = \big((2p-2c)(2p-2b)\big)\cdot\big((2p-2d)(2p-2a)\big)$, colocando-se o 2 em evidência, obtém-se: $16(S_{ABCD})^2 = 2(p-c)\cdot 2(p-b)\cdot 2(p-d)\cdot 2(p-a) \Rightarrow$
$16(S_{ABCD})^2 = 16(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d) \Rightarrow$
$(S_{ABCD})^2 = (p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)$, como o semiperímetro p é sempre maior que o maior dos lados do quadrilátero, então podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros da equação anterior, obtendo $\sqrt{(S_{ABCD})^2} = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)} \Rightarrow$
$\boldsymbol{S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}}$, que é a comprovação da Fórmula de Brahmagupta pela segunda forma.

5.2.3 Terceira demonstração da Fórmula de Brahmagupta

Para esta terceira demonstração, devido ao grau de dificuldade dos conhecimentos prévios exigidos, é melhor que seja realizada com estudantes a partir das segundas séries do Ensino Médio onde serão necessários os seguintes pré-requisitos: fatoração, Teorema de Pitágoras, área do triângulo sendo conhecidos os lados e o raio da circunferência nele circunscrita, lei dos senos e as diagonais de um quadrilátero cíclico em função dos seus lados.

Tomando-se por base a figura 12, abaixo para dar suporte à demonstração, tem-se:

Figura 12. Quadrilátero ABCD inscritível.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo Geogebra

Vamos calcular a área de um triângulo em função do comprimento dos seus lados e do raio da circunferência nele circunscrita, fórmula demonstrada no apêndice I.

$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{abm}{4R} + \frac{cdm}{4R} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{m}{4R}(ab + cd)$. Pela figura acima percebe-se que $AC = m$.

Utilizando-se no lugar de m o valor encontrado no apêndice D, no cálculo das diagonais de um quadrilátero inscritível, onde $m = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}}$, temos: $S_{ABCD} = \frac{(ab+cd)}{4R} \cdot m \Rightarrow$ $S_{ABCD} = \frac{(ab+cd)}{4R} \cdot \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}}$, com uma simples operação, chega-se à seguinte equação: $S_{ABCD} = \frac{1}{4R} \cdot \sqrt{\frac{(ab+cd)^2(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{4R} \cdot \sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}$. Para finalizarmos a demonstração vamos recorrer ao valor do raio R da circunferência circunscrita ao quadrilátero inscritível, determinado no apêndice E, que é: $R^2 = \frac{(cdm)^2}{((c+d)^2-m^2)\cdot(m^2-(c-d)^2)}$, onde faremos, em separado, um estudo de cada parte que compõe o seu denominador, considerando também a igualdade $m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}$, encontrada no apêndice D, no cálculo das diagonais de um quadrilátero inscritível, temos:

$$(c + d)^2 - m^2 = (c + d)^2 - \frac{(ac + bd)(ad + bc)}{(ab + cd)} \Rightarrow$$

$$(c + d)^2 - m^2 = \frac{(ab + cd) \cdot (c + d)^2 - (ac + bd) \cdot (ad + bc)}{(ab + cd)} \Rightarrow$$

$$(c + d)^2 - m^2 = \frac{(ab + cd) \cdot (c^2 + 2cd + d^2) - (ac + bd) \cdot (ad + bc)}{(ab + cd)} \Rightarrow$$

$$(c + d)^2 - m^2 = \frac{abc^2 + 2abcd + abd^2 + c^3d + 2c^2d^2 + cd^3 - a^2cd - abc^2 - abd^2 - b^2cd}{(ab + cd)} \Rightarrow$$

$(c + d)^2 - m^2 = \frac{2abcd+c^3d+2c^2d^2+cd^3-a^2cd-b^2cd}{(ab+cd)}$, colocando cd em evidência, obtemos:

$(c + d)^2 - m^2 = \frac{cd(2ab+c^2+2cd+d^2-a^2-b^2)}{(ab+cd)} \Rightarrow$, fazendo uma rearrumação, temos:

$(c + d)^2 - m^2 = \frac{cd(c^2+2cd+d^2-a^2+2ab-b^2)}{(ab+cd)}$, verifica-se que temos o quadrado da soma e o quadrado da diferença, assim: $(c + d)^2 - m^2 = \frac{cd((c+d)^2-(a-b)^2)}{(ab+cd)}$, façamos $(c + d) = x$ e $(a - b) = y$, então teríamos: $(x)^2 - (y)^2 \Rightarrow (x + y) \cdot (x - y)$, resgatando os valores originais, temos: $(c + d + a - b) \cdot \left(c + d - (a - b)\right) \Rightarrow (c + d + a - b) \cdot (c + d - a + b)$, rearrumando e substituindo na equação anterior, obtemos a seguinte igualdade:

$(c+d)^2 - m^2 = \frac{cd(a+c+d-b)\cdot(b+c+d-a)}{(ab+cd)}$. Analogamente, toma-se a igualdade a seguir e conclui-se que: $m^2 - (c-d)^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} - (c-d)^2 \Rightarrow$

$$m^2 - (c-d)^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc) - (ab+cd)(c-d)^2}{(ab+cd)} \Rightarrow$$

$$m^2 - (c-d)^2 = \frac{(a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd) - (ab+cd)(c^2 - 2cd + d^2)}{(ab+cd)} \Rightarrow$$

$$m^2 - (c-d)^2 = \frac{(a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd) - abc^2 + 2abcd - abd^2 - c^3d + 2c^2d^2 - cd^3}{(ab+cd)} \Rightarrow$$

$$m^2 - (c-d)^2 = \frac{a^2cd + abc^2 + abd^2 + b^2cd - abc^2 + 2abcd - abd^2 - c^3d + 2c^2d^2 - cd^3}{(ab+cd)} \Rightarrow$$

$m^2 - (c-d)^2 = \frac{a^2cd + b^2cd + 2abcd - c^3d + 2c^2d^2 - cd^3}{(ab+cd)}$, colocando cd em evidência, chega-se a:

$m^2 - (c-d)^2 = \frac{cd(a^2 + b^2 + 2ab - c^2 + 2cd - d^2)}{(ab+cd)}$, resgatando os quadrados perfeitos, temos:

$m^2 - (c-d)^2 = \frac{cd((a+b)^2 - (c-d)^2)}{(ab+cd)}$, façamos $(a+b) = k$ e $(c-d) = l$, então teríamos:

$(k)^2 - (l)^2 \Rightarrow (k+l)\cdot(k-l)$, façamos $(c+d) = x$ e $(a-b) = y$, então teríamos:

$(x)^2 - (y)^2 \Rightarrow (x+y)\cdot(x-y)$, resgatando os valores originais, encontramos:

$(a+b+c-d)\cdot(a+b-c+d)$, donde concluímos que:

$m^2 - (c-d)^2 = \frac{cd(a+b+c-d)\cdot(a+b-c+d)}{(ab+cd)}$. Lembrando-se mais uma vez que o perímetro do quadrilátero em questão é: $2p = a+b+c+d$, substituindo nas duas equações encontradas acima, chega-se a: $(c+d)^2 - m^2 = \frac{cd(a+c+d-b)\cdot(b+c+d-a)}{(ab+cd)} \Rightarrow$

$(c+d)^2 - m^2 = \frac{cd(2p-2b)\cdot(2p-2a)}{(ab+cd)}$ e $m^2 - (c-d)^2 = \frac{cd(2p-2d)\cdot(2p-2c)}{(ab+cd)}$. Agora, retornemos ao cálculo do raio R, calculado no apêndice E, que resultou em:

$R^2 = \frac{(cdm)^2}{((c+d)^2 - m^2)\cdot(m^2 - (c-d)^2)}$, fazendo as devidas substituições obtém-se:

$$R^2 = \frac{(cdm)^2}{\left(\frac{cd(2p-2b)\cdot(2p-2a)}{(ab+cd)}\right)\cdot\left(\frac{cd(2p-2d)\cdot(2p-2c)}{(ab+cd)}\right)} \Rightarrow$$

$R^2 = \frac{(cdm)^2}{\left(\frac{cd2(p-b)\cdot 2(p-a)}{(ab+cd)}\right)\cdot\left(\frac{cd2(p-d)\cdot 2(p-c)}{(ab+cd)}\right)} \Rightarrow R^2 = \frac{(cdm)^2}{\left(\frac{16c^2d^2(p-b)\cdot(p-a)\cdot(p-d)\cdot(p-c)}{(ab+cd)^2}\right)}$. Organizando, tem-se:

$R^2 = \frac{(cdm)^2}{\frac{16c^2d^2(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}{(ab+cd)^2}} \Rightarrow R^2 = \frac{c^2d^2m^2(ab+cd)^2}{16c^2d^2(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$. Como

$m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)}$, então: $R^2 = \frac{c^2 d^2 \cdot \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} \cdot (ab+cd)^2}{16c^2 d^2 (p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)} \Rightarrow$

$R^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{16(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)} \Rightarrow R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}}$. Finalmente, do cálculo feito acima, correspondente à figura 12, onde encontramos a fórmula

$S_{ABCD} = \frac{1}{4R} \cdot \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}$, conclui-se que:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}}} \cdot \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}}{\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}}} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{\frac{(ab+cd)\cdot(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}}} \Rightarrow$$

$$S_{ABCD} = \sqrt{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)\frac{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}{(ab+cd)\cdot(ac+bd)\cdot(ad+bc)}} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}}\ .$$

Demonstração apoiada em OLIVEIRA (2015) com pequenas alterações. No apêndice F, apresenta-se uma fórmula que generaliza a Fórmula de Brahmagupta para o cálculo de áreas para quadriláteros convexos quaisquer, extraída da Revista do Professor de Matemática – RPM número 64, bem como a sua relação com matemático Carl Anton Bretschneider.

5.3 SEÇÃO 3

Plano de Aula – Avaliação Diagnóstica – Avaliação da aprendizagem

Nesta seção, após as apresentações e demonstrações das seções anteriores, será mostrado um Plano de Aula com situações-problemas e solicitações de provas e demonstrações que abrangerão os conteúdos abordados, onde o docente deve ficar à vontade para aplicá-lo conforme apresentado ou modificá-lo dentro da proposta da Fórmula de Brahmagupta. Antes, porém, será realizada uma Avaliação Diagnóstica com os alunos do 1.^{0} ano do Ensino Médio, com questões envolvendo perímetros e áreas das principais figuras planas, para saber como está o nível da turma e após ser feita a sua correção será posto em execução o Plano de Aula. Também serão mostradas, orientações sobre o uso do GeoGebra, um software livre, para auxiliar na resolução de problemas e construção dos polígonos convexos, especialmente os inscritíveis.

Com o Plano de Aula proposto, criado pelo autor, com algumas adaptações de Oliveira (2015), principalmente no tocante a inserção dos exercícios e problemas e o passo a passo a respeito do software GeoGebra, para aumentar a compreensão dos conteúdos abordados e trazer uma forma lúdica para os estudantes. Fica bem claro o objetivo geral do trabalho, que além de ter apresentado a importância da Fórmula de Brahmagupta no estudo de áreas de quadriláteros cíclicos (inscritíveis em uma circunferência) apresenta várias demonstrações da referida fórmula dentre outras que lhes dão suporte, o que permitirá a apresentação de várias atividades de resolução de situações-problemas, bem como a clareza no entendimento de alguns deles através do software GeoGebra.

Além da Fórmula de Brahmagupta, que se limita ao cálculo da área dos quadriláteros inscritíveis em uma circunferência, ou seja, àqueles cujos ângulos apostos são suplementares, no apêndice F, trazemos uma fórmula geral para o cálculo de um quadrilátero qualquer, conhecida como Fórmula de Bretschneider.

Conforme já citado nas demonstrações das fórmulas nas seções anteriores, sempre será exigido algum pré-requisito do discente para a plena resolução das situações-problemas constantes desse Plano de Aula.

O Plano de Aula pode ser trabalhado na segunda série do Ensino Médio, no entanto, o docente deverá acrescentar o estudo da Fórmula de Brahmagupta, uma vez que o ensino de áreas de quadriláteros, limita-se aos quadriláteros notáveis, tais como, quadrados, trapézios e alguns casos particulares, após o discente ter estudado o mínimo necessário de trigonometria.

Na execução do Plano de Aula, aconselha-se que seja feita previamente uma biografia sobre a vida de Brahmagupta, claro que de forma bastante resumida, com o intuito de motivar o discente a tomar gosto pelo assunto.

Toda a teoria acerca da Fórmula de Brahmagupta deve ser explorada em sala de aula com pelo menos uma das demonstrações acima. Para o Ensino Médio, indicamos a primeira demonstração, pois ela traz pré-requisitos que são mais fáceis de serem entendidos pelos alunos da segunda série do Ensino Médio e consequentemente pelas demais séries superiores. É importante fazer menção às Fórmulas de Heron e de Bretschneider, definir o que é um quadrilátero inscritível ou cíclico, e sempre apresentar a Fórmula de Brahmagupta: $S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, para um quadrilátero inscritível $ABCD$, deixando bem claro o que vem a ser o semiperímetro de um polígono.

Depois que for apresentada a Fórmula de Brahmagupta, é importante que seja dado um primeiro exemplo com a aplicação direta da Fórmula. Conforme a sugestão abaixo. Todos os exemplos estão resolvidos no apêndice, mas a criatividade deve ser destacada para encontrar outras resoluções, especialmente por parte do discente.

5.3.1 Sequência Didática do Plano de Aula

Antes de apresentarmos a Sequência Didática do Plano de Aula, faremos uma Avaliação Diagnóstica com sete problemas envolvendo perímetros e áreas das principais figuras planas, com o intuito de avaliar o nível da turma onde o referido plano será executado.

A Avaliação Diagnóstica deve ser aplicada em duas horas-aulas de 50 minutos cada, onde os alunos, nas questões objetivas (escolha da alternativa correta), além de marcarem as suas respostas, devem apresentar os cálculos e em torno de quinze dias, após correção deve ser aplicado o Plano de Aula.

A Avaliação Diagnóstica tem por base o conhecimento prévio do aluno, suas estratégias e experiências pessoais com o intuito de detectar quais são as suas dificuldades, para que ao professor seja permitida uma análise com mais detalhe do seu processo de aprendizagem.

Por meio da Avaliação Diagnóstica, busca-se:

> Investigar seriamente o que os alunos “ainda” não compreenderam, o que “ainda” não produziram, o que “ainda” necessitam de maior atenção e orientação [...] enfim, localizar cada estudante em seu momento e trajetos percorridos, alterando-se radicalmente o enfoque avaliativo e as “práticas de recuperação. (HOFFMANN, 2008, p. 68).

Diante do que cita Hoffmann (2008), acima, para que tenhamos uma Sequência Didática com mais qualidade, elaboramos inicialmente a Avaliação Diagnóstica abaixo, que deve ser aplicada em duas horas-aulas de 50 minutos cada, onde os alunos, nas questões objetivas (questões de múltipla escolha), além de marcarem as suas respostas, devem apresentar os cálculos e em torno de quinze dias, após correção deve ser aplicado o Plano de Aula.

Ao final da execução do Plano de Aula será realizada uma Avaliação Formativa, para apurar os resultados obtidos pelos discentes durante a sua realização.

Segundo afirma o site da Imaginie Educação, a Avaliação Formativa:

> é uma via de mão dupla, o que significa que os professores devem sempre dar *feedbacks* atualizados sobre o desenvolvimento dos alunos, assim como os alunos também precisam informar aos professores questões pertinentes à didática e ao ensino, o que tem funcionado e o que não está dando tão certo. (IMAGINIE EDUCAÇÃO, disponível em: < 5 características da avaliação formativa que você deve conhecer (imaginie.com.br)>.).

Com isso, percebe-se que o desempenho escolar não ocorre de maneira estática, que a avaliação não é pontual, é uma avaliação inclusiva e ocorre em mão dupla onde estudantes e professores trocam informações e dão *feedbacks* um ao outro.

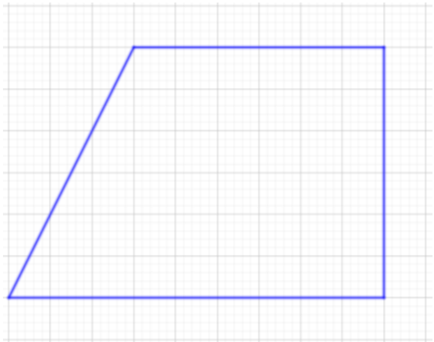
Professor: ____ Turma:_____ Data:__/__/__

Nome: ____N.º______

Caríssimo estudante,
Esta avaliação diagnóstica possui a intenção de observar como está o seu conhecimento acerca de perímetros e áreas, dos principais polígonos, onde serão verificados, o tipo de respostas apresentadas e grau de habilidade com as suas respostas. Teremos questões de múltipla escolha (objetivas) e abertas (subjetivas), mas em todas vocês deve apresentar os cálculos.

AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

1 – Aos alunos do Ensino Médio de uma determinada escola, foi dado o seguinte problema: Na malha quadriculada abaixo, temos uma figura plana, e cada lado do quadradinho da malha mede 5 cm, qual o nome do polígono formado, seu perímetro e sua área, respectivamente:



A) Losango, 120,50 cm, 1.350,00 cm^2.

B) Trapézio, 110,50 cm, 1.350,00 cm^2.

C) Trapézio, 138,50 cm, 1.125,00 cm^2.

D) Retângulo, 120,50 cm,1350,00 cm^2.

E) Losango, 138,50 cm, 1.125,00 cm^2.

Área reservada para os cálculos:

2 – (ENEM – adaptada pelo autor) Um estudante, morador da cidade de Contagem, ouviu dizer que nessa cidade existem ruas que formam um hexágono regular. Ao pesquisar em um sítio de mapas, verificou que o fato é verídico, como mostra a figura abaixo:

Fonte: Google Earth, 2009

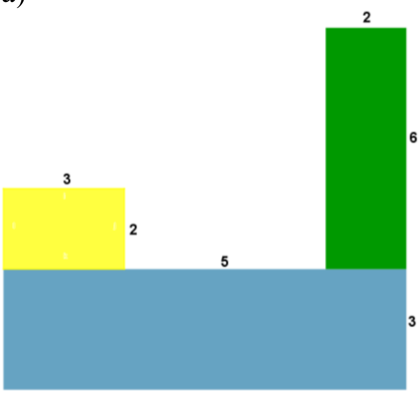
O estudante observou que o mapa apresentado na tela do computador estava reduzido em 20.000 vezes. Nesse instante, mediu o comprimento de um dos segmentos que formam os lados desse hexágono, verificando que a sua medida era de 5 cm. Se esse estudante resolver dar uma volta completa pelas ruas que formam esse hexágono, ele percorrerá, em quilômetros:

Área reservada para os cálculos:

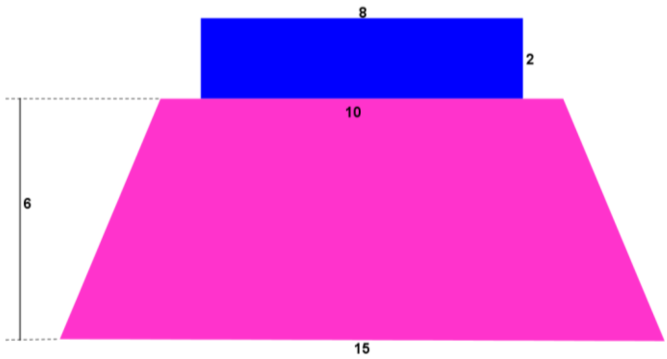
(A) 1;
(B) 4;
(C) 6:
(D) 20;
(E) 24.

3 – (Só Matemática - adaptado) – Determine a área e o perímetro das seguintes figuras:

a)



b)



Área reservada para os cálculos:

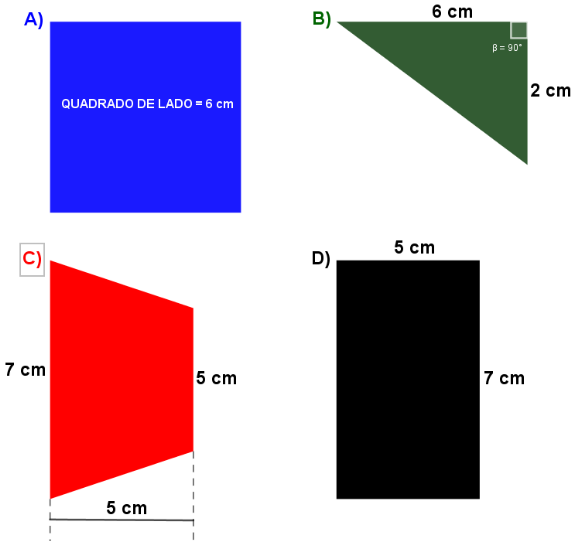
4 – Sabendo-se que a área de um retângulo mede $16m^2$ e que a sua base tem medida que é o quádruplo da sua altura, determine o seu perímetro e marque a alternativa correta:

Área reservada para os cálculos:

A) 30 m;
B) 20 m;
C) 22 m;
D) 16 m;
E) 28 m.

5 – Determine as áreas dos polígonos abaixo e seus respectivos semiperímetros:

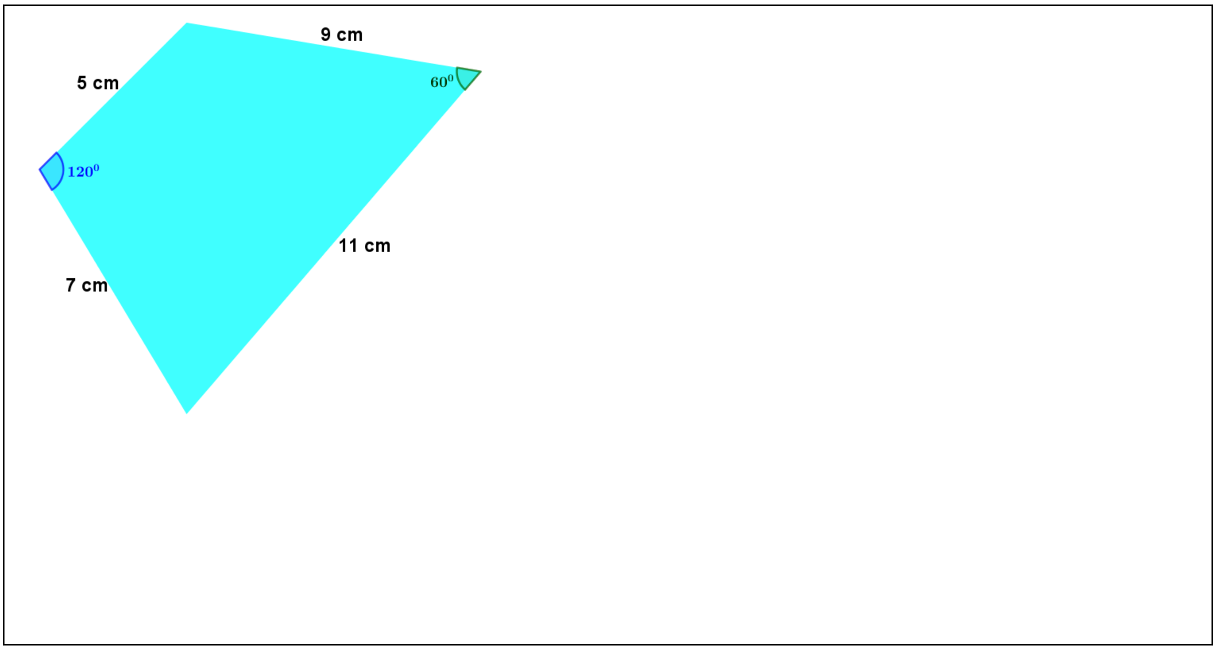
Área reservada para os cálculos:



6 – Um triângulo e um quadrado possuem a mesma área, eles terão obrigatoriamente o mesmo perímetro? Justifique!

7 – Determine a área do quadrilátero abaixo:

Área reservada para os cálculos:



Fonte: Próprio autor

5.3.2 Sequência Didática

As Sequências Didáticas, segundo ZABALA (2014), são consideradas como “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. (ZABATA, 2014, p. 18).

Os principais objetivos e expectativas nessa Sequência Didática são para que ao dividir a turma em grupos de alunos, haja uma troca de saberes e ideias entre os vários componentes de cada grupo da mesma forma que permitir sua socialização, estimulando o poder de argumentação desses estudantes.

Portanto, buscamos neste momento, apresentar uma estrutura sequenciada de aulas que abordará o tema central deste trabalho.

I.1 - ESTRUTURAÇÃO DA AULA

Componente curricular: Matemática

Turma: 2ª série do Ensino Médio

Tema: Quadriláteros convexos – Fórmula de Brahmagupta

Conteúdo: Revisão geral dos pré-requisitos que servirão de base ao entendimento da demonstração das Fórmulas de Heron, Brahmagupta e Bretschneider; Manipulação do software GeoGebra e resolução das situações-problemas.

Número de aulas de 50 minutos: 12 aulas.

Objetivos: Apresentar uma sinopse sobre a biografia de Brahmagupta; demonstrar a Fórmula de Brahmagupta e mostrar a sua importância para o ensino do cálculo da área dos quadriláteros convexos inscritíveis no Ensino Médio; navegar pelo software educacional GeoGebra Classic 5; motivar os alunos para a resolução de situações-problemas.

Suposições: Considerar que mesmo que os alunos possuam alguns conhecimentos prévios, precisa ser feita uma revisão com o intuito de dirimir as dificuldades apresentadas.

Observações: Buscar de alguma forma a participação em grupos e tentar fazer com que o conhecimento se torne o mais homogêneo possível.

Recursos: Os materiais que são disponíveis em sala de aula, tais como: caderno. lápis, borracha, caneta, quadro branco, piloto para quadro branco, apagador, par de esquadros, compasso, datashow, calculadora, material didático, computador, *software* GeoGebra etc.

Estratégias: Exposição de aulas com muito diálogo e discussões, atividades em sala de aula e atividades para serem desenvolvidas em casa, utilização de tecnologias tais como: GeoGebra, YouTube, etc e um pouco da história da Matemática.

Habilidades:

> EM13MAT307 - Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais.
> EM13MAT308 - Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos.
> EM13MAT505 - Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. (BNCC, 2018).

I.2 – PROGRESSÃO DAS AULAS

As aulas terão a seguinte progressão, conforme tabela abaixo:

Quadro 1. Momentos da Sequência Didática.

Momentos	**Natureza**	**Desenvolvimento**
Momento 1	Introdução	História da Matemática com rápida biografia de Heron e Brahmagupta e introdução do assunto da aula – Fórmula de Brahmagupta e exercícios para casa.
Momento 2	Forma de condução do conteúdo	Aula expositiva com apresentação da biografia de Heron e Brahmagupta, apresentação e demonstração da Fórmula de Brahmagupta e apresentação da Fórmula de Bretschneider com as definições necessárias e, também os pré-requisitos para o entendimento de sua demonstração, resolução de algumas situações-problemas em sala de aula e exercícios para casa.
Momento 3	Navegação pelo Geogebra e Avaliação Formativa	Ensinar brevemente como utilizar o Geogebra Classic 5.0 para construir quadriláteros convexos inscritíveis e propor que os alunos sejam avaliados em grupo com atividades que exijam os conteúdos e conceitos trabalhados nas aulas, avaliando a interação com o grupo e desempenho individual.

Fonte: o próprio autor

I.2.1 – Momento 1 – Introdução da aula

Nesse primeiro momento serão utilizados:

Tempo das aulas: 4 aulas de 50 minutos (de preferência seguidas).

Conhecimentos prévios: semelhança entre triângulos, Fórmula de Heron vista na seção 1, fatoração, razão entre as áreas de figuras semelhantes e noções de razão e proporção.

Recursos: Lousa branca, pincel para quadro branco, caderno, demais recursos e material didático.

Organização da turma: de forma coletiva.

Objetivos: Trazer um pouco da história da Matemática apresentando os protagonistas deste trabalho; apresentar e demonstrar a primeira forma da Fórmula de Brahmagupta; contextualizar os conteúdos com o cotidiano; resolver coletivamente problemas sugeridos e corrigir aqueles passados para serem feitos em casa.

Metodologia: Apresentação de aula expositiva aberta ao diálogo com os participantes, permitindo que alunos possam opinar, fazer conjecturas quanto aos conceitos e demonstrações e, através delas fazer com que o docente, de maneira formal, apresente os conteúdos para consolidar seu aprendizado.

Desenvolvimento: Logo de início, o professor deve trazer uma breve história sobre Heron e Brahmagupta e em seguida enumerar os pré-requisitos que serão necessários ao entendimento da demonstração da Fórmula de Brahmagupta. Deve fazer certas perguntas para saber se algum aluno já tinha ouvido falar nesses matemáticos ou se tinham algum conhecimento de suas fórmulas. Perguntar também se os alunos lembram dos conteúdos referentes aos pré-requisitos que serão exigidos. Após ser feita a demonstração da Fórmula de Brahmagupta devem ser propostos os seguintes exemplos, pedindo para que os alunos desenvolvam em grupo e em seguida apresentar as respostas.

I.2.2 Momento 2 – Demonstração da segunda maneira Fórmula de Brahmagupta

Neste momento, já consolidado o conhecimento da Fórmula de Brahmagupta, será feita a sua demonstração, porém de uma segunda forma e bem mais sofisticada e apresentada mais uma vez a Fórmula de Bretschneider.

Tempo das aulas: 4 aulas de 50 minutos (de preferência seguidas).

Conhecimentos prévios: trigonometria sobre seno e cosseno de ângulos suplementares, área de um triângulo conhecendo-se a medida de dois lados e o ângulo compreendido entre eles, lei dos cossenos, relação fundamental trigonométrica e fatoração.

Recursos: Lousa branca, pincel para quadro branco, caderno, demais recursos necessários e material didático.

Organização da turma: de forma coletiva.

Objetivos: Demonstrar de uma segunda maneira a Fórmula de Brahmagupta; apresentar mais uma vez a Fórmula de Bretschneider; resolver de forma coletiva mais algumas situações-problemas sugeridas e corrigir aquelas passadas para serem feitas em casa.

Metodologia: Demonstração da Fórmula de Brahmagupta, com aula expositiva aberta ao diálogo com os participantes, permitindo que alunos possam opinar e resolver vários exercícios. Em seguida discutir as respostas dos alunos.

Desenvolvimento: Diante dos conhecimentos apreendidos nas quatro aulas anteriores o professor deve demonstrar a Fórmula de Brahmagupta, lembrar dos conhecimentos prévios que os alunos devem ter e efetuar a demonstração detalhadamente, permitindo a participação coletiva dos envolvidos. Deve ficar a critério do professor como desenvolver as quatro aulas, mas o destaque maior deve ficar por conta das situações-problemas que devem ser abordadas e solucionadas. O professor deve mostrar ao aluno que:
$\text{sen}(180^0 - \alpha) = \text{sen}180^0\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos180^0 = \text{sen}\alpha$ (o seno de um ângulo é igual ao seno do seu suplemento). E que $\cos(180^0 - \alpha) = \cos180^0\cos\alpha - \text{sen}180^0\text{sen}\alpha = -\cos\alpha$ (menos o cosseno de um ângulo é igual ao cosseno do seu suplemento). Relembrar a relação

fundamental da trigonometria que diz: $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Lembrar a lei dos cossenos, demonstrada no apêndice C, a área de um triângulo qualquer conhecendo-se a medida de dois lados (a e b) e o seno do ângulo (α) compreendido entre esses dois lados, ou seja: $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\alpha$. Por fim relembrar alguns produtos notáveis como quadrado de uma soma de dois termos, quadrado da diferença entre dois termos, ou seja, sejam os termos a e b, tem-se que: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ e $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, bem como que o produto da diferença entre dois termos, é igual a: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$.

Após ser feita a demonstração da Fórmula de Brahmagupta e apresentadas as fórmulas que serviram de requisitos, devem ser propostos os seguintes exemplos, pedindo para que os alunos desenvolvam em grupo e em seguida apresentar a respectiva solução.

I.2.3 Momento 3 – Apresentação do software GeoGebra e Avaliação Formativa

Neste momento os alunos terão em forma de exercício uma navegação pelo GeoGebra Classic 5.0 em duas aulas de 50 minutos e duas outras aulas para uma Avaliação Formativa.

Tempo das aulas: 2 aulas de 50 minutos (GeoGebra) e 2 tempos de 50 minutos para Avaliação Formativa.

Conhecimentos prévios: além dos conhecimentos prévios citados em cada momento, serão exigidos os conteúdos das aulas sobre a Fórmula de Brahmagupta.

Recursos: Datashow, computador, software GeoGebra, lousa branca, pincel para quadro branco, caderno, lápis, borracha e prova impressa.

Organização da turma: em grupos de três alunos de forma que se misturem alunos com mais habilidade em Matemática com outros menos habilidosos.

Objetivos: Da Avaliação Formativa – verificar a interação entre os alunos, respeito ao tempo, organização, discussão nas equipes, desenvoltura e nível de aprendizado.

Metodologia: Resolução em equipe de três alunos, de situações envolvendo o que fora apreendido em sala de aula, de forma a avaliar o desempenho individual e coletivo.

Desenvolvimento: no primeiro momento, com duas aulas de 50 minutos, serão dadas algumas orientações sobre o GeoGebra abordando exatamente a construção de um quadrilátero inscritível, onde será resolvido o exemplo 9, abaixo, passo a passo. No segundo momento, em duas aulas de 50 minutos, será aplicada uma Avaliação Formativa onde serão avaliados o desempenho dos alunos, tanto individualmente quanto coletivamente e eles podem se comunicar normalmente, bem como solicitar ajuda do professor.

O GeoGebra é um aplicativo que associa as construções geométricas às expressões algébricas, trata-se de um software educativo, com domínio público, que pode ser baixado gratuitamente através do site https://www.geogebra.org/download.

De acordo com Instituto São Paulo de GeoGebra, da Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, "O GeoGebra é um software de Matemática dinâmica gratuito e multiplataforma para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, estatística e cálculo numa única aplicação."

> GeoGebra foi criado em 2001 como tese de Markus Hohenwarter e a sua popularidade tem crescido desde então. Atualmente, o GeoGebra é usado em 190 países, traduzido para 55 idiomas, são mais de 300000 downloads mensais, 62 Institutos GeoGebra em 44 países para dar suporte para o seu uso. Além disso, recebeu diversos prêmios de software educacional na Europa e nos EUA, e foi instalado em milhões de laptops em vários países ao redor do mundo. Algumas características importantes:
>
> - Gráficos, Álgebra e tabelas estão interligados e possuem características dinâmicas;
> - Interface amigável, com vários recursos sofisticados;
> - Ferramenta de produção de aplicativos interativos em páginas WEB;
> - Disponível em vários idiomas para milhões de usuários em torno do mundo;
> - Software gratuito e de código aberto. (INSTITUTO SÃO PAULO GeoGebra). https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html.

Vamos apresentar a interface do GeoGebra Classic 5, e em seguida resolver as solicitações feitas no exemplo 9 do plano de aula sugerido.

Figura 13. Interface do GeoGebra.

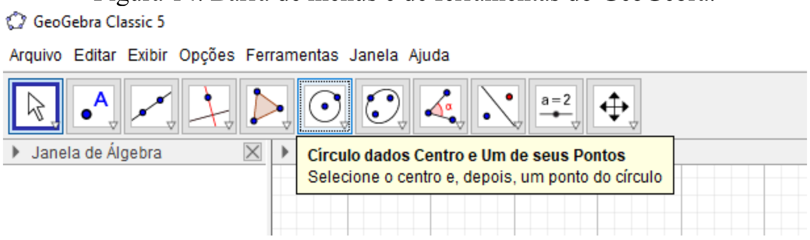
Fonte: GeoGebra Classic 5

Para amparar cada um dos itens das atividades propostas por OLIVEIRA (2015) e pelo autor adaptados será realizado um passo a passo de GeoGebra, conforme a seguir:

a) Construindo um círculo com o GeoGebra.

Para construir um círculo, na barra de ferramentas, figura 14, abaixo, com o mouse, vá até o sexto ícone e selecione: Círculo dados Centro e Um de seus Pontos.

Figura 14. Barra de menus e de ferramentas do GeoGebra.



Fonte: Próprio autor - extraído do GeoGebra.

É claro que se tem várias opções de círculos, conforme a figura 15, mas vamos nos ater ao primeiro ícone, conforme citado na figura 14. Com o mouse vá até a opção Círculo dados Centro e Um de seus Pontos.

Clique no primeiro ícone:

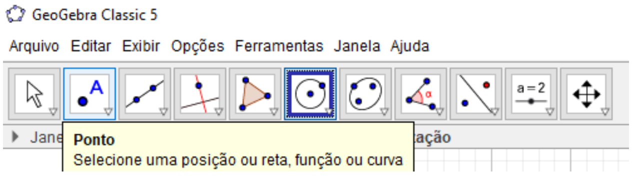
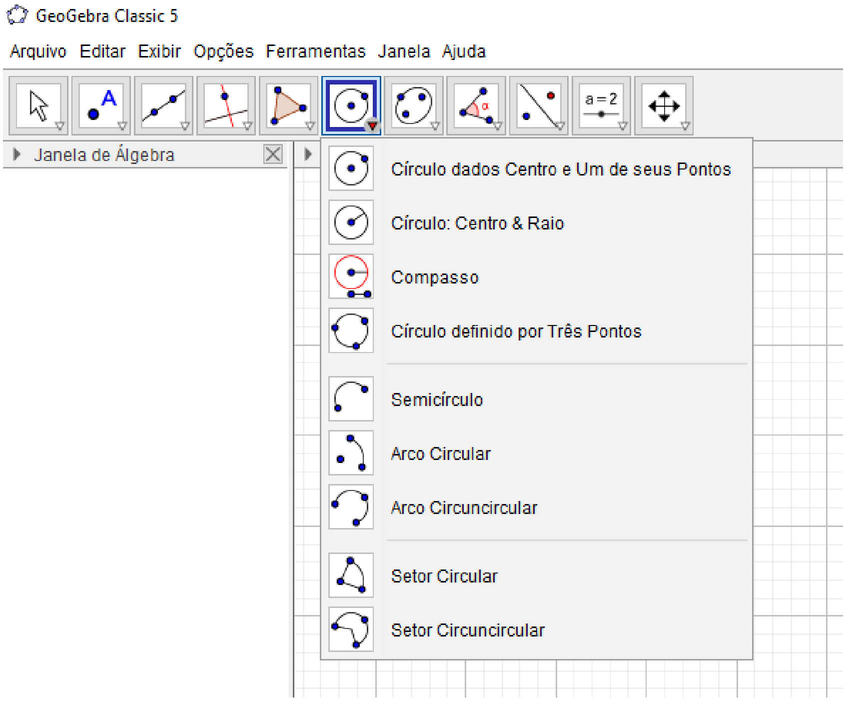


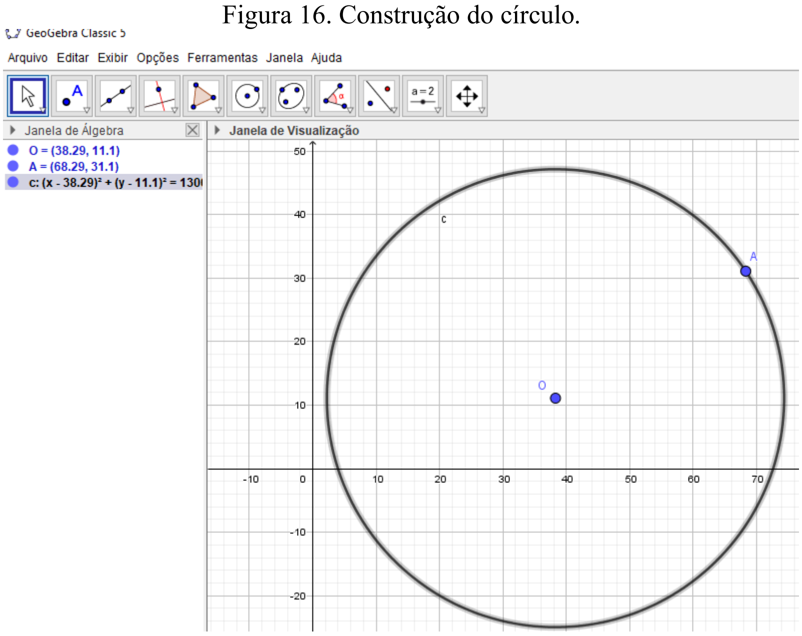
Figura 15. Opções de escolha à construção do círculo.



Fonte: Próprio autor – extraído do GeoGebra

Vá até a área de trabalho e selecione um ponto para ser o centro (O) do círculo e outro por onde a sua borda o interceptará (A). Vá no ícone, Círculo dados Centro e Um de seus Pontos, com o botão esquerdo do mouse, clique no ponto (O), solte o mouse e o arraste até que a borda do círculo intercepte o ponto (A), figura 16, abaixo, o seu círculo estará construído.

Figura 16. Construção do círculo.

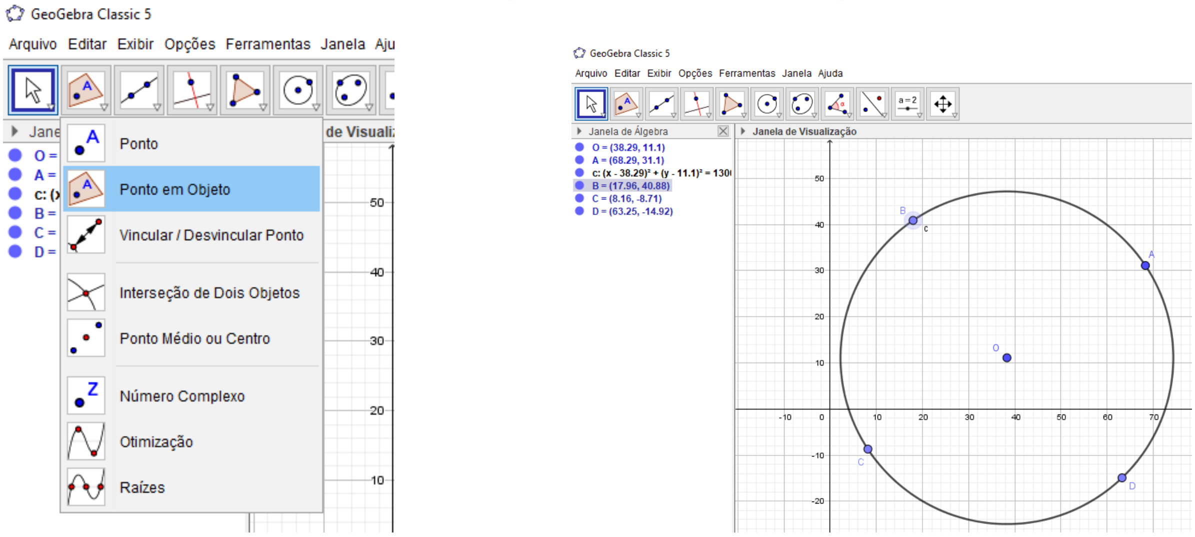


Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

b) Após a construção do círculo, construir um quadrilátero.

Para realizar o item proposto, aproveitando o círculo e o ponto (A) já predispostos, vá ao ícone ponto, conforme abaixo:

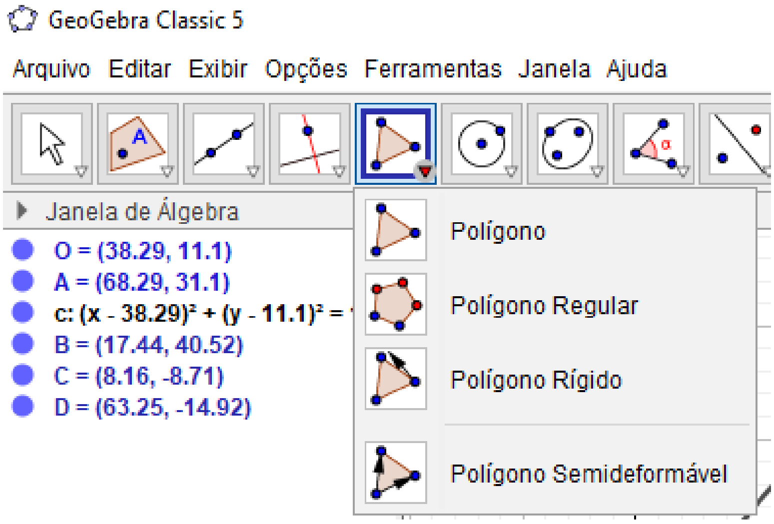
Figura 17. Escolha dos pontos para construir um quadrilátero inscritível.
(a)Ícone da barra de ferramentas novo ponto (b) Escolha dos outros pontos na circunferência



Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

Com os quatro pontos escolhidos na circunferência, construa o quadrilátero. Na barra de ferramentas, vá até o quinto ícone (polígono), figura 18, abaixo:

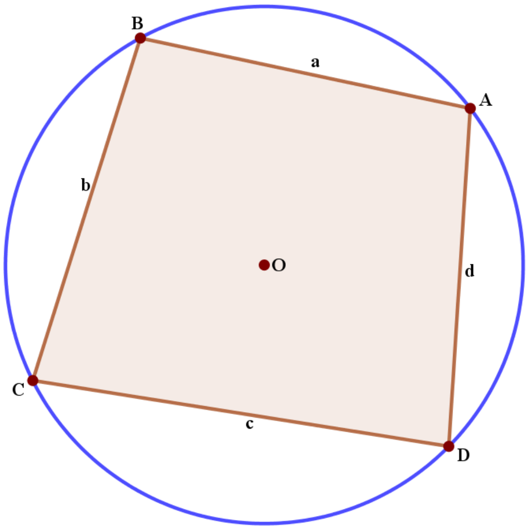
Figura 18. Ícone para construir polígonos.



Fonte: Próprio autor – extraído do GeoGebra

Escolha o primeiro ícone (polígono), com o botão esquerdo do mouse, clique em cada um dos quatro pontos para construir o quadrilátero inscritível, figura 19 abaixo:

Figura 19. Quadrilátero inscritível construído.

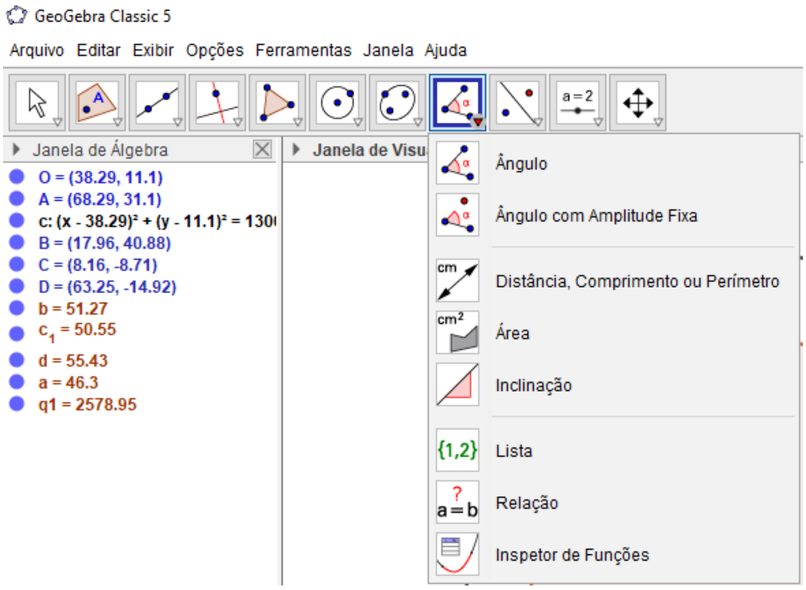


Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

c) Após a construção do quadrilátero inscrito na circunferência, deixe explícitas as medidas de seus lados e de sua área.

Neste item, para exibirmos as medidas dos lados e da área do quadrilátero, precisamos clicar no oitavo ícone (polígonos), conforme figura 20, abaixo:

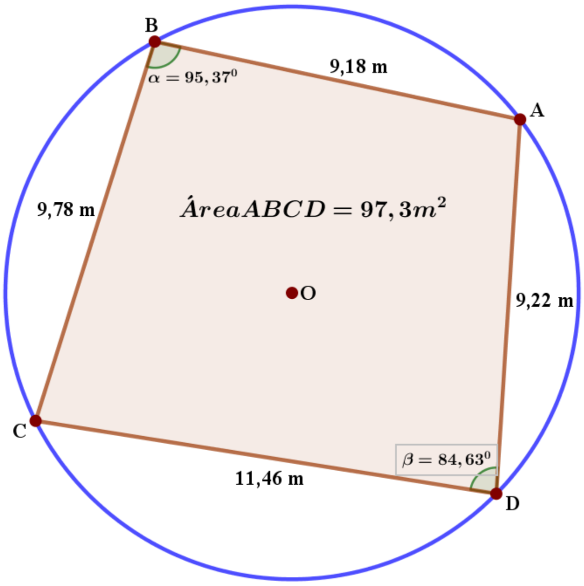
Figura 20. Obtenção da medida dos lados e área do quadrilátero.



Fonte: Próprio autor – extraído do GeoGebra

Escolha o ícone Distância, Comprimento ou Perímetro e clique em cada um dos lados do quadrilátero. Em seguida, escolha o ícone Área, quando clicar no quadrilátero será exibido em seu interior a medida da sua área. Veja a figura 21, abaixo:

Figura 21. Obtenção das medidas dos lados e área do quadrilátero inscritível.

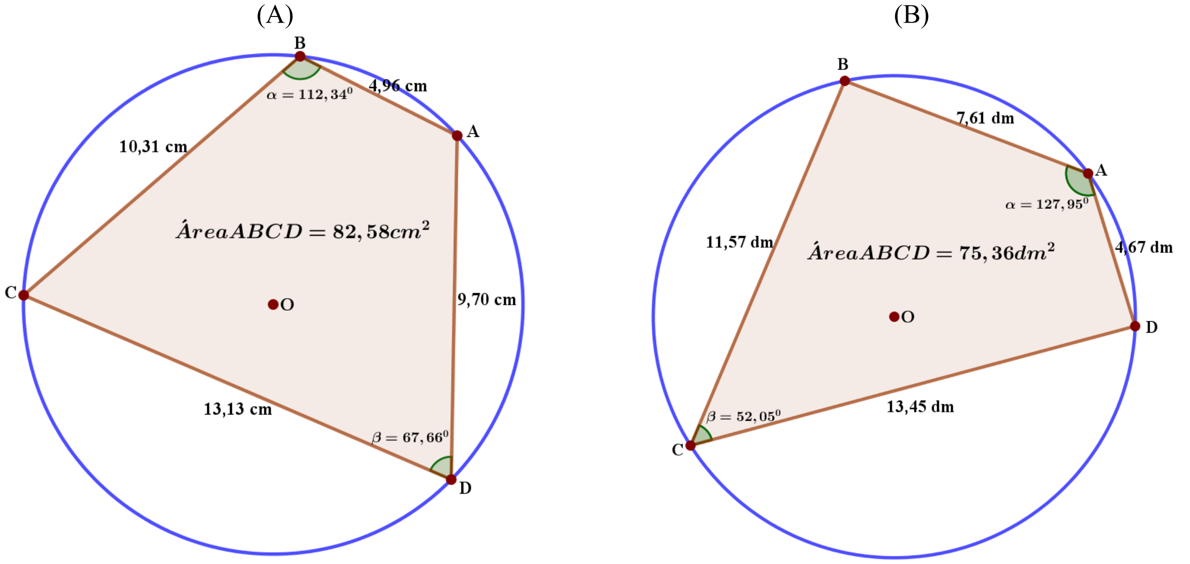


Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

d) Finalizada a construção do quadrilátero, deve-se manipulá-lo na circunferência com o objetivo de se encontrar tanto as formas quanto as medidas diferentes e verificar o que está ocorrendo.

Para o último item proposto, uma vez que o quadrilátero está construído, basta clicar com o mouse sobre um dos pontos e arrastar sobre a circunferência, você deve observar que tanto as medidas dos lados do quadrilátero, quanto a sua área mudam de valor. Veja a figura 22, abaixo:

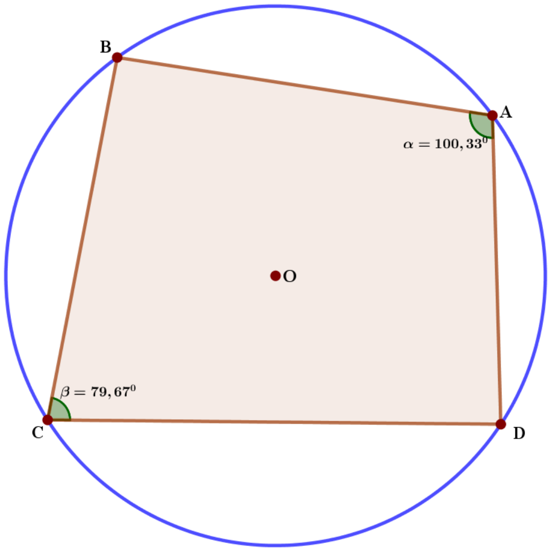
Figura 22. exemplos de situações encontradas no dia a dia.



Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

Por fim, vale a pena determinar as medidas dos ângulos internos do quadrilátero inscrito e comprovar se os seus ângulos opostos são realmente suplementares, ou seja, sua soma seja igual a 180^0. Veja a figura 23, abaixo:

Figura 23. Verificando se os ângulos opostos são suplementares.



Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

De fato, a soma dos ângulos $D\hat{A}B + B\hat{C}D = 100{,}33^0 + 79{,}67^0 = 180^0$, logo conclui-se que: $A\hat{D}C + A\hat{B}C = 180^0$. O que comprova todas as teorias e demonstrações efetuadas.

Critérios de Avaliação Formativa: ela dar-se-á em vários momentos, pelas observações dos alunos, participação no momento 1 e no momento 2, interação entre os colegas, respeito e ética, exercícios resolvidos em casa e a Avaliação Formativa feita no momento 3.

Considerações finais do plano de aula: Além de realizar as aulas conforme o presente plano, com liberdade para melhorar é claro, o professor deve sugerir livros didáticos, paradidáticos, pesquisas na internet, principalmente de outros exemplos para serem praticados em sala de aula. Pode realizar novas avaliações, principalmente se perceber que alguma equipe apresentou dificuldades na realização da Avaliação Formativa e achar pertinente. Por fim, o professor deve se sentir à vontade para questionar, incrementar ou modificar o plano adequando-o à realidade da escola.

Abaixo serão apresentados alguns exemplos, uns em forma de exercícios e outros em forma de situações-problemas para serem respondidos em sala de aula e fazerem com que os alunos reflitam acerca de sua abordagem.

Conforme cita Santos (2002):

> A aquisição de novos conhecimentos está estritamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sala de aula. (SANTOS, 2002, 14).

Santos (2012), ainda nos apresenta o esquema, conforme mostrado abaixo:

Quadro 2. Os três momentos do conhecimento.

Primeiro momento:		**Segundo momento:**		**Terceiro momento:**
Permite que o aluno invista seus conhecimentos anteriores.	⇨	Permite que o aluno tome consciência da insuficiência desse conhecimento.	⇨	Permite que o aluno CONSTRUA novos conhecimentos.

Fonte: Santos (2002, p.15)

Pelo que se pode perceber a estratégia desse modelo coloca o estudante em um conflito que é gerado frente à constatação de que ele tem uma certa insuficiência de conhecimentos e a situação que está sendo-lhe apresentada, que é denominada de situação-problema. A partir daí o estudante é forçado a criar certos mecanismos que possam permitir a construção de determinado conhecimento para solucianoar a situação, sendo posta em suas mãos a responsabilidade de criar novos conhecimentos.

Pólya (2006), sugere um roteiro que deve ser seguido para a resolução de problemas, sendo assim estabelecido: primeiro vem a compreensão do problema, segundo deve ser estabelecido de um plano de resolução, terceiro executa-se o plano e por fim faz-se o seu retrospecto.

Pólya (2006) continua dizendo que:

> A Resolução de Problemas é tida como uma arte prática em que o desenvolvimento da aprendizagem ocorre por meio de um conjunto de técnicas segundo seu modelo heurístico, sendo a interação entre aluno e professor necessária para que a aprendizagem seja de fato compreendida. (PÓLYA, 2006, p. 122).

Pólya (2006) faz uma divisão dos problemas em três tipos: - rotineiros; de determinação e de demonstração

Conforme afirma Pólya (2006, p. 144), “Os "problemas de determinação” são mais importantes na Matemática elementar; e os “problemas de demonstração” o são na Matemática superior.” Sendo ambos os problemas objetos de estudo no nosso Plano de Aula.

De acordo com Onuchic e Allevato:

> Um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta (ONUCHIC e ALLEVATO, 2004, p. 221).

Logo, percebe-se que Van de Walle, chama de problema tudo aquilo que o estuante não prever nenhum conhecimento prévio, como fórmula ou algoritmo que o ele possua para resolvê-lo, sendo necessário criatividade para encontrar uma solução.

Para diferenciar exercícios de problemas, trazemos a seguinte contribuição:

Segundo Dante (2003):

> Se uma questão por mais complexa que possa ser, ou por mais tempo que ela possa tomar de uma pessoa for resolvida através de conhecimentos já ensinados ou que teriam que ser aprendidos para resolvê-la trata-se de um exercício. Por exemplo, um professor acaba de ensinar as primeiras noções de probabilidade e passa algumas questões sobre aquilo que acabou de ser ensinado. Nesse caso os alunos leem o enunciado do exercício e imediatamente identificam o conceito de probabilidade que acabaram de ver. (DANTE *apud* MONTEIRO, 2015, p.14).
>
> Por outro lado, quando ocorre o oposto, quando não é possível resolver uma questão através de um algoritmo que forneça facilmente a resposta desejada e o indivíduo é obrigado a pensar de uma maneira mais complexa, desafiante, sem previsão de retorno, trata-se de um problema. Por exemplo, um professor apresenta questões que envolvam coisas que foram ensinadas há um tempo mais longe, não revelando do que se trata ou mistura conteúdos novos com outros que os alunos de algum modo deveriam ter aprendido há algum tempo. Nesse caso o aluno vê o enunciado e não tem uma ideia definida de por onde começar, qual conceito matemático deve ser aplicado, e muitas vezes quando acha que conseguiu saber qual conceito aplicar ele acaba se enganando e tendo que recomeçar o problema desde o princípio. (DANTE, 2003 *apud* MONTEIRO, 2015, p. 14).

Por fim DANTE (2003), apresenta o seguinte texto:

> o exercício serve para o aluno exercitar, para colocar em prática o que aprendeu, para guiar-se por um ou mais algoritmos que são apresentados no texto de determinado exercício. Enquanto problema é algo que exige de quem deseja resolvê-lo uma ação, uma iniciativa para resolver algo desconhecido, exige criatividade, percepção e não algoritmo. Ele ressalta a importância de ambos defendendo um equilíbrio entre eles na sala de aula, que ambos sejam trabalhados a seu momento durante o ano letivo numa sala de aula. (DANTE, 2003 apud MONTEIRO, 2015, p. 14).

Diante do exposto, os exemplos que trazem exercícios visam fazer com que os estudantes fixem melhor as fórmulas apresentadas e como o próprio nome sugere, servem para que os estudantes exercitem, enquanto os problemas são mais elaborados, exigindo do estudante a montagem de estratégias para a sua solução, levando-o a refletir acerca da situação em que se apresenta.

Exemplos para serem resolvidos

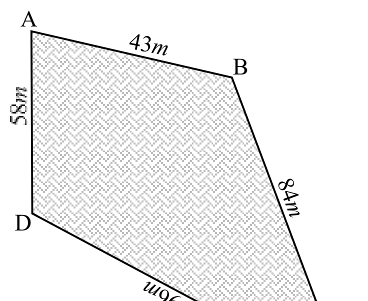
O exemplo 1 é típico de um exercício onde o aluno o identifica e aplica a fórmula adequada cujo conhecimento prévio ela já possui, quanto ao exemplo 2, ele leva o estudante a construir uma estratégia, criar uma forma de conhecimento, pois tudo que informamos, são os lados do quadrilátero, sugerindo que o problema não possui solução. Na resolução feita abaixo fazemos os comentários adequados.

Exemplos para serem resolvidos

Exemplo 1: Dado um quadrilátero inscritível de forma que seus lados tenham as seguintes medidas, em que $AB = 4\ cm, BC = 12\ cm, CD = 18\ cm\ e\ DA = 14\ cm$. Determine a sua área em cm^2.

Figura 24. Medidas de um terreno

Exemplo 2: Alison pretende comprar um sítio. O proprietário quer vender parte de sua propriedade e estima que o local tenha aproximadamente meio hectare. Alison está desconfiado da medida e deseja calcular a área da região que tem o formato de um quadrilátero. Com auxílio de uma trena, mediu os quatro lados e representou-os no esboço ao lado. Como podemos ajudar Alison a calcular a área do terreno?



Fonte: Jesuz, 2015, p.78

Resolução dos Exemplos 1 e 2

Resolução exemplo 1: O estudante deve perceber que pelo fato do quadrilátero ser inscritível cabe o cálculo da sua área pela Fórmula de Brahamagupta, em que o semiperímetro do quadrilátero é igual a: $p = \frac{4+12+18+14}{2} = \frac{48}{2} = 24\ cm$, utilizando-se Brahmagupta, obtemos:

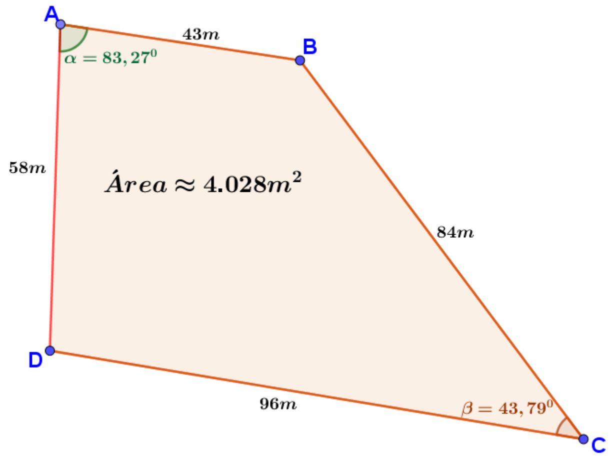
$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, onde $a, b, c\ e\ d$ são os seus lados, logo, percebe-se que: $S_{ABCD} = \sqrt{(24-4)\cdot(24-12)\cdot(24-18)\cdot(24-14)} \Rightarrow$

$S_{ABCD} = \sqrt{(20)\cdot(12)\cdot(6)\cdot(10)}$, seria muito interessante estimular os alunos a não usarem calculadora nem celular para efetuar o cálculo da raiz quadrada, deste exemplo, estimule-os a fatorar encontrado os fatores primos comuns, após encontrar o resultado sim, podem utilizar a calculadora para resolver o problema e verificar os resultados encontrados. Continuando com a resolução, temos: $S_{ABCD} = \sqrt{2^2\cdot 5\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 5} \Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{2^6\cdot 3^2\cdot 5^2} \Rightarrow$

$S_{ABCD} = 2^3\cdot 3\cdot 5 = 120cm^2$.

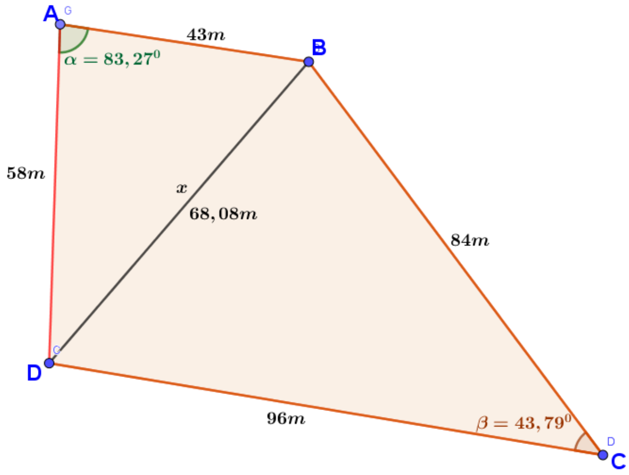
Resolução do exemplo 2: Nesse exemplo, o estudante é levado a pensar numa estratégia de resolução, pois percebe-se que em momento algum o problema informa que o quadrilátero é convexo, nem tampouco apresenta pelo menos a medida de dois dos seus ângulos opostos para que ele possa decidir se usa Brahmagupta ou Bretschneider. No entanto, para a resolução deste exemplo, deve-se estimular o estudante a utilizar ou seus materiais de desenho tais como régua graduada, esquadros e transferidor para construir um exemplar do quadrilátero ou software GeoGebra para construir um quadrilátero com as medidas informadas e determinar a medida de dois dos seus ângulos opostos, encontrando também o valor de sua área pelo conforme figura. Também poderá com o GeoGebra, encontrar a medida de uma das diagonais e utilizar a Fórmula de Heron como mais uma maneira de encontrar a medida da área. Sugere-se ao docente que peça para os alunos construírem um quadrilátero qualquer com as medidas sugeridas, após a construção devem ser exibidas as medidas dos lados e, também a medida de dois ângulos opostos, por exemplo, os ângulos $\hat{\alpha}\ \cong 83{,}27^0\ e\ \hat{\beta}\ \cong 43{,}79^0$. Traça-se a diagonal $BD = x$ e determina-se a sua medida. Por fim, pede-se que o estudante exiba a medida da área do quadrilátero, bem como a medida da diagonal $BD = x$. Pelo GeoGebra, veja na figura 25 a seguir, nessa construção o aluno deve encontrar para a diagonal algo em torno de $x \cong\ 68{,}08\ m$ e para a área, $S_{ABCD} \cong 4.028\ m^2$.

Figura 25. Quadrilátero do exemplo 2.



Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Figura 26. Quadrilátero dividido em dois triângulos.



Fonte: Próprio autor – construído pelo GeoGebra

Acreditando que o estudante já tenha habilidade com o cálculo da área de um triângulo conhecendo-se a medida de dois lados e o ângulo compreendido, estimule-o a calcular o valor da área, utilizando a relação apresentada a seguir:

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 58 \cdot 43 \cdot sen(83{,}27^0) + \frac{1}{2} \cdot 84 \cdot 96 \cdot sen(43{,}79^0)$, com o auxílio de uma calculadora científica encontramos o seguinte resultado:

$S_{ABCD} = 1.247 \cdot 0{,}9931 + 4.032 \cdot 0{,}6920 \Rightarrow S_{ABCD} = 1.238{,}40 + 2.790{,}14 \Rightarrow$

$S_{ABCD} \cong 4.028\, m^2$. Por fim, vamos utilizar a Fórmula de Btretschneider para verificar o resultado. Sabemos que por essa fórmula a área de um quadrilátero qualquer é calculado assim:

$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$, em que p é o semiperímetro do quadrilátero, a, b, c e d são as medidas dos lados e α e β, dois ângulos opostos dados. Dados: $a = 43m, b = 84m, c = 96m$ e $d = 58m$, $\alpha = 83{,}27^0$ e $\beta = 43{,}79^0$. Temos que o semiperímetro é igual a $p = \frac{a+b+c+d}{2} = \frac{43m+84m+96m+58m}{2} = \frac{281m}{2} = 140{,}5m$. Substituindo-se na primeira parte do radicando obtemos o seguinte valor: $(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$: $(140{,}5-43)(140{,}5-84)(140{,}5-96)(140{,}5-58) = 20.223.998{,}44m^4$, na segunda parte, temos: $abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 43m \times 84m \times 96m \times 58m \times cos^2\left(\frac{83{,}27^0+43{,}59^0}{2}\right) \Rightarrow$ $20111616 \times cos^2\left(\frac{126{,}86^0}{2}\right) \Rightarrow 20111616m^4 \times cos^2(63{,}43^0) \Rightarrow 20111616m^4 \times 0{,}198674$, que é igual a: $3.995.665{,}03m^4$. Retornando ao radical, chegamos a:

$\boldsymbol{SABCD} = \sqrt{\mathbf{20.223.998{,}44}\boldsymbol{m^4} - \mathbf{3.995.665{,}03}\boldsymbol{m^4}} \Rightarrow \boldsymbol{SABCD} = \sqrt{\mathbf{16.228.333{,}41}\boldsymbol{m^4}} \cong \mathbf{4028}\boldsymbol{m^2}$, onde verificamos que os resultados são os mesmos.

Nesse exemplo, mesmo não tendo dados suficientes para a sua resolução de imediato, nota-se que a ferramenta GeoGebra permite levar o estudante a uma construção capaz de fazer com que ele encontre os valores de dois ângulos opostos, para poder decidir se o resolve da forma acima apresentada, a partir dos valores encontrados e como o uso da calculadora ficou fácil de resolver o problema. Podemos até dizer que o problema quando foi desvendada a parte que precisava para concluir os dados necessários, tornou-se um exercício, cabendo ao estudante apenas a aplicação da fórmula para obter o resultado esperado.

Exemplo 3: (Próprio autor) – Dois estudantes do Ensino Médio resolveram medir os lados de um quadrilátero que estava desenhado na quadra da escola, encontrando as seguintes medidas $2m, 3m, 3m\ e\ 4m$, em seguida mediram os ângulos opostos encontrando as seguintes medidas $63^0 e\ 117^0$. Por fim, aproveitando para exercitar sobre as Fórmulas de Brahmagupta e Bretschneider, eles resolveram calcular a área daquele quadrilátero. Qual o valor encontrado?

Exemplo 4: (Adaptado pelo autor – 13m57s YouTube-2019, exercício 2 - existe fórmula para área de um quadrilátero qualquer?? (Fórmula de Bretschneider) - Matemática - YouTube)) - O professor de Matemática, da terceira série do Ensino Médio, do curso CDF - cabeças pensantes, propôs que os alunos resolvessem o seguinte problema: Qual o valor máximo da área de um quadrilátero, cujos lados medem $1m, 4m, 7m\ e\ 8m$.

Exemplo 5: (Adaptado pelo autor – 25m56s YouTube-2019, exercício 3 - existe fórmula para área de um quadrilátero qualquer?? (Fórmula de Bretschneider) - Matemática - YouTube) Arquimedes, estudante da segunda série do Ensino Médio, muito habilidoso com Geometria Plana, resolveu estudar um quadrilátero $ABCD$, cujos lados tinham medidas $2cm, 2cm, 4cm\ e\ 6cm$ e que também possuía área medindo $5\sqrt{3}cm^2$. Ele conseguiu provar que existia uma circunferência circunscrita a esse quadrilátero. Mostre como ele provou esse feito.

Resolução dos Exemplos 3, 4 e 5

Resolução do exemplo 3: Nesse exercício, se os estudantes observarem com cuidado, perceberão que os ângulos informados são suplementares, ou seja, $63^0 + 117^0 = 180^0$, que caracteriza que o quadrilátero é inscritível em uma circunferência, portanto, o valor da área pode ser calculado utilizando-se a Fórmula de Brahmagupta. Como o valor do semiperímetro do quadrilátero inscritível equivale a: $p = \frac{2m+3m+3m+4m}{2} = \frac{12m}{2} = 6m$, então podemos aplicar a Fórmula de Brahmagupta e encontrar: $S = \sqrt{(6-2)\cdot(6-3)\cdot(6-3)\cdot(6-4)} \Rightarrow$
$S = \sqrt{(4)\cdot(3)\cdot(3)\cdot(2)} \Rightarrow S = \sqrt{72} \Rightarrow S \cong 8{,}5m^2$.

Resolução do exemplo 4: Nesse problema, os alunos precisam pensar um pouco, pois não foi dada diretamente nenhuma informação sobre o quadrilátero, ou seja, se ele inscritível, levando o aluno a usar a Fórmula de Brahmagupta, muito menos evidências sobre os ângulos opostos que os levasse a essa conclusão. Portanto, o que deviam buscar utilizar era a Fórmula de Bretschneider e fazer algumas considerações, uma vez que o exercício pede o valor máximo da área do quadrilátero.

Mesmo que o estudante recorra à Fórmula de Bretschneider é preciso fazer algumas considerações para posteriormente tomar a decisão correta, de Bretschneider vista abaixo, temos: $S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d) - abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$, onde p é o semiperímetro e a, b, c e d, são os lados. O radicando é toda a expressão que está dentro do radical, ou seja: $(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d) - abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ e para que a área seja máxima, o radicando precisa ser o maior possível. Temos dois casos a considerar: o cosseno de um ângulo varia de -1 até 1, como na expressão ele está ao quadrado, então, resulta em um valor positivo, mas $abcd$ também é positivo, pois os lados são, cada um maior que zero. Portanto, concluímos que $abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq 0$, para que o radicando seja o maior possível, então, obrigatoriamente $cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, o que nos leva a perceber que a área máxima resulta na Fórmula de Brahmagupta, ou seja: $abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 0$, ficando assim a resolução do exercício: $S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d) - 0}$, o semiperímetro é: $p = \frac{1m+4m+7m+8m}{2} = \frac{20m}{2} = 10m$. Logo: $S = \sqrt{(10-1)\cdot(10-4)\cdot(10-7)\cdot(10-8)} \Rightarrow$
$S = \sqrt{(9)\cdot(6)\cdot(3)\cdot(2)} \Rightarrow S = \sqrt{328} \Rightarrow S = 18m^2$.

Resolução do exemplo 5: Para resolver esse exercício 3, basta raciocinar que, para que haja uma circunferência circunscrita é necessário que o quadrilátero seja inscritível e esse fato garante o uso da Fórmula de Brahmagupta, portanto, podemos fazer o uso dessa fórmula para solucioná-lo, assim: $S = \sqrt{(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)\cdot(p-d)}$, onde o semiperímetro tem o seguinte valor: $p = \frac{2cm+2cm+4cm+6cm}{2} = \frac{14cm}{2} = 7cm$. Fazendo as devidas substituições na fórmula, obtemos: $5\sqrt{3} = \sqrt{(7-2)\cdot(7-2)\cdot(7-4)\cdot(7-6)} \Rightarrow$

$5\sqrt{3} = \sqrt{(5)\cdot(5)\cdot(3)\cdot(1)} \Rightarrow 5\sqrt{3} = \sqrt{25\cdot 3} \Rightarrow 5\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$, como a igualdade foi verificada, então comprova-se o quadrilátero é inscritível e que a circunferência é circunscritível ao quadrilátero.

Exemplo 6: "Dados inteiros positivos $a, b, c, A, B\ e\ C$ tais que $a^2 + b^2 = c^2\ e$

$A^2 + B^2 = C^2$, ou seja, dois ternos pitagóricos, o quadrilátero inscritível de lados consecutivos $aC, cB, bC\ e\ cA$ tem as medidas da área e de suas diagonais números racionais. Nesta atividade, adaptada de Howard Eves, não provaremos este fato, mas ao longo dos itens mostraremos que suas diagonais são perpendiculares, uma outra consequência importante dos trapézios de Brahmagupta.

a) Mostre que a área de um quadrilátero inscritível e circunscritível, simultaneamente, é igual à raiz quadrada do produto de seus lados.
b) Mostre que as diagonais de um quadrilátero convexo são perpendiculares se, e somente se, a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados do outro par de lados opostos.
c) Prove que as diagonais de um trapézio de Brahmagupta são perpendiculares, usando o item anterior.
d) Determine os lados, as diagonais, o diâmetro do círculo circunscrito e a área do trapézio de Brahmagupta determinado pelos dois ternos pitagóricos (3, 4, 5) e (5, 12, 13)." (OLIVEIRA, 2015, p. 63).

Exemplo 7: Essa atividade como sugere OLIVEIRA (2015), deve, de acordo com a demonstração feita no apêndice D, ser efetuada uma série de demonstrações pelo discente, quais sejam:

"a) Prove que o produto de dois lados de um triângulo é igual ao produto da altura relativa ao terceiro lado pelo diâmetro da circunferência circunscrita.
b) Seja $ABCD$ um quadrilátero inscritível tal que $AB = a$,
$BC = b$, $CD = c$ e $AD = d$, com diagonais $AC = x$ e $BD = y$ e cuja circunferência circunscrita tem raio R. Denote a medida do ângulo entre uma das diagonais e a perpendicular à outra por θ, como na figura 30, logo abaixo.
Mostre que $2Rxcos\theta = ad + bc$ e $2Rycos\theta = ab + cd$.

c) A partir do item anterior, mostre que:
$x^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}$ e $y^2 = \frac{(ab + cd)(ac + bd)}{ad + bc}$.

d) Mostre que se as diagonais do quadrilátero inscritível são perpendiculares então:
$4R^2 = \frac{(ad + bc)(ab + cd)}{ac + bd}$." (OLIVEIRA, 2015, p. 64).

Exemplo 8: Essa atividade propõe que o discente demonstre a Fórmula de Bretschneider, que já fora demonstrada no apêndice F. Neste mesmo sentido OLIVEIRA (2015) sugere que o discente deve:

a) Mostrar que o $\cos(\alpha + \beta) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.
b) Demonstrar a Fórmula de Bretschneider.

Exemplo 9: Segundo OLIVEIRA (2015), o docente deve construir com o discente cada uma das atividades a seguir, conforme orientações no item I.2.3 Momento 3 – Apresentação do software GeoGebra e Avaliação Formativa.

a) Construindo um círculo com o GeoGebra;

b) Após a construção do círculo, construir um quadrilátero;

c) Após a construção do quadrilátero inscrito na circunferência, deixe explícitas as medidas de seus lados e de sua área;

d) Finalizada a construção do quadrilátero, deve-se manipular o quadrilátero na circunferência com o objetivo de se encontrar tanto as formas quanto as medidas diferentes e verificar o que está ocorrendo. O docente deve aproveitar para sugerir que os discentes calculem a área dos quadriláteros inscritíveis, pela Fórmula de Brahmagupta, manualmente, e comparar os resultados obtidos com pelo GeoGebra. Nesse momento ressaltamos que o aplicativo aproxima as medidas o que pode divergir com relação aos resultados obtidos, claro que as diferenças são pequenas, o que não se deve esperar que sejam exatamente iguais.

Exemplo 10:

Prove o Teorema de Ptolomeu

Resolução do exemplo 6:

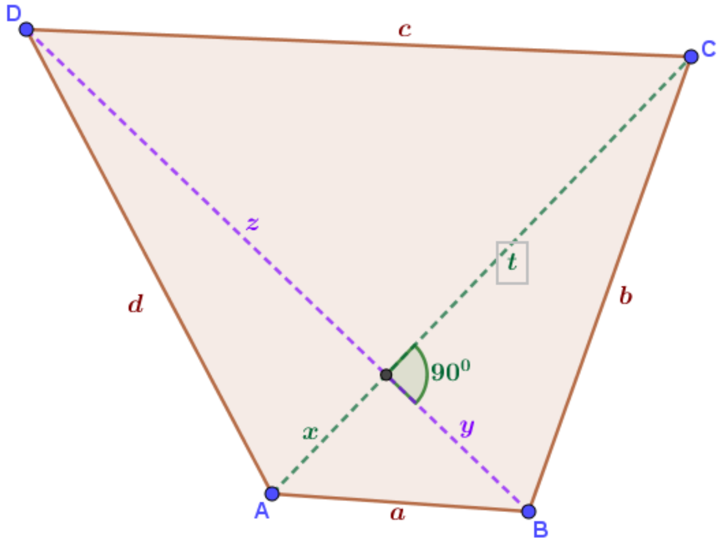
Para resolver o problema proposto nesse item, temos que fazer:

a) Seja um quadrilátero cujas medidas de seus lados são a, b, c e d, respectivamente. Observe que o problema cita que o quadrilátero é inscritível, logo, pode-se utilizar a Fórmula de Brahmagupta para determinar a sua área. Conforme já sabemos:

$S_{\text{ABCD}} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, onde p é o semiperímetro. Porém o problema também cita também que o quadrilátero é circunscritível. Para que um quadrilátero seja circunscritível a uma circunferência é necessário que seus lados sejam tangentes à circunferência e matematicamente temos que, a soma das medidas de dois lados opostos seja igual à soma dos outros dois lados, ou melhor, $a + c = b + d$. Seu semiperímetro p é dado por $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ = a + c = b + d. Efetuando-se a substituição na Fórmula de Brahmagupta p por $a + c$ ou por $b + d$, dependendo da necessidade, chega-se a seguinte igualdade: $S_{\text{ABCD}} = \sqrt{p(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d)} \Leftrightarrow S_{\text{ABCD}} = \sqrt{c \cdot d \cdot a \cdot b}$. Como a ordem dos fatores não altera o produto, então: $S_{\text{ABCD}} = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$.

b) Vamos apresentar a ida e a volta, na ida, temos que se as diagonais são perpendiculares então a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados de outro par de lados opostos. Observe a figura 27.

Figura 27. Quadrilátero convexo qualquer e suas diagonais perpendiculares.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

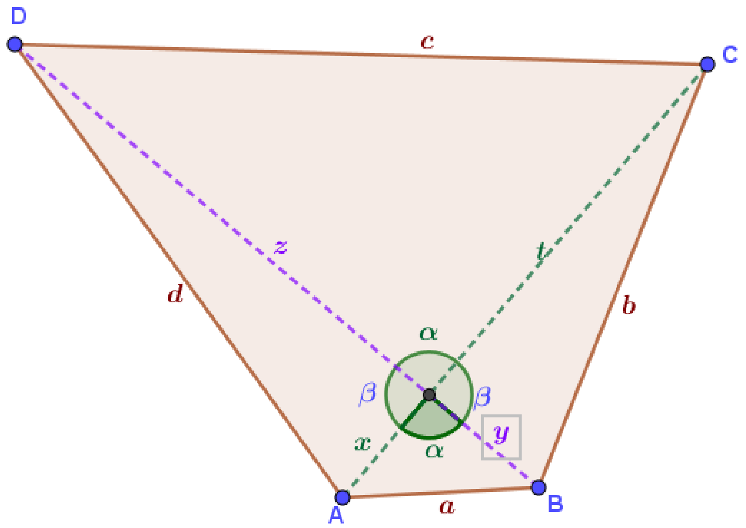
Usando o teorema de Pitágoras pode-se chegar as seguintes relações:

- ✓ $a^2 = x^2 + y^2$;
- ✓ $b^2 = y^2 + t^2$;
- ✓ $c^2 = t^2 + z^2$;
- ✓ $d^2 = x^2 + z^2$.

Se somarmos a^2 com c^2 , obtemos: $a^2 + c^2 = x^2 + y^2 + t^2 + z^2$. De maneira análoga, somando b^2 com d^2 : $b^2 + d^2 = y^2 + t^2 + x^2 + z^2$. Portanto, conclui-se que: $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$.

Agora vamos provar a volta, ou melhor, se a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados de outro par de lados opostos então as diagonais são perpendiculares. Observe a figura 28.

Figura 28. Ângulos α e β formados pelas diagonais.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Se aplicarmos a lei dos cossenos nos quatro triângulos retângulos formados pelas diagonais e os lados do quadrilátero, obtemos:

- ✓ $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\alpha;$
- ✓ $b^2 = y^2 + t^2 - 2yt\cos\beta;$
- ✓ $c^2 = t^2 + z^2 - 2tz\cos\alpha;$
- ✓ $d^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos\beta.$

Vamos usar a hipótese de que $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$. Efetuando a substituição nas relações acima e desenvolvendo-a, encontramos:

$$x^2 + y^2 + t^2 + z^2 - 2(xy + tz)\cos\alpha = y^2 + t^2 + x^2 + z^2 - 2(yt + xz)\cos\beta \Leftrightarrow$$

$$(xy + tz)\cos\alpha = (yt + xz)\cos\beta.$$

Verifica-se, claramente que, α e β são ângulos suplementares, portanto $\cos\alpha = -\cos\beta$, o que leva à expressão anterior a: $(xy + tz)\cos\alpha$ =-$(yt + xz)\cos\alpha$. Portanto, teremos duas possibilidades: Ou $\cos\alpha = 0$ ou $xy + tz = -(yt + xz)$. Como x, y, z e t são valores maiores que zero, a segunda igualdade não pode ocorrer. Logo $cos\alpha = 0$, e como α é um ângulo inferior a 180^0, então $\alpha = 90^0$, o que comprova que as diagonais são perpendiculares.

c) Pelo item anterior, sabe-se que as diagonais são perpendiculares se, e somente se, a soma dos quadrados de um par de lados opostos é igual à soma dos quadrados do outro par de lados opostos. Como o quadrilátero tem lados consecutivos aC, cB, bC e cA, testamos os pares de lados opostos. Para o par aC e bC, temos $(aC)^2 + (bC)^2 = C^2(a^2 + b^2)$, no entanto, por hipótese, temos que $a^2 + b^2 = c^2$, o que nos leva a: $(aC)^2 + (bC)^2 = C^2c^2$. Para o outro par, cB e cA, encontramos $(cB)^2 + (cA)^2 = c^2(A^2 + B^2)$, analogamente, por hipótese temos que $A^2 + B^2 = C^2$, então $(cB)^2 + (cA)^2 = C^2c^2$. Portanto $(aC)^2 + (bC)^2 = (cB)^2 + (cA)^2$ e assim provamos que as diagonais são perpendiculares.

d) Para encontrar as medidas dos lados, pelo item anterior, temos que seus lados medem aC, cB, bC e cA, tal que $a^2 + b^2 = c^2$ e $A^2 + B^2 = C^2$.

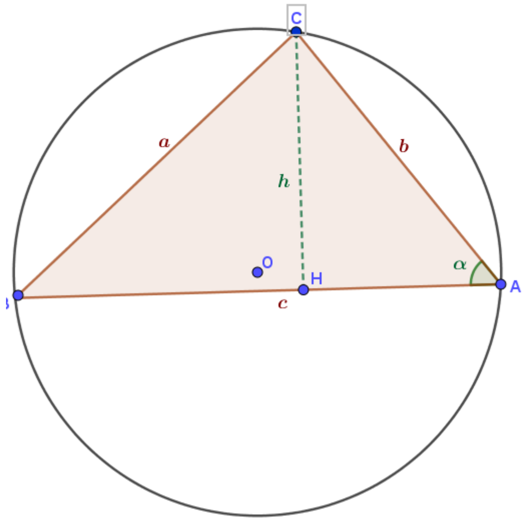
Os lados deste trapézio de Brahmagupta medem 39, 60, 52 e 25, mesmo permutando os ternos pitagóricos entre as possíveis letras, o resultado é o mesmo. As diagonais medem 56 e 63, as quais podem ser calculadas pelo teorema de Pitágoras, neste caso, ou usando as fórmulas para diagonais do quadrilátero cíclico que serão exploradas na terceira atividade. O diâmetro do círculo circunscrito pode ser calculado a partir da expressão para área de triângulos em função de seus lados e do raio da circunferência, ao separar o quadrilátero em dois triângulos usando uma de suas diagonais. Outra maneira, mais simples, é usando a fórmula apresentada no item (d) da terceira atividade. Sua medida é 65. Sua área, calculada pela Fórmula de Brahmagupta, é 1764 unidades de área.

Resolução do exemplo 7:

O exemplo em questão requer determinada habilidade para a resolução que descrevemos a seguir:

a) Considere um triângulo cujos lados medem a, b e c inscrito numa circunferência, de acordo com a figura 29. Considere h como sendo a medida da altura relativa ao lado c e α sendo o ângulo compreendido entre os lados b e c.

Figura 29. Triângulo inscrito na circunferência.

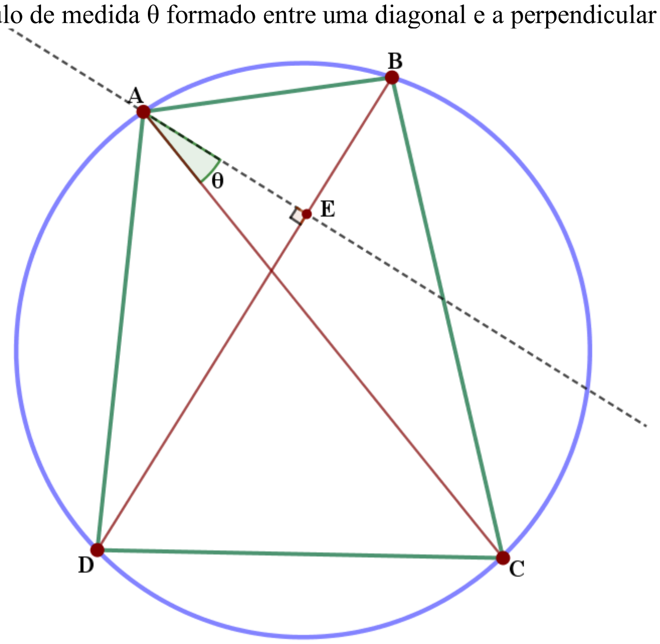


Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Aplicando-se a lei dos senos no triângulo obtém-se $\frac{a}{\text{sen}\alpha} = 2R \Leftrightarrow \text{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$. sendo R o raio da circunferência circunscrita. No triângulo retângulo ACH, da figura 29, temos: $\text{sen}\alpha = \frac{h}{b}$ · Das duas equações obtidas, tem-se que: $\frac{a}{2R} = \frac{h}{b} \Rightarrow ab = 2Rh.$

b) Como sugestão de OLIVEIRA (2015) para amparar a resolução do item b) acima, siga a Figura 30.

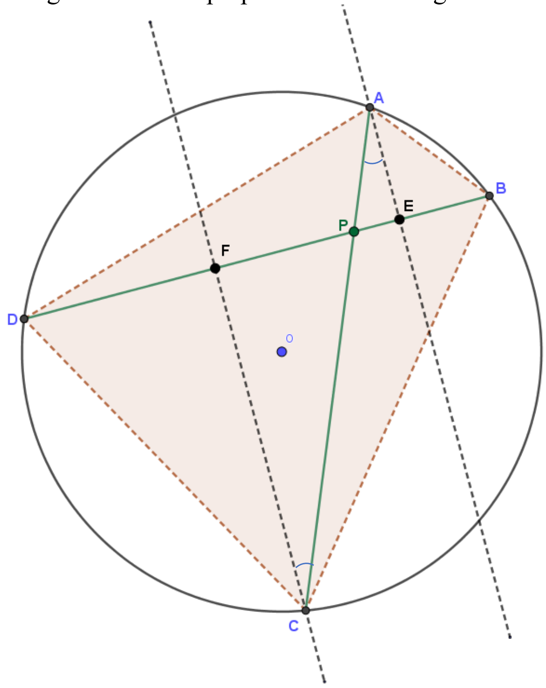
Figura 30. O ângulo de medida θ formado entre uma diagonal e a perpendicular à outra diagonal.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Traça-se a perpendicular à mesma diagonal, porém passando pelo vértice oposto, como na figura 31.

Figura 31. Retas perpendiculares à diagonal BD.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Denotando por θ os ângulos $E\hat{A}P$ e $F\hat{C}P$, pois são congruentes, uma vez que se trata de ângulos alternos internos. De acordo com o enunciado da atividade, temos as seguintes igualdades: $AB = a, BC = b, CD = c$ e $AD = d$, com diagonais $AC = x$ e $BD = y$.

Usando a relação do item anterior no triângulo ABD, que está inscrito na mesma circunferência de raio R que o quadrilátero, chega-se à fórmula: $\frac{a}{AE} = \frac{2R}{d} \Rightarrow a \cdot d = AE \cdot 2R$, em que AE é a medida da altura relativa ao lado BD. No triângulo APE, para relacionar a medida AE, encontra-se: $\cos\theta = \frac{AE}{AP} \Leftrightarrow AE = AP \cdot \cos\theta$. Efetuando-se a substituição na expressão anterior, obtém-se: $a \cdot d = AP \cdot 2R\cos\theta \Leftrightarrow AP = \frac{a \cdot d}{2R\cos\theta}$ · De maneia análoga, nos triângulos BCD e CFP, encontramos: $b \cdot c = CP \cdot 2R\cos\theta \Leftrightarrow CP = \frac{b \cdot c}{2R\cos\theta}$ · Portanto, $AP + CP = AC$. Fazendo a substituição tem-se: $AC = \frac{a \cdot d}{2R\cos\theta} + \frac{b \cdot c}{2R\cos\theta}$ · Como $AC = x$, tem-se $x = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{2R\cos\theta}$, de onde se conclui que $2Rx\cos\theta = ad + bc$. Similarmente fazemos o mesmo para a diagonal BD e chegamos à conclusão que: $\boldsymbol{2Ry\cos\theta = ab + cd}$.

c) Basta utilizarmos o teorema de Ptolomeu no mesmo quadrilátero do item anterior: $ac + bd = xy$. Substituir y pela relação encontrada: $ac + bd = x \cdot \frac{ab+cd}{2R\cos\theta} \cdot$ Do item anterior, também temos: $2R\cos\theta = \frac{ad+bc}{x} \cdot$ Utilizando esse resultado na expressão anterior, encontramos a seguinte igualdade: $ac + bd = x(ab + cd)\ \frac{x}{ad + bc}$, ou, finalmente, $x^2 = \frac{(ad+bc)(ac + bd)}{ab + cd}$.

d) Se as diagonais são perpendiculares entre si, então $\theta = 0^0$, figura 31, acima, quer dizer que $cos\theta = cos0^0 = 1$. Substituindo nas relações encontradas no item (b) temos:

$x = \frac{ad+bc}{2R}\ e\ y = \frac{ab+cd}{2R}$. Pelo teorema de Ptolomeu, encontramos:

$\left(\frac{ad+bc}{2R}\right) \cdot \left(\frac{ab+cd}{2R}\right) = ac + bd$, ou ainda, como procurávamos $4R^2 = \frac{(ab+cd)(ad+bc)}{ac+bd} \cdot$

Resolução do exemplo 8:

Mesmo o exemplo pedindo uma demonstração no item a), por relações trigonométricas chegamos à sua resposta. Assim:

a) Das relações trigonométricas, buscando a fórmula do cosseno do arco duplo, encontramos: $\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta) = \cos\theta \cdot \cos\theta - \text{sen}\theta \cdot \text{sen}\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta,$ pela relação fundamental sabemos que $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, substituindo na relação anterior, tem-se: $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \Rightarrow \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. Seja $2\theta = \alpha + \beta \Leftrightarrow \theta = \frac{\alpha+\beta}{2}$. Fazendo-se a devida substituição na fórmula especificada encontra-se: $\boldsymbol{\cos(\alpha + \beta) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

b) Resposta apresentada no Apêndice F.

Resolução do exemplo 9:

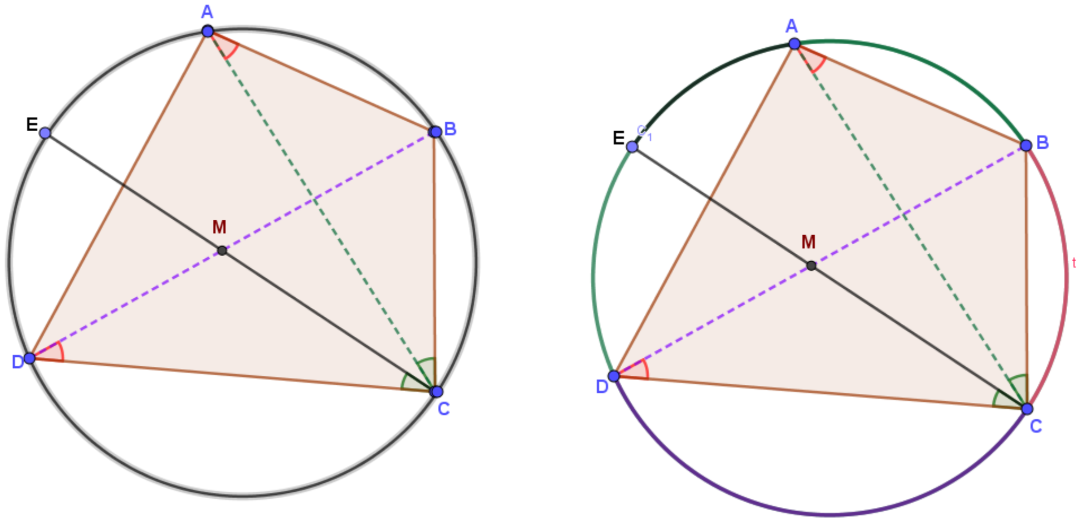
Exemplo resolvido da a partir da página 57 com um passo a passo do GeoGebra

Resolução do exemplo 10:

De acordo com a sugestão, escolha um ponto M sobre a diagonal BD de forma que a medida do ângulo $A\hat{C}B$ tenha a mesma medida do ângulo $M\hat{C}D$, observe a figura 32(a). Verifique os ângulos congruentes inscritos na circunferência, conforme a figura 32(b).

Figura 32. Quadrilátero inscritível e seus ângulos inscritos congruentes.

(a) Ponto M, da sugestão (b) Ângulos inscritos congruentes

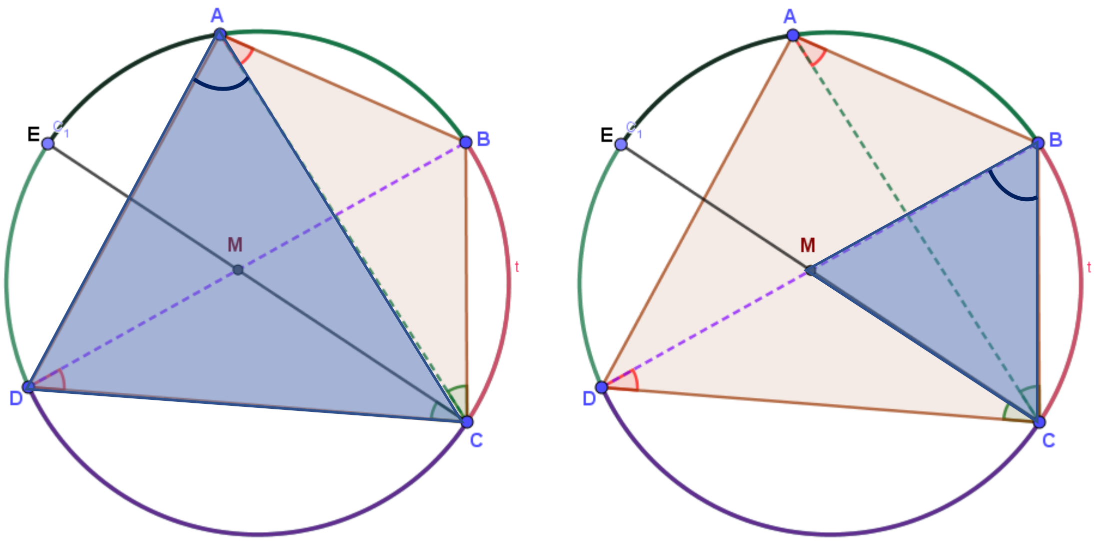


Fonte: Próprio autor – Construídos pelo GeoGebra

Note que $\Delta ACD \sim \Delta BCM$, conforme figura 33(a).

Figura 33. Triângulos semelhantes ACD e BCM.

(a) Triângulo ACD (b) Triângulo BCM



Fonte: Próprio Autor – Construídos pelo GeoGebra

A partir da semelhança acima, chega-se à seguinte proporção:

$$AD \cdot BC = AC \cdot MB. (*)$$

Verifica-se também a semelhança entre os triângulos DCM e ACB, conforme a figura 33. Conclui-se, portanto que:

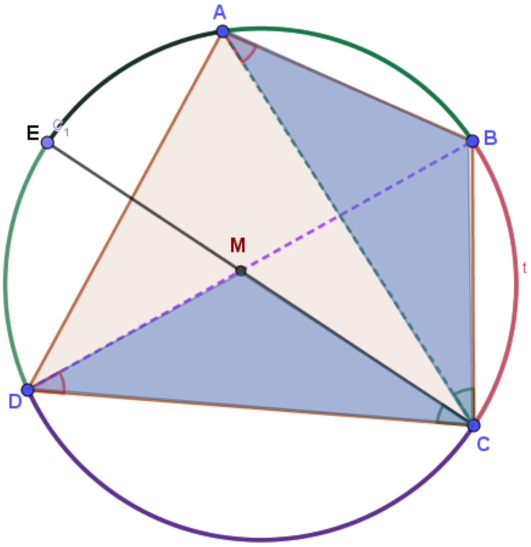
$$AB \cdot DC = AC \cdot DM. (**)$$

Somando-se (*) com (**) obtém-se:

$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot MB + AC \cdot DM \Leftrightarrow$

$AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC(MB + DM)$. No entanto, $MB + DM = BD$. Efetuando-se as devidas substituições, encontramos **AD · BC + AB · DC = AC · BD**, que é o que queríamos achar.

Figura 34. Triângulos DCM e ACB semelhantes.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Após finalizar a Sequência Didática proposta, será realizada uma Avaliação Formativa, conforme o modelo abaixo, construído pelo próprio autor para que os discentes sejam avaliados sobre o quanto foi apreendido com os conteúdos abordados.

Professor: ____Turma:_____Data:__/__/__
Alunos:
Nome: ____N.º______
Nome: ____N.º______
Nome: ____N.º______

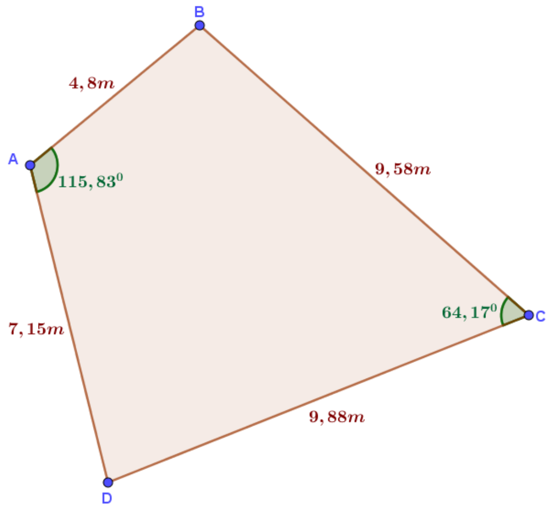
AVALIAÇÃO FORMATIVA

Caríssimos estudantes,

Esta avaliação possui a intenção de observar como está o desempenho de vocês, bem como fazer uma análise de como vocês apresentam as soluções, qual é a forma de raciocínio utilizada nas respostas, para saber se apresentam coesão e coerência. Assim, será verificado o feedback individual, embora seja feita em equipe de no máximo três alunos.

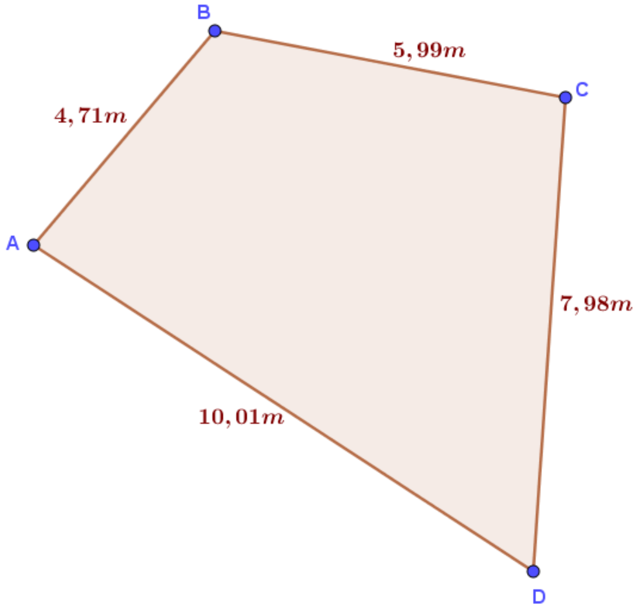
Fórmula de Brahmagupta

1 – Os alunos do Ensino Médio de uma determinada escola, resolveram, a partir da figura abaixo, determinar a área do quadrilátero. Após efetuar os cálculos eles encontraram que valor para a área desse quadrilátero?



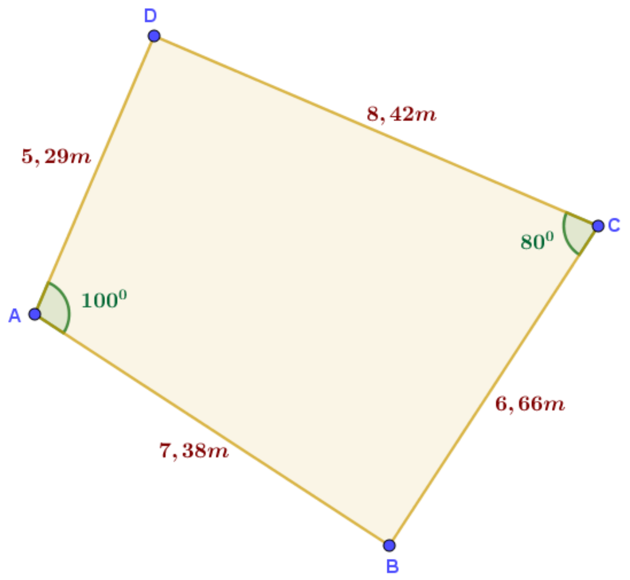
2 – Sr. João agricultor desde a sua infância, precisou vender um terreno em forma de quadrilátero, sabendo-se que ele cobra $R\$$ 3.000,00 por metro quadrado, e que as medidas

do quadrilátero são $AB = 4{,}8m, BC = 9{,}58m, CD = 9{,}88m\ e\ DA = 7{,}15m$. Por quanto o Sr. João está vendendo o seu terreno? Na figura abaixo encontra-se o esboço do terreno. Observação os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{D}C$ são suplementares.



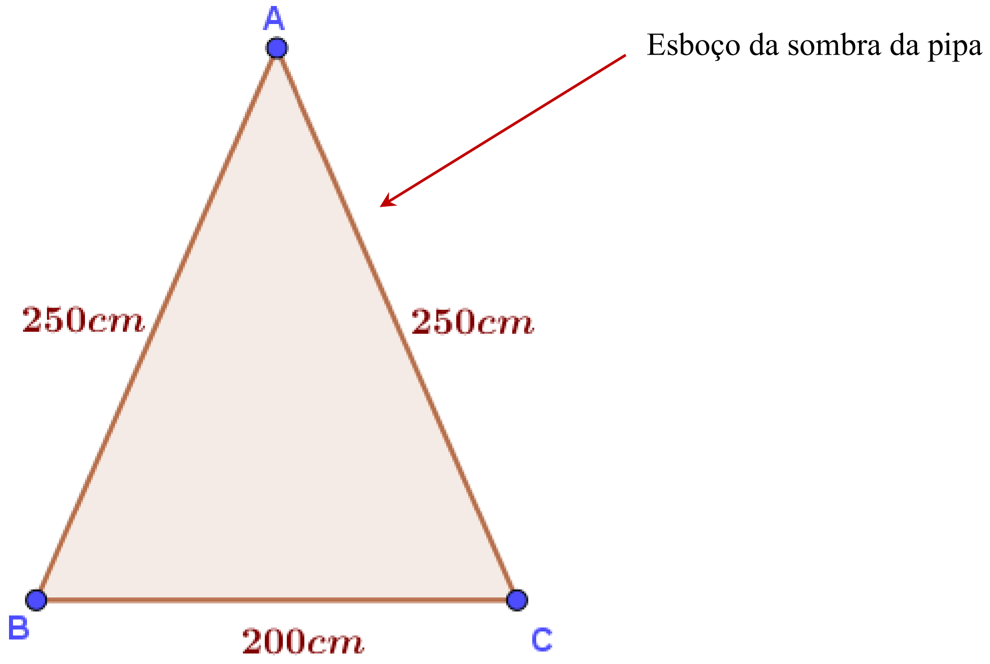
3 – Pesquisando sobre os quadriláteros, dois agrônomos depararam com a seguinte situação: encontraram um desenho conforme a figura abaixo e resolveram lembrar da época da

faculdade e um sugeriu ao outro, vamos determinar a área desse quadrilátero, enquanto o outro disse: se nós colocarmos no GeoGebra ele nos dará a área e, então decidiram. Enquanto um foi resolver o problema com lápis, papel e calculadora ou outro foi para o GeoGebra. No final qual foi o valor encontrado, em m^2?



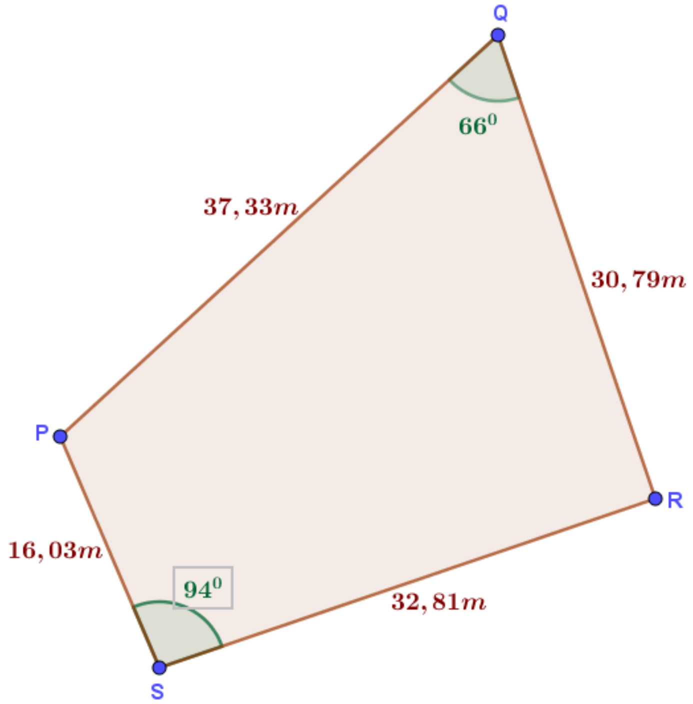
Fórmula de Heron

4 – Anton estava empinando uma pipa e observou que quando a pipa pairava no ar a sua sombra num terreno plano mostrava o formato e as dimensões da figura a seguir, medidas por seu colega Albert. Como ele havia fabricado a pipa, sabia quais eram as suas dimensões. Após anotar num pedaço de papel as dimensões medidas por Albert da sombra de sua pipa sobre o terreno plano, ele resolveu ir para casa e calcular a área da sombra. Aproveitou o momento e verificou que os lados semelhantes dos triângulos mantinham uma proporção de 1:10 (do original para a sombra). Informe os valores das áreas encontrados.



Fórmula de Bretschneider

5 – Um aluno estava se preparando para uma seleção de um concurso para as escolas militares e pegou vários livros para estudar, em paralelo com a preparação ele estudava a segunda série do Ensino Médio e estava estudando área de figuras planas poligonais, mas especificamente área de quadriláteros. Em determinado momento de sua preparação ele se deparou com a seguinte situação: A prefeitura de uma cidade precisava consertar todo o piso de um espaço para a prática de exercícios físicos para os idosos daquela cidade, colocando cerâmica. A parte possuía a forma de um quadrilátero, com as seguintes dimensões: PQ, QR, RS e SP conforme a figura abaixo. Sabe-se que seriam compradas caixas de cerâmicas com $5m^2$ de área cada caixa, ainda foi dito no problema que seriam necessários 10% além da quantidade de caixas calculadas para o piso. Diante da situação, qual a quantidade exata de caixas de cerâmicas que seriam necessárias ser compradas?



Fonte: Próprio autor

6 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para este trabalho utilizou-se como metodologia a revisão bibliográfica sistemática onde foram pesquisadas várias fontes de pesquisa sobre o assunto. Na sua abordagem foi utilizada a pesquisa qualitativa, uma vez que se considerou a relação entre os materiais pesquisados sobre a Fórmula de Brahmagupta, buscando a qualidade das informações neles contidas. Utilizou-se ainda quanto à natureza, uma pesquisa básica, com o intuito de apresentar uma revisão sistemática. No tocante aos objetivos, buscou-se à pesquisa exploratória, com o intuito de trazer para o ambiente escolar essa tão conceituada fórmula, visando proporcionar maior familiaridade com situações-problemas acerca do assunto em pauta e por fim, quanto aos procedimentos, utilizou-se à pesquisa bibliográfica, uma vez que se baseou em pesquisas feitas em materiais já publicados, tais como dissertações, para dar um caráter científico ao trabalho. Também foram feitas pesquisas em *sites* de Matemática, em livros acadêmicos e até mesmo em alguns livros didáticos para apoiar algumas demonstrações, todos citados nas referências.

Conforme cita GIL (2018, p. 44), “a pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”. Ainda segundo o autor:

> A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. Essa vantagem torna-se particularmente importante quando o problema de pesquisa requer dados muito dispersos pelo espaço. Por exemplo, seria impossível a um pesquisador percorrer todo o território brasileiro em busca de dados sobre população ou renda per capita; todavia, se tem a sua disposição uma bibliografia adequada, não terá maiores obstáculos para contar com as informações requeridas. A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. (GIL, 2018, p. 44).

O objetivo dessa revisão foi de apresentar a importância da utilização da Fórmula de Brahmagupta para o ensino do cálculo da área dos quadriláteros convexos no Ensino Médio.

Dessa forma foi feita uma criteriosa seleção dos assuntos abordados e uma distribuição em seções, com descrições e demonstrações de cada uma das fórmulas apresentadas, bem como os possíveis erros cometidos em sua concepção, ou seja, no enunciado das fórmulas e nas consequências de sua utilização.

> Esta afirmativa não nega a importância das revisões narrativas, mas, chama atenção para novas possibilidades ainda pouco utilizadas apesar de sua viabilidade. Isto porque, nos últimos 10 anos, novas formas de análise criadas e utilizadas pelas Ciências da Saúde, vêm permitindo a elaboração de estudos de síntese, que constituem por si mesmos - e por seus métodos bem definidos - pesquisas, e não apenas levantamento da literatura disponível. (MEDINA; PAILAQUILÉN, 2010, p.7).

Ainda nessa temática, afirmam MEDINA e PAILAQUILÉN (2010), que "Os pesquisadores precisam da Revisão Sistemática (RS) para resumir os dados existentes, refinar hipóteses, estimar tamanhos de amostra e ajudar a definir agendas de trabalhos futuros considerados como seus sujeitos." (MEDINA; PAILAQUILÉN, 2010, p. 7).

Por fim apresentamos uma Sequência Didática com uma Avaliação Diagnóstica para saber como está o conhecimento prévio dos estudantes, um Plano de Aula, dividido em momentos, onde o docente explora o assunto e resolve junto com os alunos alguns exercícios e problemas e por último apresentamos uma Avaliação Formativa para avaliar os resultados.

Diante disso, não apenas foi feita uma revisão sistemática, como também dada uma nova roupagem, evidenciando-se o que propunham os objetivos geral e específicos. Sem perder o cunho científico e, buscando caminhos de inserção no Ensino Médio.

6.1 Caracterização da Pesquisa

Foi realizada uma revisão bibliográfica sistemática onde foram pesquisadas várias dissertações de mestrado, bem como livros acadêmicos e documentos acerca do assunto, conforme já citado anteriormente:

Quanto à abordagem utilizou-se a Pesquisa Qualitativa, uma vez que se considerou a relação entre os trabalhos pesquisados e a utilização da Fórmula de Brahmagupta, preocupando-se com a qualidade do material pesquisado com as devidas demonstrações e resolução de situações-problemas.

Quanto à natureza foi feita uma Pesquisa Básica, buscando-se uma Revisão Sistemática.

Quanto aos objetivos, utilizou-se a Pesquisa Exploratória, com o intuito de levar para o ambiente escolar essa tão conceituada fórmula, visando trazer informações relevantes e proporcionar maior familiaridade com situações-problemas acerca do assunto em pauta e por último, quanto aos procedimentos, realizou-se uma Revisão Sistemática, tendo em vista que se baseou em pesquisas feitas em materiais já publicados, conforme apresentado no item 6.3, abaixo.

6.2 Instrumentos e técnicas de coleta de dados

Utilizou-se uma pesquisa minuciosa em trabalhos de pesquisa (dissertações), livros acadêmicos e didáticos, *sites* etc, com o intuito de coletar dados suficientes relacionados ao tema para que pudessem amparar e dar suporte ao presente trabalho. Enfatizando o que fora proposto nos objetivos específicos anteriormente elencados e permitindo uma fundamentação com muita consistência no tocante aos conteúdos abordados.

6.3 Descrição da amostra

Foram pesquisadas 38 fontes de referências, dentre elas 06 dissertações de mestrado, 04 monografias de graduação/especialização, 9 livros acadêmicos, 4 livros didáticos, 12 *sites* e 3 artigos em revistas científicas/simpósios.

Tabela 1. DISSERTAÇÕES

Autor	Ano	Obra	Base de Dados
ALVES, D. S.	2015	Os teoremas esquecidos pelos professores de Geometria Plana no Ensino Médio	Repositório Institucional da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul: Os teoremas esquecidos pelos professores de geometria plana do ensino médio (ufms.br)
GOMES, E. B.	2005	A história da Matemática como metodologia de ensino da Matemática: Perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos.	Microsoft Word - dissertacao_completa.doc (ufpa.br)
JESUZ, D.A.F.	2015	Desenvolvendo o Conceito de Áreas: Uma Proposta Didática Para Abordar Regiões Planas Irregulares na Educação Básica.	Descrição: Desenvolvendo o conceito de áreas: uma proposta didática para abordar regiões planas irregulares na educação básica (ibict.br)
MOURA, Y. T.	2019	Quadrângulos: uma abordagem etnomatemática.	Repositório Institucional da UnB: Quadrângulos: uma abordagem etnomatemática
OLIVEIRA, G. V.	2015	Brahmagupta e Quadriláteros Cíclicos no Ensino Médio.	Oliveira_GabrielaVicentinide_M.pdf (unicamp.br)
VIEIRA JR, I. F.	2020	Polígonos cíclicos e o teorema japonês.	Polígonos Cíclicos e o Teorema Japonês (profmat-sbm.org.br)

Fonte: Próprio autor

Tabela 2. MONOGRAFIAS

Autor	Ano	Obra	Base de Dados
DANTAS, J. S.	2020	O estudo da Fórmula de Brahmagupta para área de quadriláteros cíclicos.	Repositório Institucional da UFPB: O estudo da fórmula de Brahmagupta para área de quadriláteros cíclicos
MONTEIRO, I. I. G	2015	A resolução de problemas no ensino de matemática	000865120.pdf (unesp.br)
ROSSETTO, H. H. P.	2013	Um resgate histórico: A importância da história da Matemática.	MD_EDUMTE_2014_2_43.pdf (utfpr.edu.br)
SANCHES, R. C.	2014	Ética em pesquisa de mercado, ética na etapa de coleta e trabalhos de campo.	Monografia Rita Sanches Final 07-04 (usp.br)

Fonte: Próprio autor

Tabela 3. LIVROS ACADÊMICOS

Autor	Ano	Obra	Base de Dados
BOYER, C. B; MERZBACH, U. C.	2019	História da Matemática.	Minha Biblioteca: História da matemática
EVES, H	2011	Introdução à História da Matemática.	Livro físico
GIL, A. C.	2018	Como elaborar projetos de pesquisa.	Livro físico
HESS, A.	2012	A highway from Heron to Brahmagupta. Forum Geometricorum.	[PDF] A Highway from Heron to Brahmagupta | Semantic Scholar
HOFFMANN, J. M. L.	2008	Avaliar: respeitar primeiro, educar depois.	Avaliar: respeitar primeiro, educar depois - Jussara Hoffmann - Google Livros
LIMA, E. L. et all.	2005	Temas e Problemas Elementares.	Livro físico
MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M.	2002	Geometria II	Livro físico
PÓLYA, G.	2006	A arte de resolver problemas	Cesumar - Centro Universitario de Maringa (unicesumar.edu.br)
ZABALA, A.	2014	A prática educativa: como ensinar.	A Prática Educativa - Google Books

Fonte: Próprio autor

Tabela 4. LIVROS DIDÁTICOS

Autor	Ano	Obra	Base de Dados
BUCCHI, P	2007	Curso Prático de Matemática.	Livro físico
DOLCE, O.; POMPEO, J. N.	1993	Fundamentos de Matemática Elementar.	Livro físico
DANTE, L. R.	2003	Didática da resolução de Problemas de Matemática.	Livro Físico
IEZZI, G.	1993	Fundamentos de Matemática Elementar.	Livro físico

Fonte: Próprio autor

Tabela 5. REVISTAS CIENTÍFICAS/SIMPÓSIOS

Autor	Ano	Obra	Base de Dados
JESUZ, D. A. F.; ROMEIRO, N.M.L;BACCON, A. L. P.	2016	Uma proposta para o ensino de áreas de quadriláteros irregulares na educação básica.	13035-Texto do artigo-41368-1-10-20200918.pdf
MACÊDO, A. GOMES, C. A.	2010	Heron para quadriláteros ... Brahmagupta.	RPM 64 -Heron para quadriláteros... Brahmagupta
SANTOS, M. C	2002	Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática.	616-DEFb (ciaem-redumate.org)

Fonte: Próprio autor

Tabela 6. PESQUISAS ELETRÔNICAS

Autor	Ano	Obra	Base de Dados
SAPAVIVA	2021	BRAHMAGUPTA. Biography	https://www.sapaviva.com/brahmagupta/
BRASIL	2018	Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio	<Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Etapa Ensino Médio - Ministério da Educação (mec.gov.br)
PERNAMBUCO	2020	Documento de Reorganização Curricular – Ensino Médio	GOVERNO DO ESTADO DE PERNAMBUCO - Secretaria de Educação e Esportes
IMAGINIE EDUCAÇÃO	2020	Conheça as 5 principais características da avaliação formativa e aplique-a em sua escola.	https://educacao.imaginie.com.br/caracteristicas-da-avaliacao-formativa
PUC-SP	2021	Instituto São Paulo – GeoGebra	https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html
KHAN ACADEMY	2013	KHAN, S. Khan Academy	https://pt.khanacademy.org
MEDINA, E. U.; PAILAQUILÉN, R. M. B	2020	A revisão sistemática e a sua relação com a prática baseada na evidência em saúde.	pt_23 (scielo.br)
MUÑOZ, S. I. S. et al	2020	Revisão sistemática de literatura e metanálise: noções básicas sobre seu desenho, interpretação e aplicação na área da saúde.	Simpósio Brasileiro de Comunicação em Enfermagem - Systematic literature review and meta-analysis: basic notions about its design, interpretation and application in health research (scielo.br)
PEREIRA, A. A et all	2020	Plano de Aula.	<planos_de_aulas_para_ o_ensino_médio>
The Story of Mathematics	2020	Indian Mathematics - Brahmagupta.	https://www.storyofmathematics.com/indian_ brahmagupta.html
TUTOR BRASIL	2020	Demonstração do Teorema de Ptolomeu.	Demonstração do Teorema de PTOLOMEU - Fórum TutorBrasil - Matemática, Português, Física, Química e Biologia
WIKIPEDIA	2013	The Free Encyclopedia, Bretschneider’s formula.	Bretschneider's formula - Wikipedia

Fonte: Próprio autor

6.4 Cenário da pesquisa

Conforme já citado anteriormente a pesquisa foi efetuada em trabalhos científicos, livros, *sites*, para embasar este trabalho.

6.5 Questões éticas

Em todas as etapas de um projeto de pesquisa as questões éticas precisam ser levadas em consideração. Conforme cita SANCHES (2014):

> As questões éticas são dilemas universais que sempre acompanharam as civilizações, eis o motivo de várias correntes éticas darem origem a muitas interpretações e reflexões sobre o problema das ações humanas no que se refere ao comportamento ético. (SANCHES, 2014, p. 17).

Diante do exposto, neste trabalho buscou-se utilizar o caráter ético para não incorrer em plágios, no campo das ideias e discussões, sempre citando as fontes pesquisadas e trazendo as referências.

6.6 Procedimentos de análise e interpretação de dados

Neste trabalho os procedimentos foram feitos à base de pesquisa bibliográfica, onde pesquisou-se o que havia de contribuição a respeito do tema em pauta, quais os consensos e antagonismos, verificando-se que havia muito mais congruências do que divergências. Após ser aplicada a Avaliação Diagnóstica para saber em que nível de conhecimento os estudantes se encontram será aplicada uma Sequência Didática com o intuito de que haja uma interação professor/aluno/aluno, aluno/professor/aluno e aluno/aluno para a troca de saberes e ideias venham à tona e o ensino-aprendizagem se concretize, sendo finalizado com uma Avaliação Formativa que objetiva apurar os resultados.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É perceptível como o assunto neste trabalho apresentado é tão pouco explorado no Ensino Médio, talvez pelo fato dos livros didáticos pouco abordarem. A Fórmula de Brahmagupta tem uma importância muito grande para a determinação da área dos quadriláteros inscritíveis, que posteriormente fora generalizada para o cálculo da área de um quadrilátero qualquer, consolidada na Fórmula de Bretschineider, também demonstrada neste trabalho.

Pela pesquisa que foi feita, de natureza bibliográfica básica, teórica, de forma qualitativa e análise bibliográfica de trabalhos acadêmicos (dissertações), livros didáticos e acadêmicos, revistas científicas e simpósios, bem como *sites*, percebeu-se que de forma quase unânime os autores citam uma pouca utilização de ensinamentos constantes do cerne deste trabalho no Ensino Médio.

Sugerimos a realização de uma Avaliação Diagnóstica para avaliar o conhecimento prévio dos alunos e se for preciso efetuar uma revisão dos conteúdos. Em seguida propomos uma Sequência Didática com um Plano de Aula, que deve ser explorado no Ensino Médio, a partir do segundo ano, onde o docente apresentará, após efetuar a correção da Avaliação Diagnóstica sugerida, um conjunto de ações (aulas), com a participação dos estudantes, resolução de diversos exercícios e problemas, com interação dos participantes e socialização com troca de saberes e ideias. Também, nessa Sequência Didática, há um momento em que o docente apresenta e ensina os alunos a utilizarem o GeoGebra na construção de quadriláteros inscritíveis e por fim, há a aplicação de uma Avaliação Formativa, com o intuito de apurar os resultados da aplicação da Sequência Didática. Onde espera-se que as metas sejam todas atendidas.

O objetivo geral deste trabalho foi atendido, uma vez que trouxe em forma de revisão sistemática a Fórmula de Brahmagupta, sua demonstração e a importância para o ensino de áreas de quadriláteros cíclicos, bem como a resolução de situações-problemas no Ensino Médio, aqui propostos. Da mesma forma os objetivos específicos foram atendidos, uma vez que trouxe a descrição de métodos tradicionais para o cálculo de áreas de quadriláteros convexos, a apresentação de demonstração da Fórmula de Brahmagupta de três formas diferentes, amparada pelas Fórmulas de Heron e Bretschneider, bem como, pela sugestão de um Plano de Aula que abrange todos os conhecimentos acerca do assunto aqui abordado.

Dessa forma, acredita-se que o trabalho proposto atende à proposta do tema, das hipóteses apresentadas, da questão norteadora e discute todas as formas necessárias ao entendimento das demonstrações feitas.

Sugere-se que o docente que porventura venha a ler este trabalho, tente de alguma forma colocá-lo em prática, fazendo as possíveis modificações do Plano de Aula apresentado, adaptando-o às suas necessidades, como também permitindo em todos os momentos a participação ativa dos discentes.

REFERÊNCIAS

ALVES, D. S. **Os teoremas esquecidos pelos professores de Geometria Plana no Ensino Médio**. 2015, 81 f. Dissertação do programa de pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática – INMA/UFMS – Campo Grande – MS, 2015.

BRAHMAGUPTA. **Biography**. Disponível em: https://www.sapaviva.com/brahmagupta/. Acesso em: 02 fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular – Ensino Médio**, Brasília, 2018. Disponível em: <Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Etapa Ensino Médio - Ministério da Educação (mec.gov.br)>. Acesso em: 10 fev. 2021.

BOYER, C. B; MERZBACH, U. C. **História da Matemática**. Blucher, São Paulo, 2019.

BUCCHI, P. **Curso Prático de Matemática** – vol 1, 3.a ed. Editora Moderna, 2007.

DANTAS, J. S. **O estudo da fórmula de Brahmagupta para área de quadriláteros cíclicos**. 2020, 34 f. Monografia de graduação do curso de licenciatura em Matemática – Universidade Federal da Paraíba – João Pessoa – PB, 2020.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de Matemática**. São Paulo: Atlas, 2003.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar** - vol. 9, 7. ed. Atual Editora LTDA, São Paulo, 1993.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. 5. ed. Editora Unicamp, Campinas, 2011.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

GOMES, E. B. **A história da Matemática como metodologia de ensino da Matemática:** Perspectivas epistemológicas e evolução de conceitos. 2005. 120 f. Dissertação do programa de pós-graduação em educação em ciências matemáticas – Universidade Federal do Pará – Belém, 2005.

GOVERNO DO ESTADO DE PERNAMBUCO. Secretaria de Educação e Esportes. **Documento de Reorganização Curricular** – Ensino Médio, 2020.

HESS, A. **A highway from Heron to Brahmagupta**. Forum Geometricorum, v. 12, p. 191–192, 2012.

HOFFMANN, J. M. L. **Avaliar:** respeitar primeiro, educar depois. Porto Alegre, RS: Mediação, 2008.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar** - vol. 3, 7.a ed. Atual Editora LTDA, São Paulo, 1993.

IMAGINIE EDUCAÇÃO. **Conheça as 5 principais características da avaliação formativa e aplique-a em sua escola**. Disponível em: < https://educacao.imaginie.com.br/caracteristicas-da-avaliacao-formativa/>. Acesso em: 28 abr. 2021.

INSTITUTO SÃO PAULO – **GeoGebra** – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia. Disponível em: <https://www.pucsp.br/geogebrasp/geogebra.html>. Acesso em: 07 fev. 2021.

JESUZ, D.A.F. **Desenvolvendo o Conceito de Áreas:** Uma Proposta Didática Para Abordar Regiões Planas Irregulares na Educação Básica. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Estadual de Londrina – UEL, Londrina, 2015.

JESUZ, D. A. F.; ROMEIRO, N.M.L; BACCON, A. L. P. **uma proposta para o ensino de áreas de quadriláteros irregulares na educação básica.** V Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (V Sinect). Universidade Estadual de Londrina – UEL, 2016.

KHAN, S. Khan Academy. 2013. Disponível em: <https://pt.khanacademy.org>. Acesso em: 22 fev. 2021.

LIMA, E. L. et all. **Temas e Problemas Elementares**. 2a Edição. Sociedade Brasileira de Matemática. 2005.

MACÊDO, A. GOMES, C. A. (2010). **Heron para quadriláteros ... Brahmagupta**. Revista do Professor de Matemática (RPM), n. 64, p.7-12.

MEDINA, E. U.; PAILAQUILÉN, R. M. B. **A revisão sistemática e a sua relação com a prática baseada na evidência em saúde.** Disponível em: <pt_23 (scielo.br)>. Acesso em: 20 fev. 2021.

MONTEIRO. I. I. G. A resolução de problemas no ensino de matemática. 2015, 43 f. Monografia de graduação do curso de licenciatura em Matemática. Universidade Estadual Paulista – Guaratinguetá – São Paulo, 2015.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria II**. Rio de Janeiro: F. C. Araújo da Silva, 2002.

MOURA, Y. T. **Quadrângulos:** uma abordagem etnomatemática. 2019. 84 f. Dissertação Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – (PROFMAT) – Instituto de Ciências Exatas da Universidade de Brasília – Brasília, 2019.

MUÑOZ, S. I. S. et al. **Revisão sistemática de literatura e metanálise:** noções básicas sobre seu desenho, interpretação e aplicação na área da saúde. Disponível em: <Simpósio Brasileiro de Comunicação em Enfermagem - Systematic literature review and meta-analysis: basic notions about its design, interpretation and application in health research (scielo.br)>. Acesso em: 20 fev. 2021.

OLIVEIRA, G. V. **Brahmagupta e Quadriláteros Cíclicos no Ensino Médio**. 2015, 84 f. Dissertação de Mestrado do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas –Campinas, 2015.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. Educação Matemática pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortes Editora, 2004, p. 213 a 231.

PEREIRA, A. A et all. **Plano de Aula**. Disponível em: <planos_de_aulas_para_ o_ensino_médio>. Acesso em: 05 fev. 2021.

PÓLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

ROSSETTO, H. H. P. **Um resgate histórico:** A importância da história da Matemática. 2013, 38 f. Monografia de especialização na pós-graduação em educação. Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR – Medianeira, 2013.

SANCHES, R. C. **Ética em pesquisa de mercado, ética na etapa de coleta e trabalhos de campo.** Monografia de Especialização apresentada à Escola de Comunicações e Artes. Universidade de São Paulo (USP) – São Paulo, 2014.

Santos, M. C. **Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática**. Separata de: Educação Matemática em Revista, São Paulo. v.9, n.12), p.11-15, 2002.

The Story of Mathematics, **Indian Mathematics - Brahmagupta**. 2020. Disponível em: <https://www.storyofmathematics.com/indian_ brahmagupta.html>. Acesso em 05 fev. de 2021.

TUTOR BRASIL. Matemática.tv. **Demonstração do Teorema de Ptolomeu**. Disponível em: <Demonstração do Teorema de PTOLOMEU - Fórum TutorBrasil - Matemática, Português, Física, Química e Biologia>. Acesso em: 07 fev. 2021.

VIEIRA JÚNIOR, I. F. **Polígonos cíclicos e o teorema japonês**. 2020, 107 f. Dissertação (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) – Universidade do Estado do Rio de Janeiro – Ensino da Matemática – Rio de Janeiro, 2020.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 2014.

WIKIPEDIA - **The Free Encyclopedia, Bretschneider’s formula**. Disponível em: < Bretschneider's formula - Wikipedia >. Acesso em 30 mar. de 2021.

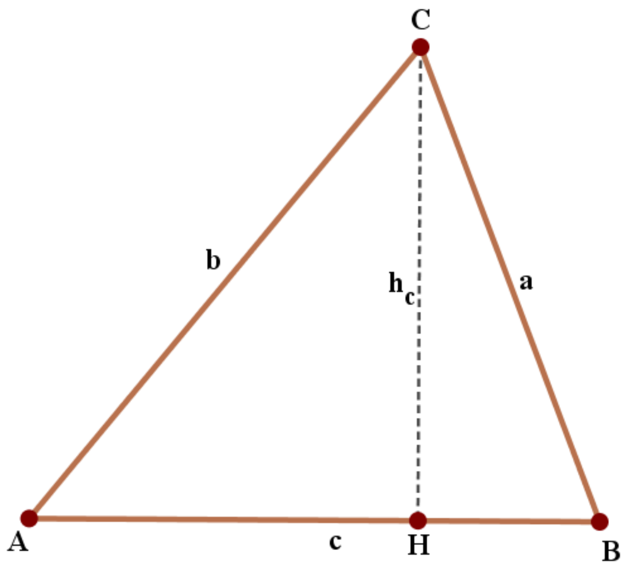
APÊNDICES

APÊNDICE A - Fórmula dos Senos (área do triângulo)

Dado um triângulo qualquer ABC cuja área seja S, de forma que $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então: $S = \frac{1}{2} bc\text{sen}\hat{A}$.

Demonstração: Inicialmente vamos considerar que o triângulo ABC é acutângulo, ou seja, que todos os seus ângulos internos não menores que 90^0. Observando a figura 35, abaixo, temos que:

Figura 35. Triângulo ABC.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

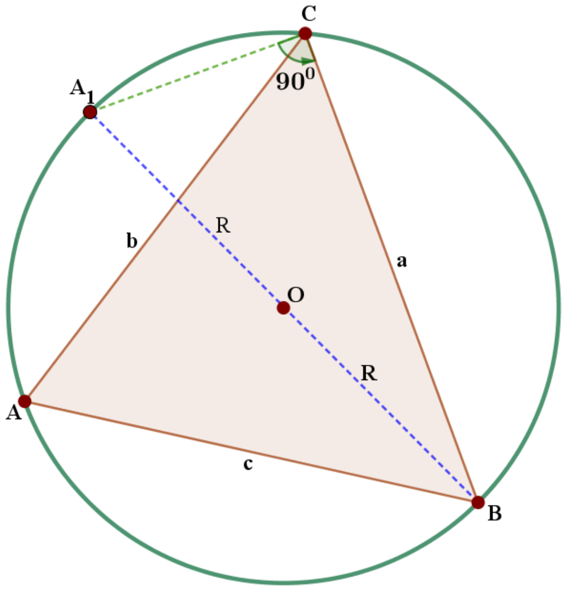
A área do triângulo ABC é dada pelo produto da base pela altura dividido por 2, ou seja, $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$, temos também que, $\text{sen}(\hat{A}) = \frac{h_c}{b} \Rightarrow h_c = b\text{sen}(\hat{A})$, logo: $S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b\text{sen}\hat{A} \Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{1}{2} bc\text{sen}\hat{A}}$.

APÊNDICE B - Lei dos Senos

Dado um triângulo ABC com circunraio medindo R de forma que $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, podemos assim definir que: $\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R$.

Demonstração: Analogamente à demonstração anterior, partiremos de um triângulo acutângulo, inscrito em uma circunferência de raio R, conforme figura 36 abaixo:

Figura 36. Triângulo Inscrito numa circunferência.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

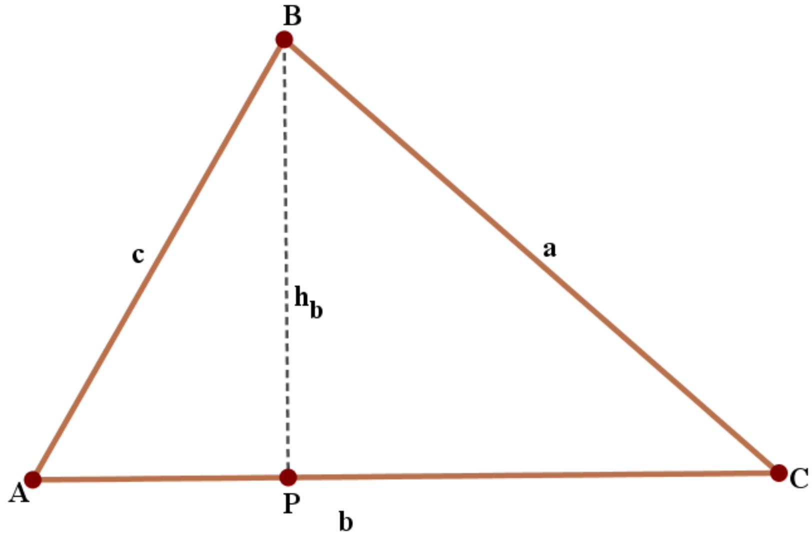
Por um dos vértices do triângulo, no caso, o vértice (B), trace o diâmetro correspondente BA_1 e ligue A_1 com C. Perceba que $\hat{A} = \widehat{A_1}$, pois determinam na circunferência a mesma corda BC. Verifique que o triângulo A_1BC é retângulo em C pelo fato de estar inscrito numa semicircunferência. Temos então: $\operatorname{sen}(A_1) = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(A_1)} = 2R \Rightarrow \frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = 2R$. De forma análoga, temos que: $\frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = 2R \; e \; \frac{c}{\operatorname{sen}(C)} = 2R$. Portanto, concluímos que a proporção é verdadeira: $\boldsymbol{\frac{a}{\operatorname{sen}(A)} = \frac{b}{\operatorname{sen}(B)} = \frac{c}{\operatorname{sen}(C)} = 2R}$.

APÊNDICE C - Lei dos Cossenos

Dado um triângulo ABC qualquer tal que $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$, então, temos que: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Demonstração: será feita a demonstração em 3 casos. Primeiramente tomamos o pé da altura do triângulo ABC relativa a um determinado lado, onde se sabe que por definição o pé da altura é o ponto de interseção dessa altura com a reta suporte referente a esse lado. Dessa forma, suponha que P seja o pé da altura referente ao lado AC, daí, concluímos, através da figura 37 abaixo, que:

Figura 37. Triângulo ABC com $\hat{A} < 90^0$.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

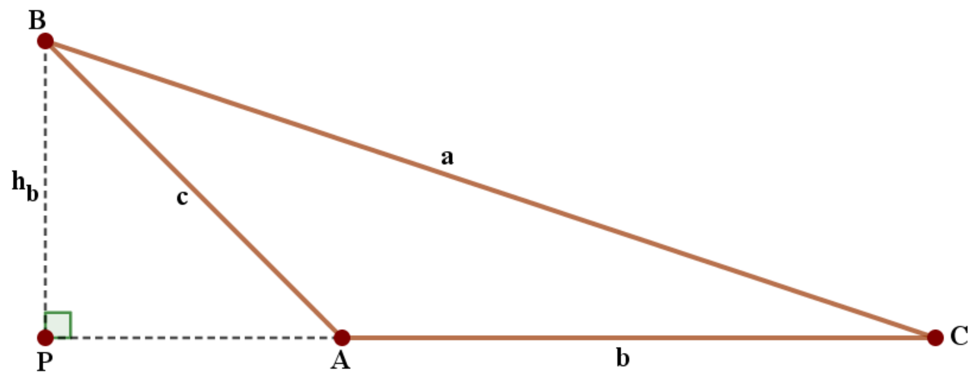
1.⁰ caso, quando $\hat{A} < 90^0$ (ângulo agudo), então: ${h_b}^2 = c^2 - (\overline{AP})^2$ e $\cos\hat{A} = \frac{\overline{AP}}{c}(1)$ também temos que: $a^2 = (\overline{CP})^2 + {h_b}^2(2)$. De (1) e (2), obtemos: $a^2 = (\overline{CP})^2 + c^2 - (\overline{AP})^2$, como $(\overline{CP})^2 = (b - \overline{AP})^2$, chegamos em: $a^2 = (b - \overline{AP})^2 + c^2 - (\overline{AP})^2 \Rightarrow$
$a^2 = b^2 - 2b\overline{AP} + (\overline{AP})^2 + c^2 - (\overline{AP})^2 \Rightarrow a^2 = b^2 - 2b\overline{AP} + c^2 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}.$$

2.⁰ caso, se $\hat{A} = 90^0$ (ângulo reto), então o triângulo ABC torna-se retângulo em A e pelo Teorema de Pitágoras tem-se que $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$.

3.⁰ caso, para $\hat{A} > 90^0$ (ângulo obtuso), observando na figura 38, abaixo:

Figura 38. Triângulo ABC com $\hat{A} > 90^0$.

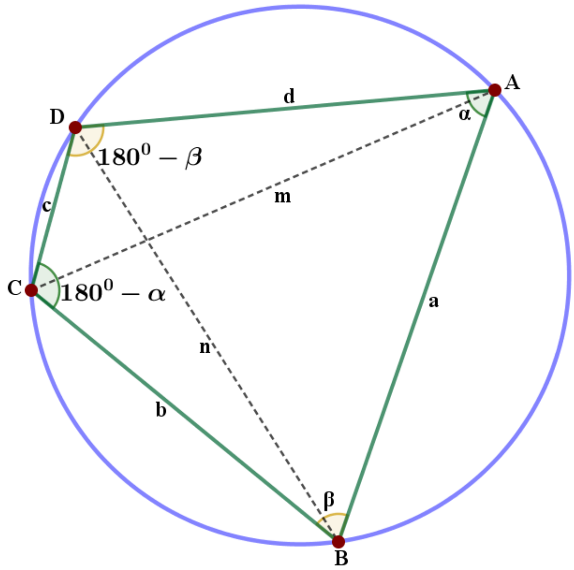


Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Veja que o vértice A, encontra-se entre o ponto P e o vértice C. No triângulo BPA, retângulo em P, temos que ${h_b}^2 = c^2 - (\overline{AP})^2$ e $\cos(180^0 - \hat{A}) = \frac{\overline{AP}}{c}(1)$ por outro lado, no triângulo BPC, temos que $a^2 = {h_b}^2 + (\overline{AP} + b)^2 \Rightarrow$
$a^2 = c^2 - (\overline{AP})^2 + (\overline{AP})^2 + 2b\overline{AP} + b^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2b\overline{AP}$, substituindo a equação em (1), desta última equação, obtemos: $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc\cos(180^0 - \hat{A})$, da trigonometria, sabemos que: $\cos(180^0 - \hat{A}) = \cos 180^0 \cdot \cos\hat{A} + \mathrm{sen}180^0 \cdot \mathrm{sen}\hat{A} = -\cos\hat{A}$. Logo:
$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc(-\cos\hat{A}) \Rightarrow \boldsymbol{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$.

APÊNDICE D – Diagonais de um quadrilátero inscritível

Figura 39. Diagonais de um quadrilátero inscritível.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Dado o quadrilátero convexo inscritível, da figura 39, acima, cujas diagonais $AC = m$ e $BD = n$, podemos efetuar os seguintes cálculos. No triângulo ACD, usando a lei dos cossenos, temos: $m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^0 - \beta)$, como $\cos(180^0 - \beta) = -\cos\beta$, então temos que: $m^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\beta \Rightarrow 2cd\cos\beta = m^2 - c^2 - d^2 \Rightarrow \cos\beta = \frac{m^2-c^2-d^2}{2cd}$. Ainda na figura 39, no triângulo ABC, temos que $m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta$, que nos remete a equação: $2ab\cos\beta = a^2 + b^2 - m^2 \Rightarrow \cos\beta = \frac{a^2+b^2-m^2}{2ab}$, igualando ambas as expressões, obtemos: $\frac{m^2-c^2-d^2}{2cd} = \frac{a^2+b^2-m^2}{2ab}$, desenvolvendo, encontramos a seguinte expressão:

$abm^2 - abc^2 - abd^2 = cda^2 + cdb^2 - cdm^2$, podemos ainda, chegar a:

$abm^2 + cdm^2 = abc^2 + abd^2 + cda^2 + cdb^2 \Rightarrow$

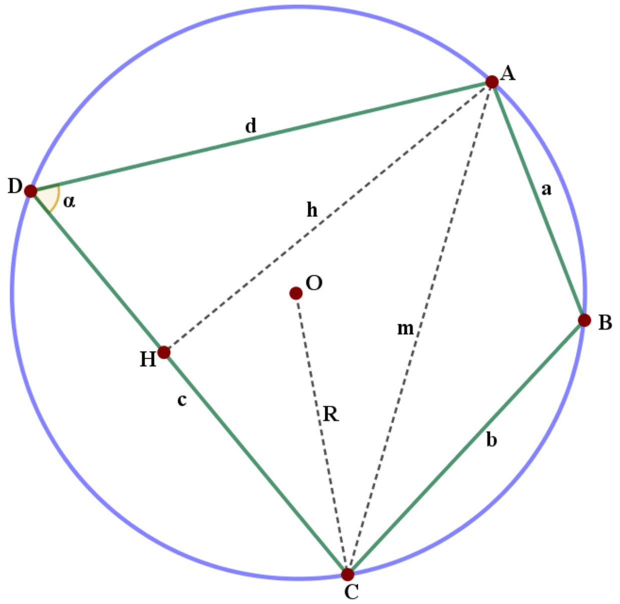
$m^2(ab + cd) = cda^2 + abd^2 + abc^2 + cdb^2 \Rightarrow$

$m^2(ab + cd) = ad(ac + bd) + bc(ac + bd)$, colocando-se $(ac + bd)$ em evidência, chega-se em: $m^2(ab + cd) = (ac + bd)(ad + bc)$ de onde conclui-se que, $m^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{(ab+cd)} \Rightarrow$

$m = \sqrt{\frac{(\boldsymbol{ac+bd})(\boldsymbol{ad+bc})}{(\boldsymbol{ab+cd})}}$, analogamente faz-se o cálculo para a diagonal $BD = n$.

APÊNDICE E - Cálculo do raio *R* da circunferência circunscrita ao quadrilátero inscritível

Figura 40. Triângulos ABC e ACD inscritos na circunferência de raio R.



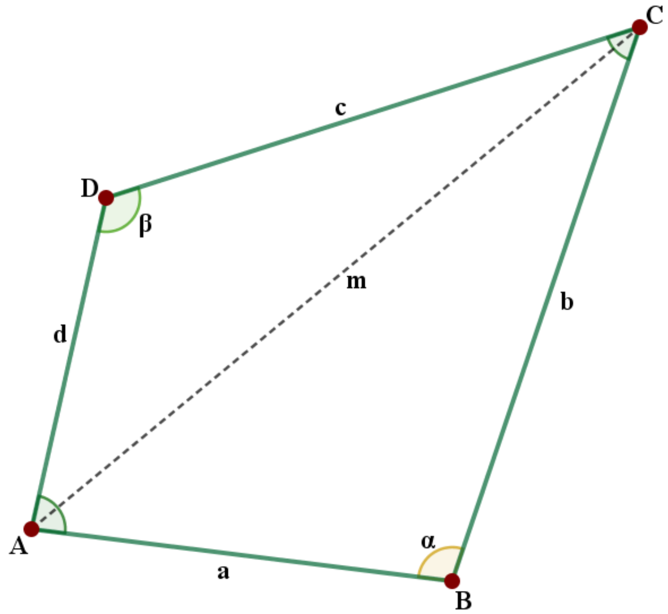
Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Pelo triângulo ACD observa-se que o raio R da circunferência circunscrita encontra-se em seu interior e, portanto, vamos determinar o raio R em função da medida dos lados do quadrilátero inscrito a partir deste triângulo, traçando a altura relativa ao lado CD da figura 40, encontramos as relações abaixo. Por meio da lei dos cossenos, no triângulo ACD, obtemos: $m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\alpha$, pela definição do cosseno no triângulo retângulo ADH, temos que $\cos\alpha = \frac{DH}{d}$, logo: $m^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \frac{DH}{d} \Rightarrow m^2 = c^2 + d^2 - 2c \cdot DH$, daí chegamos a equação: $DH = \frac{m^2-c^2-d^2}{-2c} \Rightarrow DH = \frac{c^2+d^2-m^2}{2c}$. Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo ADH, obtemos: $d^2 = h^2 + DH^2 \Rightarrow h^2 = d^2 - DH^2$. Por fim, aplicando a lei dos senos no triângulo ACD chegamos a: $\frac{m}{\operatorname{sen}\alpha} = 2R$, como o $\operatorname{sen}\alpha$ no triângulo ADH é igual a: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{h}{d}$, então: $\frac{m}{\frac{h}{d}} = 2R \Rightarrow \frac{h}{d} = \frac{m}{2R} \Rightarrow h = \frac{dm}{2R}$. Eliminando DH, nas relações $DH = \frac{c^2+d^2-m^2}{2c}$ e $h^2 = d^2 - DH^2$, chega-se a: $h^2 = d^2 - \left(\frac{c^2+d^2-m^2}{2c}\right)^2$, chamando $k = \frac{c^2+d^2-m^2}{2c}$, obtém-se então: $h^2 = d^2 - (k)^2 \Rightarrow h^2 = (d+k) \cdot (d-k)$, substituindo-se o valor de k, encontra-se: $h^2 = \left(d + \frac{c^2+d^2-m^2}{2c}\right) \cdot \left(d - \left(\frac{c^2+d^2-m^2}{2c}\right)\right) \Rightarrow h^2 = \left(\frac{2cd+c^2+d^2-m^2}{2c}\right) \cdot \left(\left(\frac{2cd-c^2-d^2+m^2}{2c}\right)\right)$, que implica em: $h^2 = \frac{(2cd+c^2+d^2-m^2)\cdot(2cd-c^2-d^2+m^2)}{4c^2}$, como temos a igualdade a seguir $((c+d)^2 - m^2) = c^2 + 2cd + d^2 - m^2$ e $(m^2 - (c-d)^2) = m^2 - c^2 + 2cd - d^2$, então podemos escrever: $h^2 = \frac{((c+d)^2-m^2)\cdot(m^2-(c-d)^2)}{4c^2}$. De $h = \frac{dm}{2R}$, elevando-se ambos os membros ao quadrado, obtemos: $h^2 = \frac{d^2m^2}{4R^2}$ então, comparando com a última equação, temos que: $\frac{((c+d)^2-m^2)\cdot(m^2-(c-d)^2)}{4c^2} = \frac{d^2m^2}{4R^2} \Rightarrow R^2 = \frac{c^2d^2m^2}{((c+d)^2-m^2)\cdot(m^2-(c-d)^2)} \Rightarrow$

$$\boldsymbol{R^2 = \frac{(cdm)^2}{((c+d)^2-m^2)\cdot(m^2-(c-d)^2)}}.$$

APÊNDICE F - Fórmula de Bretschneider

Figura 41. Quadrilátero qualquer com diagonal AC=m.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Para entender a demonstração, o leitor precisará dos seguintes pré-requisitos: Fatoração, lei dos cossenos, relação trigonométrica fundamental, área de um triângulo conhecendo-se a medida dos lados e o ângulo compreendido por esses lados, cosseno da soma de dois arcos e cosseno da multiplicação de dois arcos e uma certa compreensão matemática do Ensino Médio.

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$, figura 41, acima. Temos, então: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = m$, $m(A\hat{B}C) = \alpha$ e $m(C\hat{D}A) = \beta$, supondo que o ângulo $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow 2\theta = \alpha + \beta$, temos que: $\cos(\alpha + \beta) = \cos(2\theta)$, mas $\cos(2\theta) = \cos(\theta + \theta)$, por definição da trigonometria, tem-se: $\cos(\theta + \theta) = \cos\theta\cos\theta - \text{sen}\theta\text{sen}\theta = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$, da relação fundamental da trigonometria, sabe-se que, $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$, substituindo acima, temos: $\cos(\theta + \theta) = \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta) \Rightarrow$
$\cos(2\theta) = \cos^2\theta + \cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$. De maneira análoga, como sabemos que $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2}ab\text{sen}\alpha + \frac{1}{2}cd\text{sen}\beta$, segue que: $S_{ABCD} = \frac{ab\text{sen}\alpha + cd\text{sen}\beta}{2} \Rightarrow 2S_{ABCD} = ab\text{sen}\alpha + cd\text{sen}\beta$, elevando-se ambos os membros ao quadrado obtemos: $(2S_{ABCD})^2 = (ab\text{sen}\alpha + cd\text{sen}\beta)^2$ que resulta em:

$$\mathbf{4(S_{ABCD})^2 = a^2b^2\text{sen}^2\alpha + 2abcd\text{sen}\alpha\text{sen}\beta + c^2d^2\text{sen}^2\beta}.(*)$$

Aplicando-se nos triângulos $ABC\ e\ CDA$ a lei dos cossenos, encontra-se a equação: $m^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ e $m^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$, de onde se chega à seguinte igualdade: $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta \Rightarrow$ $2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \Rightarrow 2(ab\cos\alpha - cd\cos\beta) = a^2 + b^2 - c^2 - d^2 \Rightarrow$ $ab\cos\alpha - cd\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}$. Elevando-se ambos os membros ao quadrado, tem-se que $(ab\cos\alpha - cd\cos\beta)^2 = \left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2}\right)^2 \Rightarrow (ab\cos\alpha - cd\cos\beta)^2 = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4}$, efetuando-se os cálculos, encontra-se:

$$\mathbf{a^2b^2\cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + c^2d^2\cos^2\beta = \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4}}. \ (**)$$

Fazendo-se a soma de $(*)$ com $(**)$, obtém-se:

$$\begin{cases} 4(S_{ABCD})^2 = a^2b^2\mathrm{sen}^2\alpha + 2abcd\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta + c^2d^2\mathrm{sen}^2\beta \\ \mathrm{a^2b^2}\cos^2\alpha - 2\mathrm{abcd}\cos\alpha\cos\beta + \mathrm{c^2d^2}\cos^2\beta = \frac{(\mathrm{a^2+b^2-c^2-d^2})^2}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2\mathrm{sen}^2\alpha + 2abcd\,\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta + c^2d^2\mathrm{sen}^2\beta + a^2b^2cos^2\alpha - 2abcd\cos\alpha\cos\beta + c^2d^2\cos^2\beta$$

que implica que em:

$$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2(\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2d^2(\mathrm{sen}^2\beta + \cos^2\beta) + 2abcd(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta) \Rightarrow$$

$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd(\mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta)$, arrumando obtém-se $4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 - 2abcd(\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta) + c^2d^2$, como sabemos que $cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\alpha\,\mathrm{sen}\beta$, então:

$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 - 2abcd\cos(\alpha+\beta) + c^2d^2$, mas determinou-se anteriormente que $\cos(\alpha+\beta) = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$, logo,

$$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 - 2abcd(2\cos^2\theta - 1) + c^2d^2 \Rightarrow$$

$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 - 2abcd(2\cos^2\theta - 1) + c^2d^2$, segue que

$$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 - 4abcd\cos^2\theta + 2abcd + c^2d^2 \Rightarrow$$

$$4(S_{ABCD})^2 + \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4} = a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2 - 4abcd\cos^2\theta \Rightarrow$$

$$4(S_{ABCD})^2+\frac{(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2)^2}{4}=(ab+cd)^2-4abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\therefore$$

$$16(S_{ABCD})^2=4(ab+cd)^2-16abcdcos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2)^2\Rightarrow$$

$$16(S_{ABCD})^2=(2ab+2cd)^2-(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2)^2-16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow$$

$16(S_{ABCD})^2=(2ab+2cd)^2-(\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2)^2-16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow$ fazendo $2ab+2cd=x$ e $\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2=y$, obtém-se: $(x)^2-(\mathrm{y})^2=(x+y)\cdot(x-y)$, logo $(2ab+2cd+\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2-\mathrm{c}^2-\mathrm{d}^2)\cdot(2ab+2cd-\mathrm{a}^2-\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^2+\mathrm{d}^2)$, portanto, chega-se a: $[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]$, assim resgatando a fórmula original ficamos com: $16(S_{ABCD})^2=[(a+b)^2-(c-d)^2][(c+d)^2-(a-b)^2]-16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, efetuando-se uma última fatoração encontra-se:

$$16(S_{ABCD})^2=(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)-16abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$(S_{ABCD})^2=\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{16}-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Rightarrow$$

$S_{ABCD}=\sqrt{\frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}{16}-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$. Resgatando-se o perímetro $2p=a+b+c+d$, chega-se:

$$S_{ABCD}=\sqrt{\frac{(2p-2d)(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)}{16}-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{\frac{2(p-d)-2(p-c)2(p-b)2(p-a)}{16}-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\Rightarrow$$

$$S_{ABCD}=\sqrt{\frac{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}{16}-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\Rightarrow$$

$\boldsymbol{S_{ABCD}=\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)-abcd\cos^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}}$ que é a fórmula que estávamos procurando demonstrar.

Observação: caso tenhamos α e β suplementares, ou seja, sua soma seja igual a 180^0 que é a condição para que o quadrilátero seja circunscritível, então a fórmula fica assim:

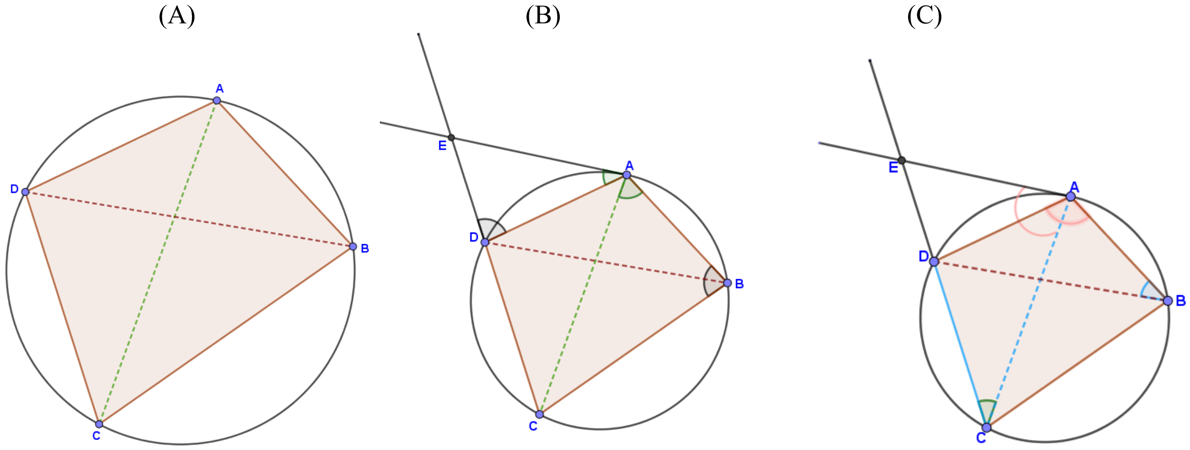
$S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\left(\frac{180^0}{2}\right)}$ que retorna à Fórmula de Brahmagupta, uma vez que $abcd\cos^2\left(\frac{180^0}{2}\right) = 0$.

APÊNDICE G - Teorema de Ptolomeu

O Teorema de Ptolomeu diz que em um quadrilátero inscritível $ABCD$, a soma dos produtos dos comprimentos dos lados opostos é igual ao produto das medidas das diagonais.

Sua hipótese é de que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível e sua tese, de que $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Observe a figura 42, abaixo:

Figura 42. Quadrilátero inscritível ABCD.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Para demonstrar o Teorema de Ptolomeu, vamo-nos guiar pelas ilustrações (A), (B) e (C) da figura 42. Na ilustração (A), observe o ângulo $B\hat{A}C$, trace uma reta suporte sobre o lado $\overline{CD}$ e verifique o ponto E, ilustração (B) que é o ponto de interseção entre a reta suporte de $\overline{CD}$ e a reta tangente à circunferência, no ponto A. Verifique também, que $C\hat{B}A \equiv A\hat{D}E$. Já que o quadrilátero $ABCD$ é inscritível, então: $A\hat{B}C + A\hat{D}C = 180^0$ e $A\hat{D}E + A\hat{D}C = 180^0 \Rightarrow A\hat{D}E \equiv C\hat{B}A$.

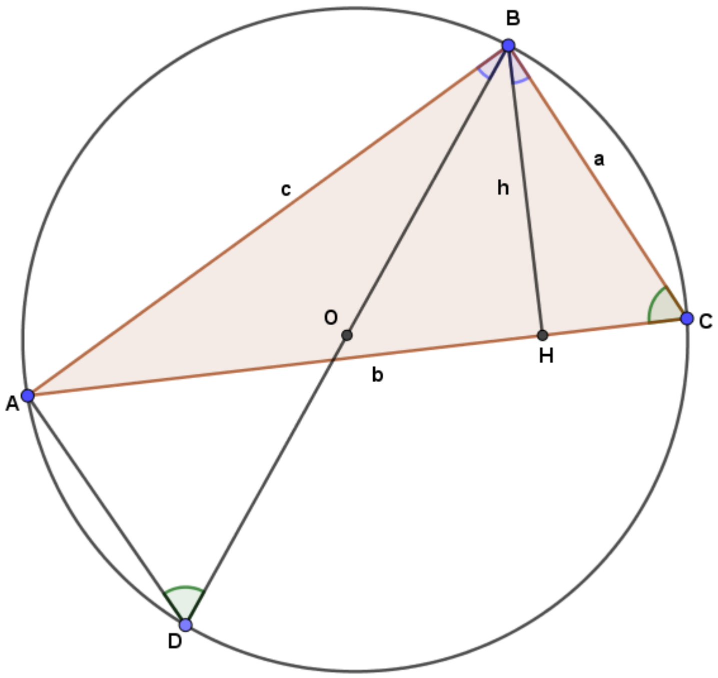
Note que $\Delta ABC \sim \Delta ADE$, pelo caso de congruência de dois ângulos, logo pode-se observar que: $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \Rightarrow \boldsymbol{AB \cdot DE = AD \cdot BC}$ **(1)**.

Na ilustração (C), observe que $A\hat{B}D \equiv A\hat{C}D$, pois ambos são ângulos relativos ao mesmo arco AD. Percebe-se facilmente que $B\hat{A}D \equiv C\hat{A}E$, portanto, $\Delta ABD \sim \Delta ACE \Rightarrow$ $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CE} = \frac{AD}{AE}$, dessa forma, $AC \cdot BD = AB \cdot CE$, então $CE = CD + DE$ o que permite encontrar $AC \cdot BD = AB \cdot (CD + DE) \Rightarrow AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$. De (1), segue que: $\boldsymbol{AB \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC}$.

APÊNDICE I - Área de um triângulo, conhecendo-se seus lados e o raio da circunferência circunscrita

Dada a figura 43, abaixo, temos:

Figura 43. Área de um triângulo dados o lado e o raio da circunferência circunscrita.



Fonte: Próprio autor – Construído pelo GeoGebra

Sabe-se que área do triângulo é dada pela metade do produto de sua base pela sua altura, ou seja, no $\Delta ABC, S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h(*)$. Observe que $\Delta ABD \cong \Delta HBC$ são semelhantes, de onde conclui-se que: $\frac{c}{2R} = \frac{h}{a}(**)$. Multiplicando-se ambos os membros de (*) por 2 e dividindo-se esses membros por b, obtém-se: $\frac{2 \cdot S_{ABC}}{b} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h}{b} \Rightarrow \frac{2 \cdot S_{ABC}}{b} = h$, substituindo-se este resultado em (**), conclui-se que: $\frac{c}{2R} = \frac{\frac{2 \cdot S_{ABC}}{b}}{a} \Rightarrow \frac{c}{2R} = \frac{2 \cdot S_{ABC}}{b} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow \boldsymbol{S_{ABC} = \frac{abc}{4R}}$.

GLOSSÁRIO

Ângulos Suplementares – são aqueles cuja soma é igual a 180^0.

Aryabhata – matemático e astrônomo da Índia Antiga.

Bhaskara – matemático indiano a quem se atribui o teorema que leva o seu nome.

Catóptrica – parte da física que trata da reflexão da luz.

Cincuncentro – é a interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo.

Circunraio – é o raio de uma circunferência a partir do seu circuncentro.

Dioptra – instrumento astronômico e topográfico clássico, datado do século III a.C.

Fórmula de Bretschneider – utilizada para o cálculo da área de um quadrilátero convexo qualquer.

Fórmula de Brahmagupta – utilizada para o cálculo da área de um quadrilátero cíclico.

Fórmula de Heron – utilizada para o cálculo da área de um triângulo qualquer.

Geometria Analítica - área da Matemática em que é possível representar elementos geométricos, como pontos, retas, triângulos, quadriláteros e circunferências, utilizando expressões algébricas.

Geometria Euclidiana - Geometria sobre planos ou objetos em três dimensões baseados nos postulados de Euclides de Alexandria.

Incentro – ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo, fica à mesma distância de todos os seus lados.

Inraio - é o raio de uma circunferência inscrita em um triângulo qualquer.

Ladrilhamento – em uma superfície plana é uma cobertura do plano onde formas (por exemplo, polígonos) são repetidos sem sobreposição ou lacunas.

Perímetro – é a soma dos lados de qualquer polígono.

Plano – é um elemento empírico da Geometria Plana formado por infinitos pontos.

Plano de Aula - documento elaborado pelo professor para definir o tema da aula, seu objetivo, o que exatamente será ensinado, a metodologia a ser utilizada e a avaliação a ser utilizada para analisar a assimilação do que foi ensinado, dentre outras coisas.

Polígono Inscrito e Circunscrito – figura plana em que seus lados se encontram no interior de uma circunferência e seus vértices estão contidos nela e figura plana em que seus lados se encontram no exterior de uma circunferência e seus vértices estão contidos nela, respectivamente.

Ponto – menor ente geométrico, sem definição, conhecimento empírico da Geometria.

Prismatóides – poliedros cujos vértices estão em dois planos paralelos.

Quadrilátero Convexo – figura plana com quatro lados em que tomados dois pontos no interior dessa figura, todos os pontos do segmento formado por esses dois pontos estão no interior desse quadrilátero.

Quadrilátero $ABCD$ Inscritível – quadrilátero cujos vértices são $ABCD$ e seus ângulos opostos são suplementares.

Reta – conjunto formado por infinitos pontos alinhados (conhecimento empírico da Geometria Plana).

Semiperímetro – é a metade do perímetro.

Sistema Internacional de Medidas - é uma padronização das grandezas físicas.

Teorema de Pitágoras – teorema que diz que em todo triângulo retângulo o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

ANEXOS

1 - BNCC - Base Nacional Comum Curricular

A BNCC do Ensino Médio encontra-se no endereço eletrônico abaixo:
Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – Etapa Ensino Médio - Ministério da Educação (mec.gov.br).