INSTITUTO
FEDERAL
Pernambuco

Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst: Estimando a população do Município de Sanharó-PE até o ano 2032.

Luís Carlos Alves da Silva
lcas@discente.ifpe.edu.br
Airlan Arnaldo Nascimento de Lima
airlan@pesqueira.ifpe.edu.br

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos uma discussão acerca de dois modelos matemáticos que têm como objetivo estimar o crescimento populacional no Município de Sanharó-PE: o modelo de Thomas Malthus (modelo exponencial) e o modelo de Pierre Verhulst (modelo logístico).Do ponto de vista metodológico, realizamos uma comparação entre esses dois modelos, ajustando uma função para cada um deles por meio do Software Geogebra, com a utilização de dados populacionais fornecidos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). Buscamos identificar qual modelo melhor representa o crescimento populacional na realidade de Sanharó e fizemos uma estimativa da população para o provável censo demográfico do ano de 2032. Ao final do estudo, discutimos as diferenças entre os dois modelos, bem como identificamos qual deles se mostra mais realista na representação do crescimento populacional.

Palavras–chave: Crescimento Populacional. Modelo de Malthus. Modelo de Verhulst.

ABSTRACT

In this work, we present a discussion about two mathematical models that aim to estimate the population growth in the municipality of Sanharó- PE: the Thomas Malthus model (exponential model) and the Pierre Verhulst model (logistic model). From a methodological perspective, we compared these two models by fitting a function to each of them using the Geogebra software and population data provided by the Brazilian Institute of Geography and Statistics (IBGE). We sought to identify which model better represents the population growth in the reality of Sanharó and made an estimation of the population for the probable demographic census of the year 2032. At the end of the study, we discussed the differences between the two models, as well as identified which one appears to be more realistic in representing the population growth.

Keywords: Population Growth; Malthusian Model; Verhulst Model.

1 INTRODUÇÃO

Estudar o crescimento populacional de um determinado local é um fator crucial para o planejamento de políticas públicas na região, uma vez que o crescimento sustentável da população requer, além de espaço no ambiente, um amplo conjunto de ações, atendendo demandas relacionadas à segurança, educação, saúde, dentre outros elementos.

Segundo Gotelli (2009), "uma população é um grupo de plantas, animais ou outros organismos, todos da mesma espécie, que vivem juntos e se reproduzem" (GOTELLI, 2009, p.2). Acreditamos que analisar a variação populacional de uma cidade é importante para caracterizar os aspectos históricos, sociais, econômicos e políticos daquela comunidade, incluindo o planejamento adequado dos recursos públicos. De acordo com esta perspectiva, nosso trabalho tem o objetivo de estudar o crescimento populacional do município de Sanharó- PE, especialmente prevendo o tamanho da população até o ano de 2032, quando possivelmente ocorrerá o próximo censo demográfico executado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Para atingir nosso objetivo, discutimos os modelos de Thomas Malthus e Pierre Verhulst, com ênfase na comparação entre os dois modelos para determinar qual deles melhor se adéqua à realidade estudada. Realizamos uma análise e comparação gráfica entre as curvas dos modelos mencionados, utilizando a interface da plataforma do Geogebra. Tomamos como referências centrais os trabalhos de Bassanezi e Júnior (1988), Gotelli (2009), Stewart (2013) e Tavoni e Oliveira (2013).

Através deste estudo, buscamos contribuir para o entendimento da dinâmica populacional local, e, eventualmente fornecer alguns subsídios para auxiliar o planejamento de infraestrutura e desenvolvimento social.

2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O CRESCIMENTO POPULACIONAL

É importante destacar que as populações aumentam devido ao número de nascimentos e diminuem devido ao número de mortes. Além disso, os tamanhos das populações também mudam em função do deslocamento de indivíduos, ou seja, populações aumentam com a chegada de novos indivíduos (imigração) e diminuem quando os residentes partem (emigração). No entanto, na nossa abordagem, optamos por não trabalhar com as categorias de imigração e emigração.

Dentre os vários modelos matemáticos existentes para tratar da dinâmica populacional, escolhemos os modelos de Thomas Malthus e Pierre Verhulst. De acordo com a literatura consultada, os referidos modelos são razoavelmente eficientes e elementares. Em outras palavras, dentro de certas condições, os modelos apresentam margem de erro consideravelmente satisfatória e seu tratamento matemático não demanda a utilização de ferramentas sofisticadas.

2.1 Modelo de Malthus

Este modelo elaborado pelo economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus em 1798, intitulado "An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society," tem suas bases na Teoria Malthusiana ou Malthusianismo. De acordo com esta teoria, a população humana cresceria em Progressão Geométrica, enquanto a oferta de alimentos cresceria em Progressão Aritmética. Em última análise, tal dinâmica resultaria em um momento no qual a população enfrentaria fome e miséria.

Tal como afirmam Tavoni e Oliveira (2013), o modelo malthusiano "pressupõe que a taxa na qual a população de um país cresce em um determinado instante é proporcional à população total do país naquele momento" (TAVONI e OLIVEIRA, 2013, p. 2).

Segundo Stewart (2013), é possível descrever o modelo malthusiano matematicamente da seguinte forma: se P(t) for o total de indivíduos da população P no tempo t e a taxa de variação de P em relação a t for proporcional a seu tamanho P(t) em qualquer tempo, então

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{1}$$

onde *k* é uma constante de proporcionalidade. Assim, se k for positivo, então a derivada também é positiva e a população aumenta com o tempo. Analogamente, se k for negativo, a população diminui e tende a extinção ao passo que t cresce. Em geral, a constante k representa a diferença entre a natalidade e a mortalidade dos indivíduos.

O modelo de Malthus é utilizado para estimar, por exemplo, o crescimento populacional de uma colônia de bactérias em uma situação ideal, ou seja, na ausência de fatores que impeçam ou limitem seu crescimento.

A Equação (1) é uma equação diferencial separável. Sua solução analítica pode ser obtida do seguinte modo:

$$\int \frac{dP}{P} = \int k\, dt$$

$$\ln|\, P\,| = kt + C$$

$$|P| = e^{kt+C} = e^{C}.e^{kt}$$

$$P = A.e^{k.t}.$$

Onde A = $\pm\, e^{c}$ é uma constante arbitrária. Se P (0) = $P_{0,}$ A é o valor inicial da população. Isto significa que podemos escrever

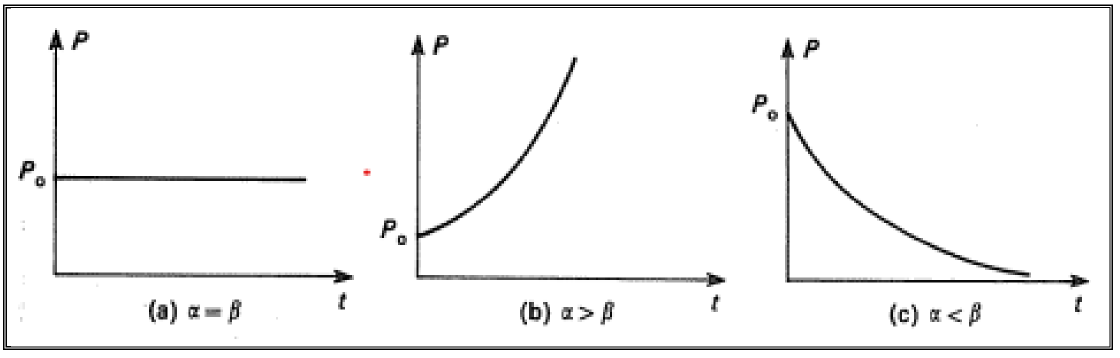
$$P(t) = P_0\,.\,e^{kt}\ . \tag{2}$$

Em síntese, essa será a expressão que utilizaremos para prever o crescimento populacional do município em questão.

Voltando ao significado da constante k, convém observar que se $k = (\alpha - \beta)$, onde α representa o número de nascimentos e β representa o número de mortes, então ocorre que:

- Se $\alpha = \beta$, isto é, os índices de natalidade e mortalidade coincidindo então $P(t) = P_0$, portanto, a população não varia (ver Figura 1a);
- Se $\alpha > \beta$, isto é, o índice de natalidade maior que o de mortalidade, então, a população cresce exponencialmente com o tempo (ver Figura 1b);
- Se $\alpha < \beta$, a população diminui e tende a extinção à medida que t cresce (ver Figura 1c).

Figura 1: Curvas de Crescimento para o Modelo Exponencial



Fonte: Equações Diferenciais com Aplicações – Bassanezi (1988).

Finalmente, destacamos que uma das principais críticas referentes ao modelo de Malthus consiste no fato do crescimento infinito da população, sempre que $P_0 > 0$ e k > 0.

2.2 Modelo de Verhulst

Inspirado no "Ensaio sobre o princípio da população" de Thomas Malthus, este modelo elaborado pelo matemático Belga Pierre-François Verhulst em 1838, descreve o crescimento de uma população usando um modelo não exponencial, mas sim que tem a forma característica de uma curva em S. Contudo, somente em 1845 que o matemático denomina essa curva de “logística”.

De acordo com Tavoni e Oliveira (2013), o modelo de Verhulst se comporta de tal forma que “[...] a população cresce até o limite máximo sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar” (TAVONI e OLIVEIRA, 2013, p.3). Em outros termos, se P(t) for o tamanho da população no instante t, existe um valor constante M, tal que $\lim_{t \to \infty} P(t) = M$. Este valor é usualmente denominado capacidade de suporte do meio.

Segundo Gotelli (2009),

> M representa o tamanho populacional máximo suportável por uma variedade de recursos potencialmente limitantes, tais como espaço, alimento e abrigo. No nosso modelo esses recursos vão se escasseando cada vez mais à medida que a superlotação aumenta. Como M representa o tamanho populacional máximo, as suas unidades são números de indivíduos. (GOTELLI, 2009, p.28).

O modelo de Verhulst assume que os recursos para o crescimento e reprodução são limitados. Logo, as taxas de natalidade e mortalidade dependem do tamanho da população. Dessa forma, temos

$$\frac{dP}{dt} \approx kP \text{ se } P(t) \text{ for suficientemente pequeno.}$$

Isto significa que, para valores pequenos de P(t), o crescimento é praticamente exponencial. Por outro lado, à medida que P(t) aumenta, a taxa de crescimento decresce linearmente, tornando-se nula se P(t) = M. Portanto, o modelo de Verhulst para o crescimento populacional pode ser escrito na forma

$$\frac{dP}{dt} = kP(1 - \frac{P}{M}) \qquad (3)$$

A equação acima é denominada equação logística. Observando (3), podemos concluir o seguinte: se a quantidade de indivíduos P for pequena em relação à capacidade de suporte M do ambiente, então P⁄M se aproxima de zero e assim, dP/dt ≈ kP. Por outro lado, se P se aproxima de M, a população tende assintoticamente para o seu limite máximo sustentável, levando P⁄ M a se aproximar de 1, de modo que dP/dt se aproxima de zero. Além disso, podemos inferir que, quando 0 < P < M, a taxa de crescimento populacional dP/dt é positiva, ou seja, a população aumenta. No entanto, se a população ultrapassar seu limite máximo suportável (P > M), a expressão (1 - P/ M) se torna negativa, resultando em dP/dt < 0, e consequentemente, a população diminui.

É importante ressaltar que M é uma constante que representa a capacidade de suporte do ambiente, ou seja, o número máximo de indivíduos que o ambiente pode sustentar de forma equilibrada biologicamente. Essa capacidade está relacionada aos recursos disponíveis, à disponibilidade de alimentos, ao espaço físico e a outros fatores essenciais para a sobrevivência e reprodução da população em questão.

Assim, podemos entender que a dinâmica populacional é fortemente influenciada pela relação entre o tamanho da população (P) e a capacidade de suporte do ambiente (M), o que determina o comportamento da taxa de crescimento (dP/dt) ao longo do tempo.

As soluções de equilíbrio da equação logística são por $P(t) = 0 \; e \; P(t) = M$. Para obter estas soluções, resolvemos a equação $\frac{dP}{dt} = 0$. Afirmamos que a solução P(t) = 0 é instável e a solução P(t) = M é assintoticamente estável. Uma discussão mais detalhada sobre estes aspectos pode ser encontrada em Bassanezi e Júnior (1988).

A equação logística é do tipo separável. Daí, sua solução analítica pode ser determinada. Então, separando as variáveis, temos:

$$\int \frac{dP}{P(1 - P/M)} = \int k \, dt$$

Observe que $\frac{1}{P(1-P/M)} = \frac{M}{P(M-P)}$

Por frações parciais, temos

$$\frac{M}{P(M-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}$$

Dessa forma, podemos escrever

$$\int (\frac{1}{P} + \frac{1}{M-P}) dP = \int k\ dt$$

$$\ln|P| - \ln|M-P| = kt + C$$

$$\ln\left|\frac{M-P}{P}\right| = -kt - C$$

$$\left|\frac{M-P}{P}\right| = e^{-kt-C} = e^{-C}.e^{-kt}$$

$$\left|\frac{M-P}{P}\right| = A.e^{-kt},$$

onde A = $\pm\ e^{-C}$. Desse modo, isolando P na equação acima, obtemos

$$\frac{M}{P} - 1 = A.e^{-kt} => \frac{P}{M} = \frac{1}{1 + A.e^{-kt}}$$

Ou seja,

$$P = \frac{M}{1 + A.e^{-kt}}$$

Se $t = 0,$ então $P = P_0$ (a população inicial), portanto

$$\frac{M - P_0}{P_0} = A.e^0 = A$$

Desse modo, a solução da equação logística é

$$P(t) = \frac{M}{1+A.e^{-kt}} \text{ onde } A = \frac{M-P_0}{P_0} \quad (4)$$

Esta será a expressão que utilizaremos no nosso estudo.

3 METODOLOGIA

Aplicaremos os modelos de crescimento populacional de Thomas Malthus e Pierre Verhulst discutidos anteriormente aos dados populacionais do município de Sanharó- PE, obtidos a partir dos censos demográficos realizados pelo IBGE, ao longo dos últimos anos. Para obter os parâmetros de cada modelo, utilizaremos a ferramenta para ajuste de curvas disponível no software Geogebra. Nosso intuito consiste em obter funções que descrevam aproximadamente a dinâmica populacional até o ano de 2032, quando provavelmente ocorrerá o próximo censo demográfico.

Os dados utilizados no nosso estudo constam na tabela seguinte e foram produzidos pelo IBGE.

Tabela 1: Dados Populacionais do Município de Sanharó- PE

Período	População
1980	14.263
1991	15.024
2000	15.879
2010	21.955
2022	18.624

Fonte: Dados de Censos Populacionais do IBGE.

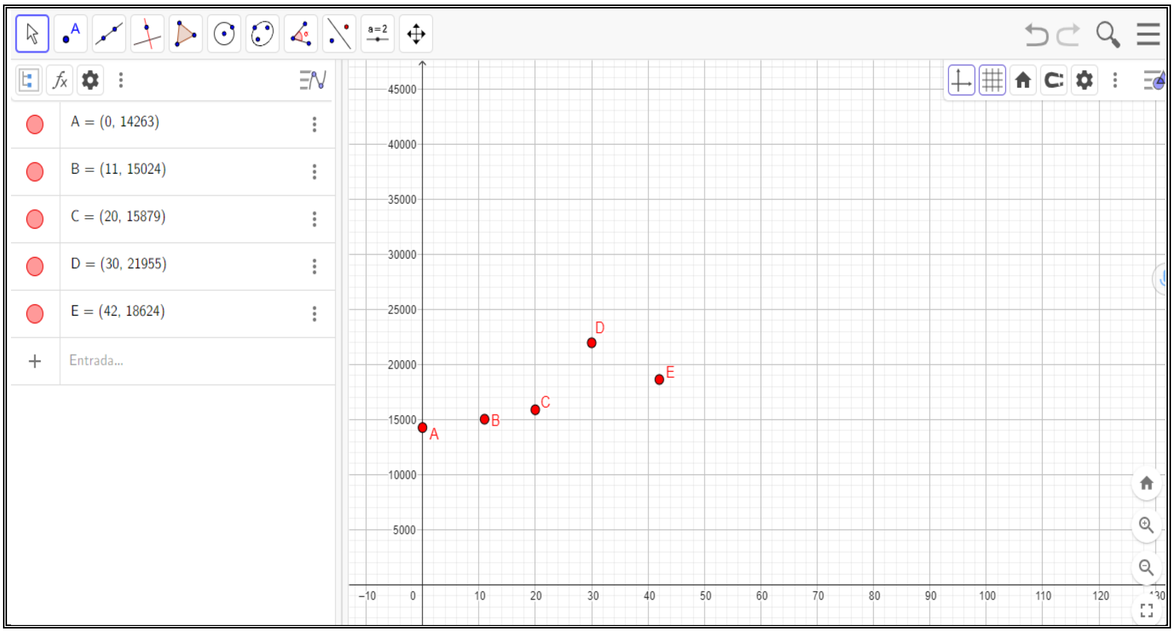
O município de Sanharó está localizado no estado de Pernambuco na região Nordeste do Brasil. Banhado pelo Rio Ipojuca, pertence à Mesorregião do Agreste Pernambucano que no mais é conhecido por ser uma das maiores bacias leiteiras de Pernambuco, possui destaque na produção de queijos e derivados. Detém de um considerável número de comércios de laticínios localizado às margens da BR-232, assim, sendo conhecida também como “a terra do leite e do queijo”.

Historicamente, afirma-se que o nome “Sanharó” advém de uma espécie de abelha negra que era uma espécie característica dessa região. Localiza-se a uma distância de 196 km da capital, Recife. Tendo como municípios limítrofes, Pesqueira ao Oeste, Belo Jardim ao Leste e São Bento do Una ao Sul. Possui 75 anos de idade com fundação em 1948. O município exerce um importante papel na região e interior pernambucano, sendo um dos principais polos de laticínios do estado.

3.1 Ajuste do Modelo de Malthus

Inicialmente, utilizamos o Software Geogebra e inserimos os dados obtidos para construir o gráfico de dispersão, como mostra a figura a seguir.

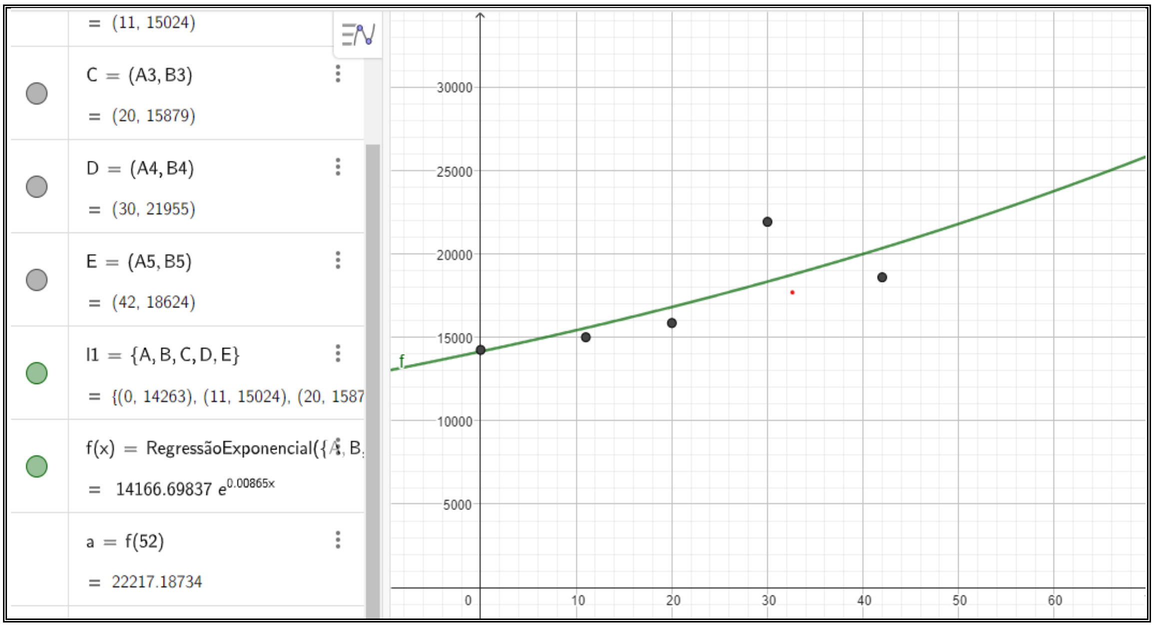
Figura 2: Gráfico de Dispersão por meio do Software Geogebra



Fonte: Construído pelo autor usando o Software Geogebra

Em seguida, utilizando a ferramenta de regressão exponencial do Geogebra, determinamos a função do tipo exponencial (modelo de Malthus) que melhor se ajusta aos pontos do nosso gráfico.

Figura 3: Modelo Malthusiano



Fonte: Construído pelo autor no Software Geogebra

Considerando cinco casas decimais, o modelo exponencial obtido é representado pela função

$$P(t) = 14166{,}69837\,.\,e^{0{,}00865\,t}$$

Esclarecemos que utilizamos $P(0)$ ao invés de $P(1980)$, para simplificar os cálculos.

Assim, podemos calcular o número de habitantes estimados nos anos de 1991, 2000, 2010, 2022 e 2032, data provável para o próximo censo.

Dessa forma, para calcular a população em 1991, basta fazer $t = 11$. Onde t é o tempo decorrido desde 1980 em anos.

Então,

$$P(11) = 14166{,}69837.\ e^{0{,}00865.\ 11} = 15581$$

Para calcular a população em 2000, basta fazer $t = 20$.

$$P(20) = 14166{,}69837\,.\,e^{0{,}00865.\ 20} = 16842$$

Para calcular a população em 2010, basta fazer $t = 30$.

$$P(30) = 14166{,}69837\,.\,e^{0{,}00865.\ 30} = 18364$$

Para calcular a população em 2022, basta fazer $t = 42$.

$$P(42) = 14166{,}69837\,.\,e^{0{,}00865.\ 42} = 20373$$

E, por fim, para calcular a população em 2032, basta fazer $t = 52$

$$P(52) = 14166{,}69837\,.\,e^{0{,}00865.\ 52} = 22213$$

Com os resultados obtidos, montamos a tabela seguinte

Tabela 2: Modelo malthusiano confrontando censo demográfico do IBGE

Ano	Dados do IBGE	Modelo malthusiano	Erro relativo (%)
1991	15024	15581	3,7
2000	15879	16842	6,0
2010	21955	18364	16,3
2022	18624	20373	9,3
2032	*	22213	*

Fonte: Construída pelo autor

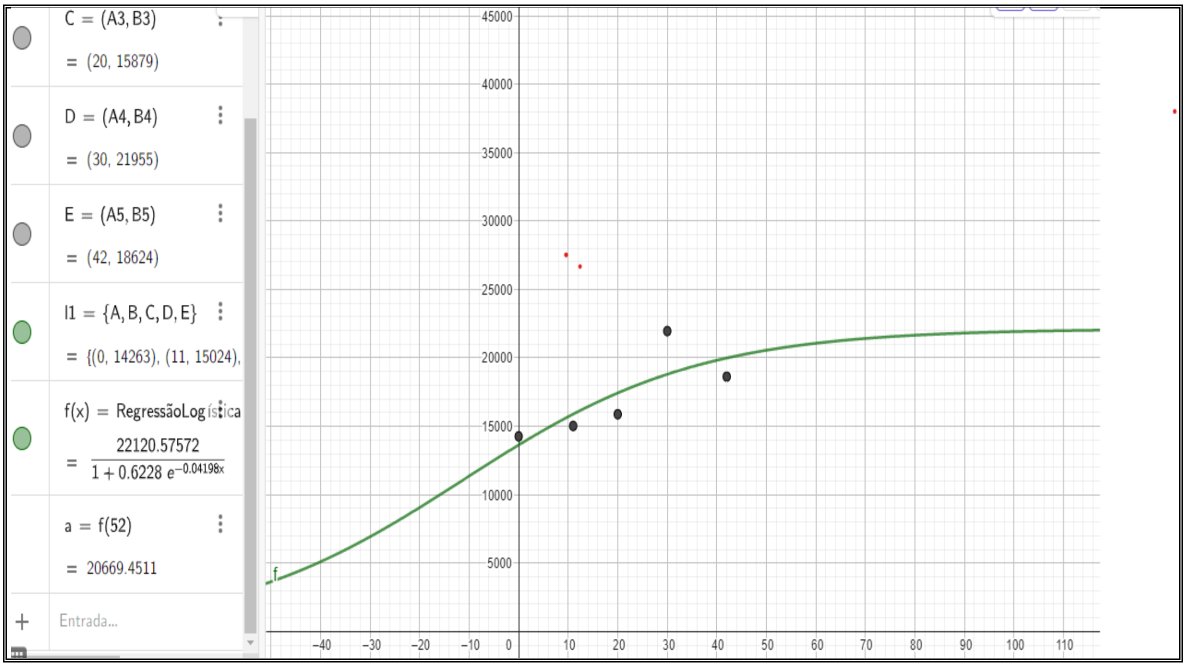
A partir dos dados apresentados na tabela acima percebemos que as estimativas encontradas para a população são crescentes. Também observamos que, para a população de 2010, houve o erro relativo máximo.

3.2 Ajuste do Modelo de Verhulst

De modo análogo ao caso anterior, utilizamos a ferramenta para regressão logística disponível no software Geogebra para determinar a função logística que melhor se ajusta aos nossos dados. Neste caso, obtivemos a função

$$P(t) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\, e^{-0{,}04198.t}}$$

Figura 4: Modelo Logístico



Fonte: Construído pelo autor no Software Geogebra

Considerando o modelo encontrado, vamos calcular o número de habitantes estimados para os anos de 1991, 2000, 2010, 2022 e 2032.

Assim, quando $t = 11,\ t = 20,\ t = 30,\ t = 42\ e\ t = 52$, temos os resultados:

$$P(11) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198\,.11}} \approx 15886\ habitantes$$

$$P(20) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198\,.\,20}} \approx 17432\ habitantes$$

$$P(30) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198\,.\,30}} \approx 18798\ habitantes$$

$$P(42) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198\,.\,42}} \approx 19986\ habitantes$$

$$P(52) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198\,.\,52}} \approx 20670\ habitantes$$

A tabela 3 apresenta os resultados produzidos pelo modelo logístico, bem como os respectivos erros percentuais relativos.

Tabela 3: Modelo logístico confrontando censo demográfico ibegeano

Ano	Dados do IBGE	Modelo logístico	Erro relativo (%)
1991	15024	15886	5,7
2000	15879	17432	9,7
2010	21955	18798	14,3
2022	18624	19986	7,3
2032	*	20.670	*

Fonte: Construída pelo autor

Analisando a magnitude dos erros relativos cometidos, consideramos que os resultados encontrados com modelo de Verhulst se mostraram mais precisos que os resultados determinados através do modelo de Malthus. No entanto, observamos que não houve uma grande discrepância entre os dois modelos, já que os erros relativos não estão demasiadamente distantes.

Contudo, os resultados da função logística se fazem mais predispostos, pois, à medida que a população vai se aproximando da população máxima suportável o erro relativo tende a ser cada vez menor, isto é, a taxa de crescimento populacional se aproxima de zero e a população $P \approx M$.

Um adentro, é que podemos, ainda, calcular o tempo t aproximado em anos para o qual a população se aproxima de sua capacidade máxima suportável.

Assim, faremos para quando atingir 22121. Então

$$P(t) = \frac{22120{,}57572}{1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198.\ t}} = 22121$$

Resolvendo essa equação para t, temos

$$1 + 0{,}6228\,.\,e^{-0{,}04198.\ t} = 1{,}00548$$

$$e^{-0{,}04198.\ t} = 0{,}00880$$

$$-0{,}04198.t = \ln\ (0{,}00880)$$

$$t = \frac{\ln\ (0{,}00880)}{0{,}04198} \approx 112{,}7$$

Logo, a população chega a 22121 habitantes quando t for aproximadamente $t \approx 113$ anos, ou seja, no ano de 2093.

4 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Ao compararmos os dois modelos discutidos, percebemos que o modelo de Malthus se mostrou um pouco menos eficiente para estimar o crescimento populacional do Município de Sanharó, em Pernambuco. Este fato corrobora com a literatura consultada, indicando que este modelo é mais adequado para estimar populações que variam em um curto prazo de tempo, como, por exemplo, o crescimento de uma colônia de bactérias. O modelo de Malthus funciona melhor para uma população na qual não há fatores limitantes que restrinjam seu crescimento, como recursos naturais ou espaço.

. Por outro lado, o modelo de Verhulst com suas características intrínsecas, parece mais apropriado para tratar do crescimento populacional humano. Com efeito, este modelo leva em conta que os recursos são limitados e, portanto, a população tende a se estabilizar em seu limite máximo sustentável.

Os resultados obtidos com o modelo logístico mostram-se mais promissores, pois as estimativas populacionais se aproximam mais da realidade dos censos. Segundo esse modelo, a população de Sanharó deve se estabilizar em torno de 22.121 habitantes, provavelmente em torno do ano 2093.

É essencial reconhecer que os modelos oferecem apenas uma estimativa e, dado que os problemas reais são complexos, quanto mais distante for o intervalo de tempo considerado, maior a probabilidade de erros nos cálculos. O modelo não é capaz de abranger todas as variáveis presentes no mundo real. Por isso, inicialmente, optamos por não considerar os efeitos da imigração e emigração, já que lidar com estes elementos demandaria a utilização de técnicas matemáticas mais sofisticadas.

Conforme constatado com os resultados do censo realizado no ano de 2022, a população do município diminuiu em mais de 3000 habitantes. Essa queda pode ser explicada, em parte, pela variável imigração, pois os habitantes podem estar deixando a cidade em busca de melhores condições socioeconômicas, incluindo oportunidades de estudo e trabalho.

Em resumo, justificamos a escolha do modelo de Verhulst como o mais adequado para nosso estudo, devido à sua capacidade de incluir os efeitos da escassez de recursos, fornecendo estimativas mais próximas da realidade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao estudar um modelo matemático, devemos compreender que a realidade não pode ser representada em sua completa exatidão e complexidade. No entanto, ao considerarmos as variáveis essenciais relacionadas ao problema estudado, o modelo matemático que aborda a questão pode fornecer soluções muito mais próximas da realidade.

A matemática é uma ferramenta poderosa e versátil que pode ser aplicada para estudar e compreender diversas situações do mundo real. Ela fornece um conjunto de técnicas e métodos que permitem analisar e resolver problemas em diferentes áreas da ciência, engenharia, economia, medicina, meio ambiente, entre outras.

Também consideramos que a matemática é uma linguagem universal e oferece uma base sólida para a compreensão e análise do mundo ao nosso redor, permitindo que problemas complexos sejam abordados com precisão e rigor. É por isso que seu estudo e domínio são fundamentais para diversas carreiras e para o avanço em diversas áreas do conhecimento.

Em suma, estudar as aplicações da matemática é uma jornada enriquecedora e essencial para o desenvolvimento intelectual, a tomada de decisões informadas e a capacidade de resolver problemas do mundo real. Seja na vida profissional ou pessoal, o conhecimento da matemática aplicada é uma habilidade valiosa e necessária para enfrentar os desafios do mundo contemporâneo.

REFERENCIAS

BASSANEZI, R.C; **JÚNIOR**, W.C.F. Equações Diferenciais Com Aplicações. São Paulo, Editora- HARBRA ltda, 1988.

Dinâmica da População . Disponível em https://web.archive.org/web/20110909031249/http://blogs.universia.com.br:80/elisabeth/dinamica-da-populacao/. Acesso em 09/07/2023.

GOTELLI, Nicholas J. Ecologia Quarta Edição/ Nicholas J. Gotelli tradução Gonçalo Ferraz e Heloísa Micheletti- Londrina: Editora Planta.

http://tabnet.datasus.gov.br/cgi/deftohtm.exe?ibge/cnv/poppe.def
IBGE, Censo Demográfico 2022. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pe/sanharo/panorama

IBGE, Censos Demográficos 1980, 1991, 2000 e 2010. Disponível em:
STEWART, James Cálculo, volume 2 / James Stewart ; tradução EZ2 Translate. -- São Paulo : Cengage Learning, 2013.

TAVONI, R**.** Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. 21 de agosto de 2013. 70 páginas. Dissertação (Mestrado em Matemática - PROFMAT) - IGCE - UNESP - Rio Claro.

TAVONI, R.; OLIVEIRA, R. Z. G. Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais. C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Bauru, v. 2, n. 2, p. 86-99, dez. 2013.DOI:10.21167/cqdvol22201323169664rtrzgo8699- Disponível em:http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/index.jsp